Variables aléatoires sur un univers fini

Variables aléatoires finies

Exercice 1

On dispose d'une urne contenant une boule rouge et quatre boules noires. On tire successivement toutes les boules sans remise et on note X le rang du tirage de la boule rouge.

Déterminer la loi de X.

Exercice 2

On vous propose de jouer à un jeu. Pour pouvoir participer, il faut d'abord payer 1 euro. Ensuite, on lance deux dés classiques équilibrés simultanément.

- Si l'un des dés au moins présente un chiffre impair, vous ne gagnez rien.
- Sinon, si les dés présentent deux chiffres différents, vous gagnez 1 euro.
- Sinon, si les dés présentent le même chiffre pair, vous gagnez une somme égale au total des points des deux dés.

On note X la variable aléatoire qui à une partie associe le gain algébrique.

1. (a) Ecrire une fonction Python qui simule ce jeu.
   (b) A l'aide de Python, en déduire une valeur approchée de $E(X)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Calculer $E(X)$ et interpréter.

Exercice 3

Un dé à 6 faces, numérotées de 1 à 6, est tel que la probabilité d'apparition d'une face est proportionnelle à sa valeur.

On lance ce dé et on note X le nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X, $E(X)$ et $V(X)$.
2. On généralise avec un dé à n faces ($n \in \mathbb{N}^*$).
   (a) Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
   (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

Exercice 4

Chaque individu d'une population souffre d'une certaine maladie avec une probabilité $p = 0,01$. Pour dépister cette maladie dans une échantillon de n individus, on a le choix entre deux techniques :

- Technique n°1 : effectuer un dépistage sur un échantillon sanguin de chaque individu.
- Technique n°2 : on effectue d'abord un dépistage sur un échantillon contenant le mélange du sang des n individus, puis dans le cas où le résultat est positif, on effectue le dépistage sur chaque échantillon.

On note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'analyses effectuées avec la technique n°2.

1. Déterminer la loi de X_n et son espérance.
2. Montrer que la technique n°2 est préférable à la technique n°1 si et seulement si $n\ln(0,99) + \ln(n) > 0$.
3. Déterminer (calculatrice requise) les solutions de cette inéquation.

Lois usuelles

Exercice 5

Dans chacune des situations suivantes, reconnaître la loi usuelle suivie par la variable aléatoire X.

On ne demande pas de justification.

1. On choisit une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.
   X est la hauteur de la carte choisie.
2. Un lion mange à chaque repas une gazelle (avec probabilité $\frac{2}{3}$) ou un zèbre (avec probabilité $\frac{1}{3}$). On suppose que la composition d'un repas est indépendante de celle des autres.
   X est le nombre de zèbres mangés sur 10 repas consécutifs.
3. On lance un dé classique à 6 faces.
   X est le chiffre obtenu.
4. 3000 sportifs se lancent au départ d'un marathon. Chaque participant termine la course avec une probabilité $\frac{2}{3}$.
   X est le nombre de personnes qui terminent la course.
5. Bruno dort chez son ami Justine qui lui a prêté son appartement. Il dispose d'un trousseau de 7 clés et ne sait pas laquelle est la bonne. Il les essaie une à une en mettant de côté chaque mauvaise clé essayée.
   X est le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé.

Exercice 6

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit une variable aléatoire X_n par :

- $X_n(\Omega) = \{\frac{1}{n}, \dots, \frac{n}{n}\}$
- Pour tout $k \in X_n(\Omega)$, $P(X_n = k) = \frac{1}{n}$

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer X_n en fonction d'une loi usuelle.
2. En déduire $E(X_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et étudier la limite de $E(X_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 7

On considère un jeu de 32 cartes et on pioche simultanément deux cartes dans le paquet. Si les deux cartes tirés sont de même valeur, on dit qu'il y a bataille et on pose $B = 1$. Sinon, on pose $B = 0$.

Déterminer la loi de B ainsi que son espérance et sa variance.

Exercice 8

Une puce se déplace de manière rectiligne. A chaque saut, elle avance d'un centimètre avec une probabilité $p \in [0,1]$ et recule d'un centimètre avec une probabilité $1-p$. Chaque saut est indépendant des autres.

On note X_n la variable aléatoire qui donne l'abscisse de la puce sur l'axe au bout de n sauts ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. Ecrire une fonction Python qui simule la situation.
2. Exprimer X_n en fonction d'une variable aléatoire suivant une loi usuelle.
3. Déterminer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 9

On cherche à transmettre des données informatiques (une suite de 0 et de 1). Un bruit dans une transmission peut fausser un caractère (transformer un 0 en 1 ou un 1 en 0) avec la probabilité $1-p$ ($p \in]0,1[$), de manière indépendante.

Pour limiter cette altération, on envoie trois fois chaque caractère et si on a obtenu une majorité de 0 on considère que le caractère est 0. Sinon, on considère que le caractère est 1.

1. Pour un caractère, on note S la variable aléatoire qui donner le nombre de fois où le caractère a été transmis avec succès au cours des trois envois.
   Montrer que, si $p > \dfrac{1}{2}$, la fiabilité de la réception est meilleure avec le triple envoi qu'avec un seul.
2. Quelle est la probabilité qu'un message de n caractères ($n \in \mathbb{N}^*$) ait été envoyé sans erreur ?
3. Quel est le nombre moyen de caractères erronés à la réception d'un massage de n caractères ?

Exercice 10

Soit X une V.A. de loi $\mathcal{B}(n,p)$.
Calculer l'espérance de $\dfrac{1}{X+1}$.

Couples de variables aléatoires

Exercice 11

Dans une urne, il y a une boule rouge. On lance un dé équilibré à 4 faces numérotées de 1 à 4 et on note X le nombre obtenu. On place alors X boules blanches dans l'urne, puis on retire les boules de l'urne, une à une, jusqu'à avoir tiré la boule rouge. On note alors Y le nombre de boules tirées.

1. Déterminer la loi de X.
2. Pour tous $(i,j) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, déterminer :
$$P\Big((X=i) \cap (Y=j)\Big)$$
3. Déterminer la loi de Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 12

Une urne contient 4 boules rouges, 4 boules blanches et 2 boules jaunes. On tire successivement et avec remise trois boules. On note R le nombre de boules rouges et J le nombre de boules jaunes obtenues.

1. Déterminer les lois de R et J.
2. R et J sont-elles indépendantes ?

Approfondissement

Exercice 13

Soient A et B deux événements d'un univers fini Ω.
Démontrer que :

1. $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$
2. $\mathbb{1}_{\overline{A}} = 1 - \mathbb{1}_A$
3. $\mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}$

Exercice 14

Soit $n \in \mathbb{N}$ et X une V.A. tells que $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$.
Montrer que :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k)$$

Exercice 15

Une puce se déplace de manière rectiligne dans un seul sens par bonds successifs de 1 cm, avec une probabilité $p \in [0,1]$, ou de 2 cm, avec une probabilité $1-p$. Tous les sauts sont indépendants.

1. On note S_n le nombre de sauts de 2 cm effectués au cours des n premiers sauts.
   Déterminer la loi de S_n.
2. On note X_n le nombre de cm parcourus par la puce après n sauts.
   (a) Ecrire une fonction Python **X(n,p)** qui simule X_n.
   (b) Exprimer X_n en fonction de S_n. En déduire l'espérance et la variance de X_n.
3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note Y_n le nombre de sauts nécessaires pour parcourir n cm.
   (a) Ecrire une fonction Python **Y(n,p)** qui simule Y_n.
   (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $P(Y_{n+2} = k)$ en fonction de $P(Y_{n+1} = k-1)$ et $P(Y_n = k-1)$.
   On pourra utiliser le système complet d'événements $\Big((X_1=1),(X_1=2)\Big)$.
   (c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire une relation de récurrence sur $E(Y_n)$.
   (d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = E(Y_n) - an$.
   Déterminer réel a pour que (u_n) soit une suite récurrente linéaire d'ordre 2.
   (e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire l'espérance de Y_n.

Exercice 16

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue trois tirages d'une boule, successifs et avec remise.

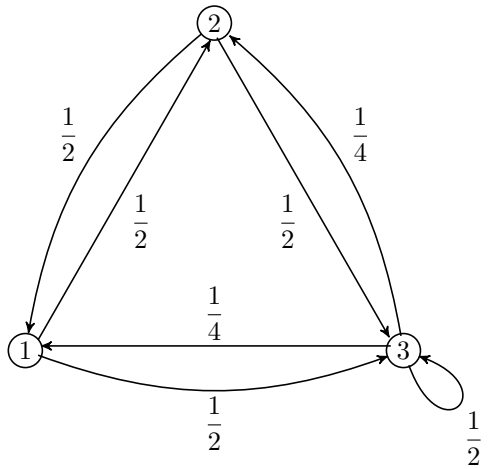
On note Z la variable aléatoire égale à la différence entre le plus grand numéro obtenu et le plus petit.

1. Déterminer $Z(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de Z.
   On pourra traiter à part le cas $(Z = 0)$.
3. (a) Démontrer que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:
$$\sum_{k=1}^{N} k^3 = \Big(\frac{N(N+1)}{2}\Big)^2$$
   (b) Déterminer l'espérance de Z.
4. Déterminer un polynôme réel P tel que :
$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ P(x+1) - P(x) = nx^3 - x^4$$
   En déduire $V(Z)$.

Exercice 17

Un groupe de chercheurs s'intéresse au comportement d'une souris lorsqu'elle est placée dans un labyrinthe.

Le labyrinthe comporte trois croisements numérotés 1, 2 et 3 et de nombreux chemins. Il est schématisé sur la Figure 2 ci-dessous. Les flèches indiquent les déplacements possibles et les nombres portés le long des flèches indiquent les probabilités respectives que la souris choisisse ces déplacements.



A l'instant initial, on place la souris sur le croisement numéro 1.

On note X_n la variable aléatoire qui indique le numéro du croisement où se trouve la souris après le $n^{\text{ème}}$ déplacement $(n \in \mathbb{N})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note aussi Y_n le vecteur colonne défini par : $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

Ainsi, $Y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$.

1. On note A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par :
$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
   Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ Y_{n+1} = AY_n$$
2. En déduire que :
$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ Y_n = A^n Y_0$$
3. Donner, pour tout $n \geqslant 1$, $P(X_n = 3)$.
   Justifier votre réponse.
4. (a) Calculer A^2 puis $A^2 \times (2A - I)$ (où I est la matrice identité d'ordre 3).
   En déduire la relation $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.
   (b) En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = u_n A^2 + v_n A$.
   (c) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.
   (d) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_n et v_n.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul, la loi de X_n.