Concours blanc - Mathématiques - Partie 1

Mardi 28 mai 2024 - Durée : 2h

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice 1

On considère l'équation différentielle (E) ci-dessous à résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(1+e^x)\,y' - y + \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2 = 0$$

1. (a) Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

   (b) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E).

2. (a) Appliquer la méthode de variation de la constante et en déduire que y est solution de (E) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ y(x) = \frac{e^x}{1+e^x}\left(\lambda + \frac{1}{1+e^x}\right)$$

   (b) En discutant selon λ, déterminer un équivalent (le plus simple possible) de cette solution au voisinage de $+\infty$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

   (a) Vérifier que f est une solution de (E).
   (b) Etudier la parité de f.
   (c) Etudier les variations de f.

Exercice 2

Un joueur décide de jouer aux machines à sous.
Il va jouer sur deux machines A et B qui sont réglées de la façon suivante :

→ la probabilité de gagner sur la machine A est $\dfrac{3}{10}$

→ la probabilité de gagner sur la machine B est $\dfrac{2}{10}$

On suppose que, pour chaque partie, une fois la machine choisie, l'issue de la partie est indépendante de tout ce qui s'est passé avant.

Comme le joueur soupçonne les machines d'avoir des réglages différents mais ne sait pas laquelle est la plus favorable, il décide d'adopter la stratégie suivante :

→ il commence par choisir une machine au hasard avec équiprobabilité

→ après chaque partie, il change de machine s'il vient de perdre, il rejoue sur la même machine s'il vient de gagner.

On définit, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_k : "la $k^{\text{ème}}$ partie se déroule sur la machine A".

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que $P(A_{k+1}) = -\dfrac{1}{2}P(A_k) + \dfrac{4}{5}$.
2. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, une expression de $P(A_k)$ en fonction de k.

Exercice 3

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ pour tout cet exercice et on considère le polynôme :

$$P_n : x \mapsto 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}}\, x^{4n}\,(1-x)^{4n}$$

1. Déterminer la forme algébrique de $(1-i)^4$.
2. Justifier que P_n est factorisable par $R : x \mapsto x^2+1$.

   Dans la suite de l'énoncé, on note Q_n le polynôme tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (x^2+1)Q_n(x)$.
3. Montrer que :
$$\int_0^1 Q_n(x)\,dx \;=\; \pi - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1}\,dx$$
4. En déduire que :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\,dx\right| \leqslant \frac{1}{4^{n-1}} \int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n}\,dx$$
5. Dans cette question on fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et on souhaite calculer $I_p = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^p\,dx$.
   (a) Montrer que :
$$I_p = \frac{p}{p+1}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^{p-1}\,dx$$
   (b) En itérant le raisonnement de la question précédente, prouver que :
$$I_p = \frac{p\,(p-1)\,(p-2)\,\times\,\ldots\,\times\,2\,\times\,1}{(p+1)\,(p+2)\,(p+3)\,\times\,\ldots\,\times\,(2p-1)\,(2p)\,(2p+1)}$$
6. Montrer que :
$$\left|\pi - \int_0^1 Q_n(x)\,dx\right| \leqslant \frac{\Big((4n)\,!\Big)^2}{4^{n-1}(8n+1)!}$$
7. Dans cette question, on suppose que $n = 1$.
   (a) Quel est le degré de Q_1 ?
   (b) Déterminer Q_1.
   (c) A l'aide du résultat de la question 6, déterminer une approximation de π par une fraction. Quelle est la précision de cette approximation ?