Semaine 26 - Lundi 20 mai au vendredi 24 mai

Chap 24 - Applications linéaires et matrices

I/ Applications linéaires

1. Définitions
   - Définitions : application linéaire, notation $L(E,F)$
   - Exemple important : id_E
   - Définitions : endomorphisme ($L(E)$), isomorphisme, automorphisme ($GL(E)$)
   - Propriétés des applications linéaires : $f(0_E) = 0_F$ et $f\left(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(u_i)$
2. Opérations sur les applications linéaires
   - Propositions : la somme de deux AL, le produit d'une AL par un scalaire, la composée de deux AL et la réciproque d'une AL (si elle existe) sont des AL

II/ Noyau et image

1. Noyau
   - Définition : Ker(f) est l'ensemble des antécédents de 0_F
   - Proposition : Ker(f) est un sev de E
   - Proposition : f est injective $\Leftrightarrow$ Ker$(f) = \{0_E\}$
2. Image
   - Définition : Im$(f) = f(E)$
   - Proposition : Im(f) est un sev de F
   - Proposition : f est surjective $\Leftrightarrow$ Im$(f) = F$
   - Proposition : si E a pour base $B = (e_1, \dots, e_p)$, alors Im$(f) =$Vect$\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$

III/ Applications linéaires en dimension finie

1. Reconnaître une application linéaire en dimension finie
   - Proposition : toute application f qui va de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ de la forme $f : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \left(a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p\,,\, \dots\,,\, a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p\right)$ est linéaire
2. Caractérisation
   - Proposition : si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base de $\mathbb{K}^p$ et si $(U_1, \dots, U_p)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{K}^n$, alors il existe une unique application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ telle que, pour tout $j \in [\![1,p]\!]$, $f(e_j) = U_j$
3. Conséquence de la caractérisation : matrice d'une application linéaire
   - Définition : matrice d'une application linéaire
   - Correspondance entre calcul d'une image et calcul d'un produit matriciel
4. Matrice d'une application linéaire et opérations
   - Proposition : matrice de $f+g$, de λf, de $g \circ f$
   - Proposition : f est bijective $\Leftrightarrow$ $Mat_{B,B'}(f)$ est inversible, et, dans ce cas, $Mat_{B,B'}(f^{-1}) = \left(Mat_{B',B}(f)\right)^{-1}$
5. Image d'une base
   - Proposition : en notant $B = (e_1, \dots, e_p)$ une base de $\mathbb{K}^p$; f est injective ssi $\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$ est libre ; f est srujective ssi $\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$ est génératrice de $\mathbb{K}^n$; f est bijective ssi $\left(f(e_1), \dots, f(e_p)\right)$ est une base de $\mathbb{K}^n$

IV/ Rang d'une application linéaire

1. Définition
   - Définition : $rg(f)$ est la dimension de Im(f)
   - Proposition : lien entre les différentes notions de rang (d'une application linéaire, d'une famille de vecteurs, d'une matrice, d'un système linéaire)
2. Théorème du rang
   - Théorème du rang
   - Théorème : pour $f \in L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$; f est injective ssi $rg(f) = p$; f est surjective ssi $rg(f) = n$; f est bijective ssi $rg(f) = n = p$
   - Corollaire : pour un endomorphisme f, f est injective ssi f est surjective ssi f est bijective

Chap 25 - Intégration

I/ Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Aire sous la courbe
   - Définition : l'intégrale d'une fonction positive est l'aire sous sa courbe
   - Définition : intégrale d'une fonction de signe quelconque
   - Définition : $\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ dans le cas où $a \leqslant b$
2. Sommes de Riemann
   - Définition : sommes de Riemann $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$ et $T_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$
   - Proposition : pour une fonction continue, $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(t)\,dt$

II/ Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés élémentaires
   - Propositions : linéarité et relation de Chasles
2. Liens avec les inégalités
   - Propositions : positivité, stricte positivité
   - Proposition : croissance de l'intégrale
   - Proposition : si $\forall t \in [a, b]$, $m \leqslant f(t) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$
   - Proposition : inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$
3. Valeur moyenne
   - Définition : $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$
   - Proposition : la valeur moyenne d'une fonction continue est atteinte par la fonction

III/ Théorème fondamental de l'analyse

1. Primitives
   - Définition
   - Proposition : si une fonction a une primitive, alors elle en a une infinité et ses primitives diffèrent d'une constante
2. Théorème fondamental de l'analyse
   - Théorème fondamental de l'analyse : $F : x \mapsto \int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a
   - Corollaire : toute fonction continue admet des primitives
3. Application au calcul d'intégrales
   - Proposition : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$
   - Corollaire : si f est $\mathcal{C}^1$, alors $f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$

Questions de cours

1. *Sans preuve*
   Enoncer la proposition qui permet de déterminer l'image d'une application linéaire en dimension finie ainsi que la proposition sur la construction par choix de l'image d'une base.
2. *Avec preuve*
   Proposition de caractérisation du caractère injective/surjectif/bijectif par l'image d'une base.
3. *Avec preuve*
   Enoncer sans preuve le théorème du rang et en déduire avec preuve les deux autres résultats du paragraphe "Théorème du rang".
4. *Sans preuve*
   Enoncer les propriétés suivantes de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, croissance.
5. *Sans preuve*
   Donner la définition d'une primitive et énoncer le théorème fondamentale de l'analyse.