Semaine 27 - Lundi 26 mai au vendredi 30 mai

Chap 24 - Intégration

I/ Intégrale d'une fonction continue sur un segment

1. Aire sous la courbe
   - Définition : l'intégrale d'une fonction positive est l'aire sous sa courbe
   - Définition : intégrale d'une fonction de signe quelconque
   - Définition : $\displaystyle\int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$ dans le cas où $a \leqslant b$
2. Sommes de Riemann
   - Définition : sommes de Riemann $S_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$ et $T_n = \dfrac{b-a}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\Big(a + k\frac{b-a}{n}\Big)$
   - Proposition : pour une fonction continue, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} T_n = \int_a^b f(t)\,dt$

II/ Propriétés de l'intégrale

1. Propriétés élémentaires
   - Propositions : linéarité et relation de Chasles
2. Liens avec les inégalités
   - Propositions : positivité, stricte positivité
   - Proposition : croissance de l'intégrale
   - Proposition : si $\forall t \in [a,b]\,,\ m \leqslant f(t) \leqslant M$, alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a)$
   - Proposition : inégalité triangulaire : $\left|\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \displaystyle\int_a^b |f(t)|\,dt$
3. Valeur moyenne
   - Définition : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$
   - Proposition : la valeur moyenne d'une fonction continue est atteinte par la fonction

III/ Théorème fondamental de l'analyse

1. Primitives
   - Définition
   - Proposition : si une fonction a une primitive, alors elle en a une infinité et ses primitives diffèrent d'une constante
2. Théorème fondamental de l'analyse
   - Théorème fondamental de l'analyse : $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a
   - Corollaire : toute fonction continue admet des primitives
3. Application au calcul d'intégrales
   - Proposition : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) = \Big[F(t)\Big]_a^b$
   - Corollaire : si f est $\mathcal{C}^1$, alors $f(x) - f(a) = \displaystyle\int_a^x f'(t)\,dt$

IV/ Techniques de calcul

1. Primitives usuelles
2. Linéarisation
   - Technique générale
   - Astuces pour $\cos^2(t)$, $\sin^2(t)$ et $\sin(t)\cos(t)$
3. Intégration par parties
   - Proposition : si u et v sont $\mathcal{C}^1$, alors $\displaystyle\int_a^b u'(t)v(t)\,dt = \Big[u(t)v(t)\Big]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\,dt$
4. Changement de variable
   - Proposition : si f est continue et φ est $\mathcal{C}^1$, alors $\displaystyle\int_a^b \varphi'(t) f\big(\varphi(t)\big)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du$

Chap 25 - Variables aléatoires sur un univers fini

I/ Variables aléatoires finies

1. Définition
   - Définition : V.A. réelle sur Ω
   - Notations : $(X = x)$, $(X \leqslant x)$, $(X \in A)$, $[X = x]$, etc...
   - Proposition : $\Big((X = x)\Big)_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements
2. Loi d'une V.A.
   - Définition : loi d'une V.A.
   - Représentation graphique : diagramme en bâtons
   - Proposition : si $x_1, \dots, x_n$ sont des réels distincts et $p_1, \dots, p_n$ sont des réels tels que $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$ alors il existe une V.A. X telle que $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $P(X = x_i) = p_i$
3. Fonction de répartition d'une V.A.
   - Définition : fonction de répartition d'une V.A.
   - Représentation graphique : diagramme en escaliers
   - Proposition : lien entre loi et fonction de répartition
4. Exemple de la fonction indicatrice
   - Définition : fonction indicatrice
   - Loi d'une fonction indicatrice
   - Proposition : lien avec les opérations
5. Image d'une V.A. par une fonction
   - Proposition : calcul de $P\Big(u(X) = t\Big)$

II/ Espérance et variance

1. Espérance
   - Définition : $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x\, P(X = x)$
   - Proposition : $E(\mathbb{1}_A) = P(A)$
   - Proposition : si X est constante égale à m, alors $E(X) = m$
   - Proposition : propriétés de l'espérance ; linéarité, positivité, croissance
   - Théorème de transfert : $E(u(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} u(x) P(X = x)$
   - Définitions : V.A. centrée, V.A. centrée associée à X
2. Moments
   - Définition : moment d'ordre k associé à X
3. Variance et écart-type
   - Définition : variance de X : $V(X) = E\Big((X - E(X))^2\Big)$
   - Proposition : formule de König-Huygens
   - Proposition : propriétés de la variance ; $V(X) \geqslant 0$ et $V(aX + b) = a^2 V(X)$
   - Définition : écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
   - Définition : variable centrée réduite, variable centrée réduite associée à X

Questions de cours

1. *Sans preuve*
   Enoncer les propriétés suivantes de l'intégrale : linéarité, relation de Chasles, croissance.
2. *Sans preuve*
   Donner la définition d'une primitive et énoncer le théorème fondamentale de l'analyse.
3. *Sans preuve*
   Donner la définition d'une variable aléatoire réelle sur un univers fini ainsi que la définition de sa loi et de sa fonction de répartition.
4. *Sans preuve*
   Dans le cas d'une variable aléatoire réelle sur un univers fini, donner la définition de son espérance ainsi que les propriétés de l'espérance (linéarité, positivité, croissance) et le théorème de transfert.
5. *Avec preuve*
   Dans le cas d'une variable aléatoire réelle sur un univers fini, donner la définition de sa variance et démontrer la formule de König-Huygens.