Variables aléatoires sur un univers fini

Exercice 1 (Correction complète)

Tout d'abord, $X(\Omega) = [\![1, 5]\!]$.

Pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$, on note R_k l'événement "la boule rouge est tirée au $k^{\text{ème}}$ tirage".

- $P(X = 1) \ = \ P(R_1) \ = \ \dfrac{1}{5}$
- $P(X = 2) \ = \ P(\overline{R_1} \cap R_2) \ = P(\overline{R_1})\, P(R_2 \,|\, \overline{R_1}) \ = \ \dfrac{4}{5} \times \dfrac{1}{4} \ = \ \dfrac{1}{5}$
- On calcule $P(X = 3)$ par la formule des probabilités composées :
  $P(X = 3) \ = \ P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2} \cap R_3) \ = \ P(\overline{R_1})\, P(\overline{R_2} \,|\, \overline{R_1})\, P(R_3 \,|\, \overline{R_1} \cap \overline{R_2}) \ = \ \dfrac{4}{5} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{3} \ = \ \dfrac{1}{5}$
- On procède de même pour les deux derniers calculs.

La loi de X est donnée par :

k	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Exercice 2

Fait en classe.

Exercice 3

Fait en classe.

Exercice 4 (Correction en partie complète)

1. Tout d'abord, $X_n(\Omega) = \{1, n+1\}$.
   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on note M_i l'événement "l'individu n°i est malade".
   Ainsi :
   $$\begin{aligned} P(X_n = 1) &= P\Big(\overline{M_1} \cap \overline{M_2} \cap \ldots \cap \overline{M_n}\Big) \\ &= P(\overline{M_1}) \times P(\overline{M_2}) \times \ldots \times P(\overline{M_n}) \quad \text{(par indépendance des événements)} \\ &= 0,99^n \end{aligned}$$

   La loi de X_n est donnée par :

k	1	$n+1$
$P(X_n = k)$	$0,99^n$	$1 - 0,99^n$

   $$E(X) = 1 \times 0,99^n + (n+1) \times \Big(1 - 0,99^n\Big)$$
   D'où $\boxed{E(X) = n\Big(1 - 0,99^n\Big) + 1}$

2. Avec la technique 1, quoi qu'il arrive, on effectue n tests. Ainsi :
   la technique 2 est préférable à la technique 1
   $$\begin{aligned} &\Leftrightarrow E(X_n) < n \\ &\Leftrightarrow n\Big(1 - 0,99^n\Big) + 1 < n \\ &\Leftrightarrow n - n\,0,99^n + 1 < n \\ &\Leftrightarrow -n\,0,99^n < -1 \\ &\Leftrightarrow n\,0,99^n > 1 \\ &\Leftrightarrow \ln\Big(n\,0,99^n\Big) > 0 \qquad \text{(par croissance de } \ln) \\ &\Leftrightarrow \ln(n) + n\ln(0,99) > 0 \end{aligned}$$
   $\boxed{\text{La technique 2 est préférable à la technique 1 si et seulement si } \ln(n) + n\ln(0,99) > 0.}$

3. • Etape 1 : on étudie les variations de $f : x \mapsto \ln(x) + x\ln(0,99)$

   On trouve :

x	1		x_0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\ln(0.99)$	$\nearrow$	$f(x_0)$	$\searrow$	$-\infty$

   avec $x_0 = -\dfrac{1}{\ln(0,99}\simeq 99,5$ et donc $f(x_0) \simeq 4,6 > 0$

   • Etape 2 : annulations de f

   Par théorème de la bijection :

   → il existe un unique $\alpha \in]1, x_0[$ tel que $f(\alpha) = 0$

   → il existe un unique $\beta \in]x_0, +\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$

   • Etape 3 : conclusion

   A l'aide d'une table de valeur de f, on détermine que, pour n entier :

   $f(x) > 0 \ \Leftrightarrow\ 2 \leqslant n \leqslant 643$.

$\boxed{\text{La technique 2 est préférable à la technique 1 si et seulement si il y a entre 2 et 643 personnes (inclus).}}$

Exercices 5 à 12

Il manque du cours pour faire ces exercices.

Exercice 13 (Correction partielle)

Dans chacun des cas, les fonctions ont les mêmes ensembles de départ (Ω) et d'arrivée ($\{0, 1\}$.

1. On procède par équivalence. Soit $\omega \in \Omega$.
$$\begin{array}{ll} & \mathbb{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \\ \Leftrightarrow & \omega \in A \cap B \\ \Leftrightarrow & \omega \in 1 \text{ et } \omega \in B \\ \Leftrightarrow & \mathbb{1}_A(\omega) = 1 \text{ et } \mathbb{1}_B(\omega) = 1 \\ \Leftrightarrow & \Big(\mathbb{1}_A \mathbb{1}_B\Big)(\omega) = 1 \end{array}$$
2. Soit $\omega \in \Omega$.
   - Si $\omega \in A$:
     $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 0$ et $\Big(1 - \mathbb{1}_A\Big)(\omega) = 1 - 1 = 0$
   - Si $\omega \notin A$:
     $\mathbb{1}_{\overline{A}}(\omega) = 1$ et $\Big(1 - \mathbb{1}_A\Big)(\omega) = 1 - 0 = 1$
3. On procède comme à la question précédente, mais en distinguant quatre cas : $\overline{A \cup B}$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ et $A \cap B$.

Exercice 14 (Correction complète)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} P(X \geqslant k) &= \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} P(X = i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} i \times P(X = i) \\ &= \sum_{i=0}^{n} i \times P(X = i) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

Exercice 15 (Correction dans les grandes lignes ; 3d et 3e détaillées)

Je n'ai pas relu. Il y a peut-être besoin de cours non fait. Peut-être pas. Je laisse quand même.

1. S_n suit une loi binomiale de paramètres n et $1-p$.
2. (a) On propose :

```python
import random as rd
def X(n,p):
    x = 0
    for k in range(n):
        saut = rd.random()
        if saut < p :
            x+=1
        else:
            x+=2
    return x
```

   (b) $X_n = 2S_n + (n - S_n) = S_n + n$
   $E(X_n) = n(2-p)$ et $V(X_n) = np(1-p)$

3. (a) On propose :

```python
import random as rd
def Y(n,p):
    distance = 0
    nbre_sauts = 0
    while distance < n :
        saut = rd.random()
        if saut < p :
            distance += 1
        else :
            distance += 2
        nbre_sauts += 1
    return nbre_sauts
```

   (b) On utilise le sce donné.
$$\begin{aligned} P(Y_{n+2}=k) &= P(X_1=1)P(Y_{n+2}=k\,|\,X_1=1)+P(X_1=2)P(Y_{n+2}=k\,|\,X_1=2) \\ &= p\,P(Y_{n+1}=k-1\,|\,X_1=1)+(1-p)\,P(Y_n=k-1\,|\,X_1=2) \end{aligned}$$

   (c) On utilise la formule précédente et on fait attention aux bornes des sommes.
   On trouve : $E(Y_{n+2}) = p\,E(Y_{n+1} + (1-p)E(Y_n) + 1$

   (d) Soit $a \in \mathbb{R}$, qu'on chercher à déterminer.
   Soit $\in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned} u_{n+2} &= E(Y_{n+2}) - a(n+2) \\ &= p\,E(Y_{n+1} + (1-p)E(Y_n) + 1 - a(n+2) \\ &= p\left(u_{n+1} + a(n+1)\right) + (1-p)\left(u_n + an\right) + 1 - a(n+2) \\ &= pu_{n+1} + (1-p)u_n + pa(n+1) + (1-p)an + 1 - a(n+2) \\ &= pu_{n+1} + (1-p)u_n + a(p-2) + 1 \end{aligned}$$
   On constate donc que, pour que la suite (u_n) soit récurrente linéaire d'ordre 2 sans second membre, il suffit de prendre $a = \dfrac{1}{2-p}$.

   (e)
   - Suite (u_n)
     Equation caractéristique : on trouve comme racines 1 et $p-1$
     Terme général : il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \lambda + \mu(p-1)^n$
     Constantes : après des calculs atroces, on trouve $\lambda = \dfrac{1-p}{(2-p)^2}$ et $\mu = \dfrac{p-1}{(2-p)^2}$.
   - Espérance
     $E(Y_n) = \dfrac{1-p}{(2-p)^2}\left(1-(p-1)^n\right) + \dfrac{n}{2-p}$

Exercice 16 (Correction dans les grandes lignes)

Je n'ai pas relu. Il y a peut-être besoin de cours non fait. Peut-être pas.
Je laisse quand même.
Dans tous les cas, c'est un exercice difficile.

1. $Z(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.
2.
   - Modélisation
     $E = [\![1, n]\!]$.
     $\Omega = E^3$ et $\text{card}(\Omega) = n^3$
     P : loi uniforme
   - Pour $Z = 0$
     $P(Z = 0) = \dfrac{n}{n^3} = \dfrac{1}{n^2}$
   - Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$
     On note A_i "on tire la boule n°i, la boule n°$k+i$ et une autre boule dans $[\![i, k+i]\!]$"
     $P(Z = k) = \sum_{i=1}^{n-k} P(A_i)$
     On raisonne alors par dénombrement.
     On fixe $i \in [\![1, n-k]\!]$.
     Pour réaliser A_i, il faut soit 3 numéros distincts (et il y $6(k-1)$ façons), soit 2 numéros distincts et le plus grand en double (3 façons), soit 2 numéros distincts et le plus petit en double (3 façons).
     Au total, $\text{card}(A_i) = 6(k-1) + 6 = 6k$.
     Finalement, $P(Z = k) = \dfrac{6k(n-k)}{n^3}$
3. (a) Récurrence.
   (b) On calcule :
   $$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_{k=1}^{n} -1k\, P(Z = k) \\ &= \dots \\ &= \frac{n^2 - 1}{2n} \end{aligned}$$
4. On cherche du degré 5, en raisonnant par identification.
   On trouve $P(x) = -\dfrac{x^5}{5} + \dfrac{n+2}{4}x^4 - \dfrac{3n+2}{6}x^2 + \dfrac{n}{4}x^2 + \dfrac{1}{30}x$
   Ensuite, $E(Z^2) = \cdots = \dfrac{6}{n^3}P(n)$
   Et donc $V(Z) = \dfrac{n^4 - 1}{20n^2}$

Exercice 17 (Très grandes lignes)

1. Formule des probabilités totales avec le SCE $\Big((X_n = 1)\,,\,(X_n = 2)\,,\,(X_n = 3)\Big)$ pour calculer les probabilités $P(X_{n+1} = 1)$, $P(X_{n+1} = 2)$ et $P(X_{n+1} = 3)$.
   Puis on regroupe les résultats dans une matrice.
2. Suite géométrique.
3. Probas totales, même SCE qu'à la question 1, et on trouve $\dfrac{1}{2}$ parce que les calculs se simplifient.
4. (a) On trouve tout calculs faits : $A^2\Big(2A - I\Big) = A$
   (b) Récurrence.
   (c) Dans la récurrence de la question précédente, on a obtenu "accidentellement" des relations entre d'une part u_{n+1} et v_{n+1} et d'autre part u_n et v_n.
   On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_{n+2} = \dfrac{1}{2}u_{n+1} + \dfrac{1}{2}u_n$
   (d) Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 sans second membre.
   $\forall n \in \mathbb{N}\,,\; u_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{4}{3}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n$ et $v_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1}$
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
Y_n &= A^n Y_0 \\
&= \Big(u_n A^2 + v_n I\Big)Y_0 \\
&= u_n A^2 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + v_n \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \\
&= u_n \begin{pmatrix}3/8\\1/8\\1/2\end{pmatrix} + v_n \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

ET C'EST DANS CET ORDRE QU'ON EFFECTUE LES CALCULS.

Tous calculs faits :

k	1	2	3
$P(X_n = k)$	$\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n$	$\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{2}\Big(-\dfrac{1}{2}\Big)^n$	$\dfrac{1}{2}$