Intégration - Correction

Exercice 1 (Correction très rapide)

1. IPP et on trouve $\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}$
2. Primitive usuelle et on trouve $\dfrac{1}{2}$
3. Primitive usuelle et on trouve $\dfrac{1}{2}\left(e^{-1} - e^{-4}\right)$
4. IPP et on trouve $\dfrac{1 + ne^{n+1}}{(n+1)^2}$
5. Changement de variable et on trouve $-\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 2 (Correction détaillée)

1. $I = \int_0^1 \arctan(x)\,dx$.
On pose :
$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & 1 & \quad & u(x) & = & x \\ v(x) & = & \arctan(x) & & v'(x) & = & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$
Les fonctions u et v ainsi définies sont de classe C^1 sur $[0,1]$. D'où, par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I &= \Big[x\arctan(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx \\ &= \frac{\pi}{4} - \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) \end{aligned}$$
$$\boxed{I = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2)}$$

2. $I = \int_0^1 \ln(1+x^2)\,dx$
On pose :
$$\begin{array}{rclcrcl} u'(x) & = & 1 & \quad & u(x) & = & x \\ v(x) & = & \ln(1+x^2) & & v'(x) & = & \dfrac{2x}{1+x^2} \end{array}$$
Les fonctions u et v ainsi définies sont de classe C^1 sur $[0,1]$. D'où, par intégration par parties :
$$\begin{aligned} I &= \Big[x\ln(1+x^2)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}\,dx \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2}\,dx \\ &= \ln(2) - 2\int_0^1 \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \ln(2) - 2\Big[x-\arctan(x)\Big]_0^1 \\ &= \ln(2) - 2\Big(1-\frac{\pi}{4}\Big) \end{aligned}$$
$$\boxed{I = \ln(2) - 2 + \frac{\pi}{2}}$$

3. (*Il s'agit juste d'une primitive usuelle*)
$I = \Big[\ln\Big(|\ln(x)|\Big)\Big]_2^e$
$$\boxed{I = \ln\Big(\ln(2)\Big)}$$

4. Le changement de variable proposé est de classe C^1.
   $x = \sin(\theta)$ donc $dx = \cos(\theta)\, d\theta$
   De plus :

x	$\theta = \arcsin(x)$
0	0
1	$\pi/2$

   D'où :
$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)}\,\cos(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(\theta)|\,\cos(\theta)\,d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)\,\cos(\theta)\,d\theta \qquad \text{(sur l'intervalle d'intégration, } \cos(\theta) \geqslant 0) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2\theta)+1}{2}\,d\theta \\ &= \dots \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$
$$\boxed{I = \frac{\pi}{4}}$$

Exercice 3 (Correction très rapide)

1. Méthode habituelle, au choix entre brouillon/vérification et analyse/synthèse.
   On trouve $a = -1$ et $b = 1$.
2. On trouve $\ln\left(\frac{4}{3}\right)$

Exercice 4

- Méthode 1 (en suivant l'indication)
  On calcule I avec le changement de variable indiqué.
  On pose $u = \frac{\pi}{2} - t$.
  Tout d'abord, le changement de variable est de classe C^1.
  De plus, $du = -\,dt$.
  Enfin :

t	u
0	$\pi/2$
$\pi/2$	0

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 -\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - u\right) du \\ &= -\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2(u)\,du \qquad \text{(formule de trigo)} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2(u)\,du \\ &= J \qquad \text{(variable muette)} \end{aligned}$$

$\boxed{I = J}$

Par ailleurs, $I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) + \sin^2(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt = \frac{\pi}{2}$

D'où $\boxed{I = J = \frac{\pi}{4}}$

- Méthode 2 (sans suivre l'indication)

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t)\,dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t) - 1}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2t)\,dt + \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{1}{2} \times 0 + \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

On calcule J de même.

$\boxed{I = J = \frac{\pi}{4}}$

- Comparaison des deux méthodes
  Oui, d'accord, la deuxième méthode est tout à fait valable. Mais la première est plus élégante !
  Dans la deuxième, on fait le calcul et on constate que I et J ont la même valeur. Comme si c'était un hasard qu'on ait trouvé $\frac{\pi}{4}$ les deux fois.
  Dans la première, on démontre que I et J ont par essence la même valeur et il s'avère que cette valeur est $\frac{\pi}{4}$ (ce qui est dans le fond un détail).

Exercice 5 (Grandes lignes)

1. On fait le changement de variable $t = a + b - x$.
2. On utilise l'hypothèse sur f puis on calcule l'intégrale de gauche en faisant le changement de variable $t = a + b - x$.
   On trouve : $\int_a^b x f(x)\,dx = (a+b)\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f(x)\,dx$
   D'où : $\int_a^b x f(x)\,dx = \dfrac{a+b}{2}\int_a^b f(x)\,dx$
3. $a = 0$, $b = \pi$ et $f(t) = \dfrac{\sin(t)}{1+\cos^2(t)}$.
   On trouve $\dfrac{\pi^2}{4}$

Exercice 6 (Grandes lignes)

1. Le changement de variable est le même que celui de l'exercice 3 : on pose $u = \dfrac{\pi}{2} - t$.
   De façon générale, ce changement de variable est souvent utilise lorsqu'on veut "transforme des sin en cos et réciproquement".
2. On calcule $C + S$ en utilisant la linéarité de l'intégrale.
   On trouve $C + S = \dfrac{\pi}{2}$.
   On en déduit que $C = S = \dfrac{\pi}{4}$.
3. On fait le changement de variable $x = \sin(t)$, ce qui revient à $t = \arcsin(x)$ vu l'intervalle considéré.
   On trouve que l'intégrale vaut $C = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 7 (Grandes lignes)

1. On reconnaît une somme de Riemann associée à $f : x \mapsto \cos(x)\sin(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   Selon la façon dont on primitive, on peut trouver deux résultats en apparence différent mais qui sont en réalité égaux.
   $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2}\sin^2(1) = \frac{1-\cos(2)}{4}$
2. On fait apparaître une somme de Riemann. L'intervalle est $[0, 1]$ et la fonction est $f : x \mapsto \ln(1 + x)$.
   On trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \ln(4) - 1$
3. On fait apparaître une somme de Riemann. L'intervalle est $[0, 1]$ et la fonction est $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$.
   Pour primitiver, on conseille d'écrire $f(x) = (1 + x)^{-1/2}$.
   On trouve $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 2\sqrt{2} - 2$

Exercice 8 (Correction complète)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
t_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+2k)^3} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^3} \frac{1}{\left(1 + 2\,\dfrac{k}{n}\right)^3} \\
&= \frac{1}{n^2} \times \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(1 + 2\,\dfrac{k}{n}\right)^3}}_{u_n}
\end{aligned}$$

On reconnaît que u_n est une somme de Riemann associée à la fonction :

$$f : \begin{array}{rcl} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{(1+2x)^3} \end{array}$$

Par les théorèmes opératoires, f est bien continue sur $[0, 1]$.
Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{1}{(1+2x)^3}\,dx = \left[\frac{1}{2} \times \frac{-1}{2(1+2x)^2}\right]_0^1 = \frac{2}{9}$
D'où : $t_n \sim_{n\to+\infty} \dfrac{2}{9n^2}$

Exercice 9 (Grandes lignes)

1. $I_0 = \int_0^1 (1-x)^n \, dx = \left[-\dfrac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$
2. On fait une IPP.
   $I_k = \left[\dfrac{1}{k+1} x^{k+1}(1-x)^{n-k} \right]_0^1 + \dfrac{n-k}{k+1} \int_0^1 x^{k+1}(1-x)^{n-(k+1)} \, dx = \dfrac{n-k}{k+1} I_{k+1}$
   C'est-à-dire $I_{k+1} = \dfrac{k+1}{n-k} I_k$
3. On procède par conjecture puis récurrence.
   $I_0 = \dfrac{1}{n+1}$
   $I_1 = \dfrac{1}{n-0} I_0 = \dfrac{1}{n(n+1)}$
   $I_2 = \dfrac{2}{n-1} I_1 = \dfrac{2}{(n+1)n(n-1)}$
   $I_k = \dfrac{k!\,(n-k)!}{(n+1)!}$

Exercice 10 (Grandes lignes)

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   La fonction $t \mapsto (1-t)^n e^{-2t}$ est continue sur $[0,1]$ donc I_n existe.
   Donc $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ est bien définie}}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on calcule $I_{n+1} - I_n$, et on étudie le signe.
   On trouve $I_{n+1} \leqslant I_n$ donc $\boxed{(I_n) \text{ est décroissante}}$.
3. $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n \geqslant 0}$.
   Par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge}}$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   On sait déjà que $0 \leqslant I_n$.
   Pour tout $t \in [0,1]$: $(1-t)^n e^{-2t} \leqslant (1-t)^n$.
   D'où, en passant à l'intégrale, $I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.
   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}}$
   Par théorème des gendarmes, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = 0}$
5. Tout est dans la question.

Exercice 11 (Correction en partie détaillée)

1. *Fait en classe.*

   On trouve : $I_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $I_1 = \dfrac{\ln(2)}{2}$; $I_2 = 1 - \dfrac{\pi}{4}$.

2. *Fait en classe.*

   On trouve que la suite (I_n) est décroissante et minorée (par exemple par 0).

   Donc, par le théorème de la limite monotone, $\boxed{(I_n) \text{ converge}}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\begin{aligned}
I_{n+2} &= \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2}(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan^2(x)\,\tan^n(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/4} (\,\tan^2(x) + 1 - 1\,)\,\tan^n(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/4} (\,\tan^2(x) + 1\,)\,\tan^n(x) - \tan^n(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/4} \tan'(x)\tan^n(x)\,dx - \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,dx \\
&= \left[\frac{\tan^{n+1}(x)}{n+1}\right]_0^{\pi/4} - I_n \\
&= \frac{1}{n+1} - I_n
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}}$$

4. • Limite

   On sait que (I_n) converge ; on note L sa limite.

   En passant à la limite dans l'égalité de la question 3, on obtient $2L = 0$ d'où $L = 0$.

   $\boxed{(I_n) \text{ converge vers } 0 \text{ .}}$

   • Equivalent

   Soit n au voisinage de $+\infty$.

   Comme (I_n) est décroissante, on obtient :

$$\begin{array}{rcccc}
 & I_{n+2} & \leqslant & I_n & \leqslant & I_{n-2} \\
\Leftrightarrow & I_{n+2} + I_n & \leqslant & 2\,I_n & \leqslant & I_{n-2} + I_n \\
\Leftrightarrow & \dfrac{1}{n+1} & \leqslant & 2\,I_n & \leqslant & \dfrac{1}{n-1} & \text{(d'après la question 3)} \\
\Leftrightarrow & \dfrac{n}{n+1} & \leqslant & 2\,n\,I_n & \leqslant & \dfrac{n}{n-1}
\end{array}$$

   Par théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\,n\,I_n = 1$.

   D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{I_n}{\frac{1}{2n}} = 1$.

   Ce qui prouve que : $\boxed{I_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}}$.

   • Remarque

   On peut déterminer l'équivalent avant la limite ; l'équivalent prouve que $I_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 12 (Correction détaillée)

1. - <u>Première étape : la fonction intégrée est bien définie</u>
     Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
     Soit t compris entre 0 et x (*ce qu'on écrit de cette façon, parce qu'on ne sait pas si x est positif ou négatif et donc on ne sait pas s'il faut écrire $[0, x]$ ou $[x, 0]$*).
     Ainsi :
     $$\begin{aligned} & -\frac{\pi}{4} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{4} \\ \text{donc} \quad & -\frac{\pi}{2} \leqslant 2t \leqslant \frac{\pi}{2} \\ \text{donc} \quad & 0 \leqslant \cos(2t) \\ \text{donc} \quad & \sqrt{\cos(2t)} \text{ existe} \end{aligned}$$
   - <u>Deuxième étape : l'intégrale existe</u>
     Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$
     La fonction $t \mapsto \sqrt{\cos(2t)}$ est continue sur $[0, x]$ ou sur $[x, 0]$ donc l'intégrale qui définie $f(x)$ existe.
   - <u>Conclusion</u>
     $\boxed{f \text{ est bien définie.}}$
2. Tout d'abord, f est définie sur un ensemble symétrique par rapport à 0.
   Soit $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.
   On fait le changement de variable $u = -t$; le changement de variable est $\mathcal{C}^1$.
   $du = -dt$
   Quand $t = 0$, $u = 0$ et quand $t = x$, $u = -x$.
   D'où :
   $$\begin{aligned} f(-x) &= \int_0^{-x} \sqrt{\cos(2t)}\, dt \\ &= \int_0^{x} \sqrt{\cos(-2u)}\, (-du) \\ &= -\int_0^{x} \sqrt{\cos(2u)}\, du \qquad \text{(par parité de } \cos) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$
   Ceci prouve que $\boxed{f \text{ est impaire}}$.
3. Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.
   Pour tout $t \in [0, x]$, $\sqrt{\cos(2t)} \leqslant 1$.
   D'où, en intégrant, $f(x) \leqslant x$.
   $\boxed{\text{Pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right],\ f(x) \leqslant x}$

Exercice 13 (Correction presque complète)

1. • Equation caractéristique

   On commence par résoudre l'équation $X^2 + 1 = 0$ d'inconnue le complexe X.
   Les solutions de cette équation sont i et $-i$.

   • Equation homogène

   On résout ensuite l'équation homogène (E_0) : $y'' + y = 0$.
   L'ensemble des solutions de (E_0) est :

$$\left\{ \begin{array}{lllll} Y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & K_1\cos(x) + K_2\sin(x) \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

   • Solution particulière

   Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
   On note y_0 la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = \lambda\, x\, \cos(x) + \mu\, x\, \sin(x)$.

   y_0 est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et :
   $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ y_0'(x) = \lambda\cos(x) - \lambda x\sin(x) + \mu\sin(x) + \mu x\cos(x)$
   $\forall x \in \mathbb{R}\,,\ y_0''(x) = -\lambda\sin(x) - \lambda\sin(x) - \lambda x\cos(x) + \mu\cos(x) + \mu\cos(x) - \mu x\sin(x)$

   De plus :
   y_0 est solution de (E_1)

   $\Leftrightarrow\quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ y_0''(x) + y_0(x) = -\sin(x)$

   $\Leftrightarrow\quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ \Big(-\lambda x + 2\mu\Big)\cos(x) + \Big(-2\lambda - \mu x\Big)\sin(x) + \lambda x\cos(x) + \mu x\sin(x) = -\sin(x)$

   $\Leftrightarrow\quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ 2\mu\cos(x) - 2\lambda\sin(x) = -\sin(x)$

   On voit qu'il suffit de prendre $\mu = 0$ et $\lambda = \dfrac{1}{2}$

   • Conclusion

   L'ensemble des solutions de (E_1) est :

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{lllll} Y & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & K_1\cos(x) + K_2\sin(x) + \dfrac{x}{2}\cos(x) \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}}$$

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.
   On calcule :

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int_0^x (x-t)f(t)\,dt \\ &= x\int_0^x f(t)\,dx - \int_0^x f(t)\,dt \\ &= xF(x) - G(x) \end{aligned}$$

   $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \varphi(x) = xF(x) - G(x)}$

   (b) F est une primitive de f qui est continue sur $\mathbb{R}$, donc F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   De même, G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
   Donc, par les théorèmes opératoires, $\boxed{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}}$.

3. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

   f est solution de (E_2)
   $\Leftrightarrow\quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \sin(x) - \int_0^x (x-t)f(t)\,dt$
   $\Leftrightarrow\quad \forall x \in \mathbb{R}\,,\ f(x) = \sin(x) - xF(x) + G(x)$

(en conservant les notations de la question 2)

Ceci prouve que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos(x) - F(x) - xF'(x) + G'(x) \\ &= \cos(x) - F(x) - xf(x) + xf(x) \qquad \text{(par définition de } F \text{ et } G\text{)} \\ &= \cos(x) - F(x) \end{aligned}$$

Cette dernière ligne prouve que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f''(x) = -\sin(x) - f(x)$
C'est ce qu'on voulait.

$\boxed{\text{Si } f \text{ est solution de } (E_2)\text{, alors } f \text{ est solution de } (E_1).}$

4. • Analyse

On suppose que f est une fonction solution de (E_2).
D'après la question 3, f est alors solution de (E_1).
D'après la question 1, il existe donc K_1 et K_2 des réels tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$f(x) = K_1 \cos(x) + K_2 \sin(x) + \frac{x}{2}\cos(x)$.

On chercher alors à déterminer K_1 et K_2.

D'une part, $f(0) \;=\; K_1 \cos(0) + K_2 \sin(0) + \frac{0}{2}\cos(0) \;=\; K_1$
D'autre part, $f(0) \;=\; \sin(0) - \int_0^0 (0-t)f(t)\,dt \;=\; 0$ (d'après les calculs au début de la question 3).
Ainsi, $K_1 = 0$, et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = K_2 \sin(x) + \frac{x}{2}\cos(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \;=\; K_2 \cos(x) + \frac{1}{2}\cos(x) - \frac{x}{2}\sin(x)$.
D'une part, $f'(0) \;=\; K_2 \cos(0) + \frac{1}{2}\cos(0) - \frac{0}{2}\sin(0) \;=\; K_2 + \frac{1}{2}$
D'autre part, $f'(0) = \cos(0) - F(0) = 1$ (d'après les calculs de la question 3).
Ainsi, $K_2 = \frac{1}{2}$.

Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x\cos(x) + \sin(x)}{2}$.

• Synthèse

On définit la fonction f pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x\cos(x) + \sin(x)}{2}$ et on vérifie qu'elle convient.
Tout d'abord, f est bien continue sur $\mathbb{R}$.
Ensuite : soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \int_0^x (x-t)f(t)\,dt &= \int_0^x (x-t)\,\frac{t\cos(t) + \sin(t)}{2}\,dt \\ &= \frac{x}{2}\int_0^x t\cos(t)\,dt + \frac{x}{2}\int_0^x \sin(t) - \frac{1}{2}\int_0^x t^2\cos(t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^x t\sin(t)\,dt \\ &= \dots \qquad \text{(par IPP)} \\ &= \sin(x) - f(x) \end{aligned}$$

Donc f convient.

• Conclusion

$\boxed{(E_2) \text{ a une unique solution ; c'est la fonction définie sur } \mathbb{R} \text{ par : } f : x \mapsto \dfrac{x\cos(x) + \sin(x)}{2}}$

Exercice 14 (Grandes lignes)

1. (a) $F(x) = x\,f(0) + o_{x\to 0}(x)$
   (b) si $x \neq 0$, $G(x) = \dfrac{1}{2x}\Big(F(x) - F(-x) \Big)$
   (c) • Sur $\mathbb{R}^*$: OK
   • En 0 :
   On utilise le DL de F, et on trouve que $G(x)$ tend vers $f(0)$ quand x tend vers 0.
   C'est ce qu'on voulait.
2. C^1 : OK
   $$G'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{\Big(f(x) - f(-x)\Big)\,x - \Big(F(x) - F(-x)\Big)}{x^2}$$

Exercice 15 (Grandes lignes)

1. On écrit : $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,dt = \int_{-a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{a} f(t)\,dt$.
   On utilise le changement de variable pour démontrer que ces deux intégrales sont égales.
2. Même méthode, mais on trouve que les deux intégrales sont opposées.

Exercice 16 (Grandes lignes)

On écrit : $\displaystyle\int_{a}^{a+T} f(t)\,dt = \int_{a}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{T} f(t)\,dt + \int_{T}^{a+T} f(t)\,dt$.
On utilise le changement de variable pour démontrer que la troisième intégrale est l'opposé de la première.

Exercice 17 (Grandes lignes)

Absurde.
Sinon ; il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) > 0$.
Par continuité, il existe alors un intervalle I d'intérieur non vide tel que :

- $I \cap [a, b] \neq \emptyset$
- $c \in I$
- $\forall x \in I\,,\ f(x) > 0$

Ainsi, $\displaystyle\int_{a}^{b} f(t)\,dt \geqslant \int_{I} f(t)\,dt > 0$, ce qui est faux.