

DS n°7 - Correction**Informatique - Exercice**

1. (a) Le schéma relationnel de la table est : Finales(finalisteOuest : txt , finalisteEst : txt, vainqueur : txt , année : int) .
(b) Cette table admet une clé primaire : année.

2.
-a-
SELECT finalisteEst FROM Finales WHERE année = 2020 ;
-b-
SELECT année FROM Finales WHERE vainqueur = "Lakers" ;
-c-
SELECT COUNT(*) FROM Finales WHERE vainqueur = "Lakers" ;
-d-
SELECT COUNT(*) FROM Finales WHERE finalisteOuest = "Lakers" AND vainqueur != "Lakers" ;
3.
-a-
SELECT DISTINCT(equipe) FROM Joueurs WHERE nom = "James" AND prenom = "LeBron" ;
-b-
SELECT Equipes.ville
FROM Joueurs JOIN Equipes
ON Joueurs.equipe = Equipes.nom
WHERE Joueurs.nom = "James" AND Joueurs.prenom = "LeBron" ;
-c-
SELECT MIN(Finales.année)
FROM Finales JOIN Joueurs
ON Finales.vainqueur = Joueurs.equipe
WHERE Joueurs.nom = "James" AND Joueurs.prenom = "LeBron" ;
4.
-a-
SELECT nom, prenom, MIN(naissance) FROM Joueurs ;
-b-
SELECT DISTINCT(nom) FROM Joueurs WHERE naissance LIKE "198%" ;
-c-
SELECT DISTINCT(nom),DISTINCT(prenom) FROM Joueurs ORDER BY naissance DESC ;
5.
SELECT DISTINCT(Joueurs.nom) , DISTINCT(Joueurs.prenom)
FROM Joueurs JOIN Finales
ON Joueurs.equipe = Finales.vainqueur
WHERE Finales.année >= 2020 ;

Mathématiques - Exercice 1

1. • Sur $\mathbb{R}^*$

Par les théorèmes opératoires de continuité, f est continue sur $\mathbb{R}^*$.

- En 0

$$f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{-x}{x} \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} -1 = f(0)$$

Donc f est continue en 0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. • Sur $\mathbb{R}^*$

Par les théorèmes opératoires de dérivabilité, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

- En 0

Soit x au voisinage de 0.

$$f(x) = \frac{1 - \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)\right)}{x} = \frac{-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^3)}{x} = -1 - \frac{x}{2} - \frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Par lecture du DL, f est dérivable en 0 (et $f'(0) = -\frac{1}{2}$).

Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

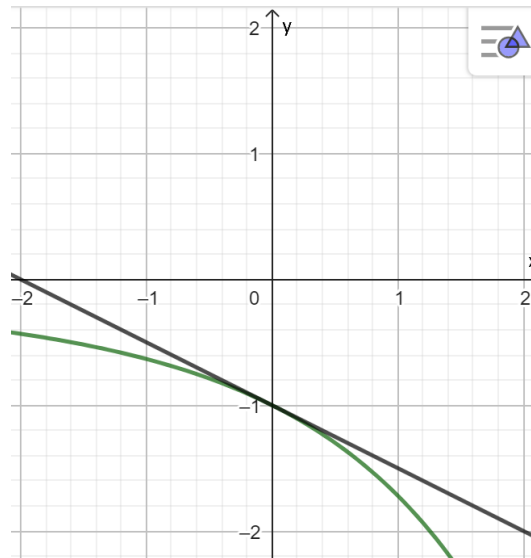
3. Toujours par lecture du DL, une équation de la tangente à C en son point d'abscisse 0 est $y = -1 - \frac{x}{2}$.

De plus, pour x au voisinage de 0 :

$$f(x) - \left(-1 - \frac{x}{2}\right) = -\frac{x^2}{6} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$$

Pour x assez proche de 0, cette expression est donc négative et C est en-dessous de sa tangente.

Au voisinage de 0, on obtient donc :



Mathématiques - Exercice 2**1. Stratégie 1**

- (a) On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements
- $(E_1, \overline{E}_1)$
- :

$$P(F_1) = P(E_1) \times P(F_1 | E_1) + P(\overline{E}_1) \times P(F_1 | \overline{E}_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{12} : \boxed{P(F_1) = \frac{7}{12}}$$

- (b) L'événement
- E_2
- est en fait l'événement
- $(E_1 \cap F_1) \cup (\overline{E}_1 \cap \overline{F}_1)$

$$\begin{aligned} P(E_2) &= P((E_1 \cap F_1) \cup (\overline{E}_1 \cap \overline{F}_1)) \\ &= P(E_1 \cap F_1) + P(\overline{E}_1 \cap \overline{F}_1) \quad (\text{événements incompatibles}) \\ &= P(E_1) \times P(F_1 | E_1) + P(\overline{E}_1) \times P(\overline{F}_1 | \overline{E}_1) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{P(E_2) = \frac{5}{12}}$$

Pour calculer $P(F_2)$, on utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(E_2, \overline{E}_2)$.

$$P(F_2) = P(E_2) \times P(F_2 | E_2) + P(\overline{E}_2) \times P(F_2 | \overline{E}_2) = \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{12} \times \frac{2}{3} = \frac{43}{72}$$

$$\boxed{P(F_2) = \frac{43}{72}}$$

- (c) Soit
- $n \in \mathbb{N}$
- avec
- $n \geq 2$
- .

Etant donné la stratégie mise en place, $P(E_n) = P(E_2)$.

On détermine donc $P(F_n)$ par des calculs identiques à ceux permettant d'obtenir $P(F_2)$, et donc $P(F_n) = \frac{43}{72}$.

On en déduit que $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{43}{72}}$.

2. Stratégie 2

- (a) Soit
- $n \in \mathbb{N}^*$
- .

On utilise la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(E_n, \overline{E}_n)$.

$$P(E_{n+1}) = P(E_n) \times P(F_n | E_n) + P(\overline{E}_n) \times P(F_n | \overline{E}_n) = \frac{1}{2}P(E_n) + \frac{1}{3}(1 - P(E_n)) = \frac{1}{6}P(E_n) + \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P(E_{n+1}) = \frac{1}{6}P(E_n) + \frac{1}{3} .}$$

- (b) On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

Pour déterminer le point fixe, on résout :

$$x = \frac{1}{6}x + \frac{1}{3} \Leftrightarrow 6x = x + 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{5}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose alors $v_n = P(E_n) - \frac{2}{5}$.

(v_n) est une suite géométrique, de raison $\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_1 = P(E_1) - \frac{2}{5} = \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$.

Et $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, P(E_n) = \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5} .}$

(c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On applique la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(E_n, \overline{E_n})$.

$$\begin{aligned}
 P(F_n) &= P(E_n) \times P(F_n | E_n) + P(\overline{E_n}) P(F_n | \overline{E_n}) \\
 &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} + \frac{2}{5} \right] + \frac{2}{3} \times \left[1 - \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} + \frac{2}{5} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} + \frac{2}{5} \right] + \frac{2}{3} \times \left[- \left(\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} + \frac{2}{5} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{10} \left(\frac{1}{6} \right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \right) + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} \\
 &= -\frac{1}{10} \left(\frac{1}{6} \right)^n + \frac{3}{5}
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, P(F_n) = \frac{3}{5} - \frac{1}{10 \times 6^n}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n) = \frac{3}{5}}.$$

$$3. \quad \frac{3}{5} - \frac{43}{72} = \frac{3 \times 72 - 5 \times 43}{5 \times 72} = \frac{216 - 215}{5 \times 72} > 0$$

Ceci prouve que : $\boxed{\text{à long terme, la stratégie 2 permet d'avoir le plus de chance d'obtenir "face"}}$.

Mathématiques - Exercice 3

Partie A

1. P est une partie de l'espace définie par une équation cartésienne donc P est un plan de l'espace.

Soit $(x, y, z) \in E$.

$$(x, y, z) \in P \Leftrightarrow 2x - y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1x + 0z \\ y = 2x + 1z \\ z = 0x + 1z \end{cases}$$

Ceci prouve que $P = \text{Vect} \left((1, 2, 0), (0, 1, 1) \right)$ et donc P est un sous-espace vectoriel de E .

De plus, les vecteurs $(1, 2, 0)$ et $(0, 1, 1)$ sont *deux* vecteurs non colinéaires ; ils forment donc une famille libre ; ils forment donc une base de P .

Ainsi une base de P est $\left((1, 2, 0), (0, 1, 1) \right)$.

2. On peut lire directement sur l'équation de P que le vecteur $v = (2, -1, 1)$ est orthogonal à tout vecteur de P .

3. Soit $u = (x, y, z)$.

Puisqu'on sait que le projeté orthogonal de u sur P est définie de façon unique, il suffit de vérifier que le vecteur u_P fourni par l'énoncé est le bon.

On note $X = \frac{1}{6}(2x + 2y - 2z)$, $Y = \frac{1}{6}(2x + 5y + z)$ et $Z = \frac{1}{6}(-2x + y + 5z)$ les coordonnées de u_P .

- Appartenance à P

$$\begin{aligned} 2X - Y + Z &= \frac{1}{6} \left(2(2x + 2y - 2z) - (2x + 5y + z) + (-2x + y + 5z) \right) \\ &= \frac{1}{6} (0x + 0y + 0z) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $u_P \in P$.

- Orthogonalité à P

Tout d'abord, $u - u_P = (x - X, y - Y, z - Z) = \frac{1}{6} (4x - 2y + 2z, -2x + y - z, 2x - y + z)$

On calcule les deux produits scalaires avec les vecteurs de la base de P trouvés à la question 1 :

$$(u - u_P) \cdot (1, 2, 0) = (x - X) + 2(y - Y) = \frac{1}{6} \left((4x - 2y + 2z) + 2(-2x + y - z) \right) = 0$$

$$(u - u_P) \cdot (0, 1, 1) = (y - Y) + (z - Z) = \frac{1}{6} \left((-2x + y - z) + (2x - y + z) \right) = 0$$

Ces deux calculs prouvent que $u - u_P$ est orthogonal aux deux vecteurs de la base de P .

Donc u_P est orthogonal à P .

- Conclusion

Le projeté orthogonal de $u = (x, y, z)$ sur P est $u_P = \frac{1}{6} (2x + 2y - 2z, 2x + 5y + z, -2x + y + 5z)$.

Partie B

1.
 - $p : E \rightarrow E$ est bien une application entre deux espaces vectoriels
 - les coordonnées d'une image sont des combinaisons linéaires des coordonnées de l'antécédent donc p est une application linéaire
 - l'ensemble de départ est égal à l'ensemble d'arrivée

Ces trois points prouvent que p est un endomorphisme de E .

2. On calcule :

$$p(e_1) = \frac{1}{6} (2, 2, -2) \quad p(e_2) = \frac{1}{6} (2, 5, 1) \quad p(e_3) = \frac{1}{6} (-2, 1, 5)$$

On en déduit que $M = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

3. Soit $(x, y, z) \in E$.

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(p)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \\ -2x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ 3y + 3z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y + 3z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = -z \\ z = 1z \end{cases}$$

Ceci prouve que $\text{Ker}(p) = \text{Vect}((2, -1, 1))$; le vecteur $(2, -1, 1)$ constitue donc une base de $\text{Ker}(p)$.

En posant $b_1 = (2, -1, 1)$, (b_1) est une base de $\text{Ker}(p)$.

$$4. \text{Im}(p) = \text{Vect}(p(e_1), p(e_2), p(e_3)) = \text{Vect}((2, 2, -2), (2, 5, 1), (-2, 1, 5))$$

$$\text{Or : } 2(2, 2, -2) + (-2, 1, 5) = (2, 5, 1).$$

$$\text{Donc } \text{Im}(p) = \text{Vect}((2, 2, -2), (-2, 1, 5)) = \text{Vect}((1, 1, -1), (2, 5, 1), (-2, 1, 5)).$$

Les deux vecteurs restants ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre; on a donc une base de $\text{Im}(p)$.

En posant $b_2 = (1, 1, -1)$ et $b_3 = (-2, 1, 5)$, (b_2, b_3) est une base de $\text{Im}(p)$.

5. $B' = (b_1, b_2, b_3)$ est une famille de trois vecteurs de E qui est de dimension 3; il suffit donc de vérifier que cette famille est libre pour qu'elle forme une base de E .

Pour étudier la liberté, on résout :

$$\alpha b_1 + \beta b_2 + \gamma b_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 5\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + \beta - 2\gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\gamma = 0 & L_2 \leftarrow L_1 - L_2 \\ 3\alpha + 3\gamma = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \gamma = \alpha = \beta = 0$$

C'est ce qu'on voulait, donc B' est une base de E .

6. On calcule :

$$p(b_1) = (0, 0, 0) = 0b_1 + 0b_2 + 0b_3$$

$$p(b_2) = \frac{1}{6}(6, 6, -6) = 0b_1 + 1b_2 + 0b_3$$

$$p(b_3) = \frac{1}{6}(-12, 6, 30) = 0b_1 + 0b_2 + 1b_3$$

On en déduit que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Partie C

1. Il faut montrer que $p \circ p = p$, ce qui est équivalent à montrer que $N^2 = N$.

On calcule :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = N$$

Donc p est un projecteur de E .

2. • D'une part, $\text{id}_E \circ \text{id}_E = \text{id}_E$ donc id_E est un projecteur de E et id_E est bijectif (d'inverse lui-même)
 • Soit f un projecteur de E bijectif.

$$\begin{aligned} f \circ f &= f \\ \text{donc } f^{-1} \circ f \circ f &= f^{-1} \circ f \quad (\text{possible car } f \text{ est bijectif}) \\ \text{c'est-à-dire } f &= \text{id}_E \end{aligned}$$

Ces deux points prouvent que $\boxed{\text{id}_E \text{ est le seul projecteur bijectif de } E}$.

3. (a) • Inclusion réciproque
 F et un sous-espace vectoriel de E donc $0_E \in F$ donc $\{(0, 0, 0)\} \subset F$.
 De même, $\{(0, 0, 0)\} \subset G$.
 Donc $\{(0, 0, 0)\} \subset F \cap G$.
 • Inclusion directe
 Soit $u \in F \cap G$.
 $u \in F$ donc $f(u) = 0_E$.
 $u \in G$ donc $f(u) = u$.
 En combinant ces deux informations, il vient $u = 0_E$ et donc $F \cap G \subset \{(0, 0, 0)\}$.

$$\boxed{F \cap G = \{(0, 0, 0)\}}$$

- (b) • Inclusion directe
 Soit $u \in G$.
 Par définition de G , on a $f(u) = u$ et donc $u \in \text{Im}(f)$.
 Donc $G \subset \text{Im}(f)$.
 • Inclusion réciproque
 Soit $u \in \text{Im}(f)$.
 Ainsi, il existe $v \in E$ tel que $u = f(v)$.
 Or, f est un projecteur, donc $u = f(v) = f \circ f(v) = f(f(v)) = f(u)$.
 Ainsi, $u \in G$ et $\text{Im}(f) \subset G$.

$$\boxed{G = \text{Im}(f)}$$

- (c) D'après le théorème du rang et la question 3b, $\boxed{\dim(F) + \dim(G) = 3}$.

- (d) On raisonne par disjonction des cas :

- Si $\dim(F) = 0$ et $\dim(G) = 3$
 Dans ce cas, f est bijectif, $G = E$ et la propriété est vraie.
- Si $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 2$
 On note (w_1) une base de F et (w_2, w_3) une base de G .
 La famille (w_1, w_2, w_3) est une famille de trois vecteurs de E qui est de dimension 3.
 Pour démontrer que (w_1, w_2, w_3) est une base de E , il suffit donc de montrer que cette famille est libre.
 Pour cela, on résout :
 $\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3 = 0_E$
 $\Rightarrow f(\alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3) = f(0_E) = 0_E$
 $\Leftrightarrow \beta f(w_2) + \gamma f(w_3) = 0_E$
 $\Leftrightarrow \beta w_2 + \gamma w_3 = 0_E$ (car $w_2 \in G$ donc $f(w_2) = w_2$ et de même $f(w_3) = w_3$)
 $\Leftrightarrow \beta = \gamma = 0$ (car (w_2, w_3) est une base de G donc est une famille libre)
 Enfin, en revenant à l'équation de départ, il vient $\alpha = 0$; c'est ce qu'on voulait.
 Donc la propriété est vraie.
- Si $\dim(F) = 2$ et $\dim(G) = 1$
 Par un raisonnement analogue au cas précédent, la propriété est vraie.
- Si $\dim(F) = 3$ et $\dim(G) = 0$
 Dans ce cas, $f : u \mapsto 0_E$, $F = E$ et la propriété est vraie.

$\boxed{\text{La réunion d'une base quelconque de } F \text{ et d'une base quelconque de } G \text{ est une base de } E.}$