Nom : ....

Interrogation 14 - Mardi 13 mai 2025

Développements limités

1. Soit f une fonction définie au voisinage de 0 et $n \in \mathbb{Z}$.

   Compléter avec la définition :

   f est négligeable devant x^n au voisinage de 0

   $\Leftrightarrow$

   $\Leftrightarrow$

2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $0 \in I$ et f de classe C^n sur I ($n \in \mathbb{N}$).

   Dans ce cas, d'après la formule de Taylor-Young, pour tout $x \in I$:

3. Compléter les développements limités usuels suivants, pour x au voisinage de 0 :

   (a) A l'ordre 3 :

   $e^x =$

   (b) A l'ordre 3 :

   $\ln(1+x) =$

   (c) A l'ordre 2 :

   $\cos(x) =$

   A l'ordre 3 :

   $\cos(x) =$

   (d) A l'ordre 2 :

   $\sin(x) =$

   A l'ordre 3 :

   $\sin(x) =$

   (e) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, à l'ordre 2 :

   $(1+x)^\alpha =$

   A l'ordre 2 :

   $\frac{1}{1+x} =$

   A l'ordre 2 :

   $\sqrt{1+x} =$

Applications linéaires et matrices

Dans toute cette rubrique, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; n et p désignent des éléments de $\mathbb{N}^*$.

1. Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f : E \to F$.
   Compléter avec la définition :
   f est linéaire

   $\Leftrightarrow$

2. Soient E, F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$.
   Compléter avec les définitions :
   f est un endomorphisme

   $\Leftrightarrow$ ....

   f est un isomorphisme

   $\Leftrightarrow$ ....

   f est un automorphisme

   $\Leftrightarrow$ ....

3. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$.
   Donner la définition de Ker (f).

4. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$.
   Faire le lien entre l'injectivité de f et son noyau.

5. Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f \in L(E, F)$.
   - Compléter avec la définition :

     Im $(f) =$

   - On note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E.
     On a aussi :

     Im $(f) =$

6. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par :

   $$f : (x, y, z) \mapsto \Big(x + y + z\,,\, 2x - y + z\,,\, -x + y - z\Big)$$

   Quel argument utilise-t-on pour justifier que f est linéaire ?

7. On munit $\mathbb{K}^n$ d'une base $\mathcal{B}$.

   $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{K}^n}) =$

8. On note B une base de $\mathbb{K}^p$ et B' une base de $\mathbb{K}^n$.
   Soient f et g linéaires de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$.
   Compléter :
   - Mat $_{B,B'}(f + g)$

     $=$

   - Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, Mat $_{B,B'}(\lambda f) =$

9. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$.
   Soit $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
   Compléter la proposition sur l'image d'une base :
   f est injective

   $\Leftrightarrow$ ....

   f est surjective

   $\Leftrightarrow$ ....

   f est bijective

   $\Leftrightarrow$ ....

10. Soit $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
    Par définition, le rang de f est :

    $\text{rg}(f) =$

11. On note :

    - $B = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$
    - B' une base de $\mathbb{K}^n$
    - $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$

    Enoncer dans ce cas la proposition faisant le lien entre les différentes notions de rang.

12. Enoncer le théorème du rang.

13. Soit $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$.
    Compléter la proposition en donnant des caractérisations par le rang :
    f est injective

    $\Leftrightarrow$ ....

    f est surjective

    $\Leftrightarrow$ ....

    f est bijective

    $\Leftrightarrow$ ....