

DS n°8 - Concours blanc partie 1 - Correction
Exercice 1

1. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}} \times \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$.

La deuxième égalité s'obtient de la même façon.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{1}{1+e^x} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$$

- (b) Il s'agit de résoudre : $y' - \frac{1}{1+e^x} y = 0$ (division possible).

On pose $a : x \mapsto -\frac{1}{1+e^x} = \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}$; a est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet des primitives.

On utilise sa primitive A définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $A : x \mapsto \ln(1+e^{-x})$.

Enfin, avant de conclure, on simplifie pour $x \in \mathbb{R}$: $e^{-A(x)} = \exp\left(-\ln(1+e^{-x})\right) = \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^x}{1+e^x}$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} Y & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K \frac{e^x}{1+e^x} \end{array} \quad \middle| \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) • Solution particulière par la méthode de variation de la constante

On définit Y sur $\mathbb{R}$ par : $Y : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$.

On pose ensuite la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par : $y_0 : x \mapsto K(x) Y(x)$ où K est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ que l'on cherche à déterminer. Dès lors :

y_0 est solution de (E)

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x) \left(K'(x) Y(x) + K(x) Y'(x) \right) - K(x) Y(x) + \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, (1+e^x) K'(x) Y(x) + K(x) \left(\underbrace{(1+e^x) Y'(x) - Y(x)}_{=0 \text{ car } Y \text{ sol. de l'équ. hom.}} \right) + \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, K'(x) e^x + \left(\frac{e^x}{1+e^x} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, K'(x) = -\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

On veut seulement une primitive, donc on prend $K : x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$.

Une solution particulière de (E) est donc : $y_0 : x \mapsto \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

• Conclusion

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto & K \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{e^x}{(1+e^x)^2} \end{array} \quad \middle| \quad K \in \mathbb{R} \right\}$$

C'est-à-dire :

$$y \text{ est solution de (E) si et seulement s'il existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tel que : } \forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \left(\lambda + \frac{1}{1+e^x} \right).$$

- (b) Soit y une solution de (E), associée à la constante $\lambda \in \mathbb{R}$.

Tout d'abord, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$ donc $\frac{e^x}{1+e^x} \sim_{x \rightarrow +\infty} 1$

Ensuite, on prend $x \in \mathbb{R}$.

$$\lambda + \frac{1}{1+e^x} = \frac{\lambda(1+e^x)+1}{1+e^x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(1+e^x)+1}{e^x}$$

- Si $\lambda = 0$, on obtient : $\lambda + \frac{1}{1+e^x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x}$
- Si $\lambda \neq 0$, on obtient : $\lambda + \frac{1}{1+e^x} \sim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\lambda e^x}{e^x} = \lambda$

Si $\lambda = 0$, cette solution est équivalente en $+\infty$ à $\frac{1}{e^x}$ et si $\lambda \neq 0$, cette solution est équivalente en $+\infty$ à λ .

3. (a) En prenant le cas particulier $\lambda = 0$, f est une solution de (E).

- (b) Tout d'abord, f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

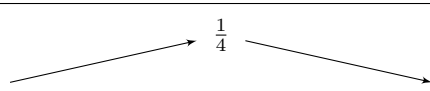
$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{(e^x)^2}{(e^x)^2} \times \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^x}{(e^x+1)^2} = f(x)$$

f est paire.

- (c) Par les théorèmes opératoires, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x \times 2e^x(1+e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1+e^x)(1+e^x-2e^x)}{(1+e^x)^4} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f			

Exercice 2

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(A_k, \overline{A_k})$:

$$P(A_{k+1}) = P(A_k) \times P(A_{k+1} | A_k) + P(\overline{A_k}) \times P(A_{k+1} | \overline{A_k})$$

$$= P(A_k) \times \frac{3}{10} + (1 - P(A_k)) \times \frac{8}{10}$$

$$= -\frac{1}{2} P(A_k) + \frac{4}{5}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_{k+1}) = -\frac{1}{2} P(A_k) + \frac{4}{5}$.

2. La suite $(P(A_k))_{k \in \mathbb{N}^*}$ est donc arithmético-géométrique.

- Point fixe

On résout : $x = -\frac{1}{2}x + \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{2}x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow x = \frac{8}{15}$

- Suite auxiliaire

On définit la suite (v_k) par : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = P(A_k) - \frac{8}{15}$.

(v_k) est géométrique, de raison $q = -\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = P(A_1) - \frac{8}{15} = \frac{1}{2} - \frac{8}{15} = -\frac{1}{30}$.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = -\frac{1}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1}$

- Conclusion

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P(A_k) = -\frac{1}{30} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} + \frac{8}{15}$.
--

Exercice 3

1. $(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^4 = 4e^{-i\pi}$

C'est-à-dire : la forme algébrique de $(1-i)^4$ est -4 .

2. Les racines de R sont i et $-i$. Il suffit donc de vérifier que i et $-i$ sont aussi racines de P_n pour conclure.

$$P_n(i) = 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} (i)^4 (1-i)^{4n} = 4 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \times 1 \times (-4)^n = 4 - \frac{4^n}{4^{n-1}} = 0$$

$$P_n(-i) = P_n(\bar{i}) = \overline{P_n(i)} = 0$$

C'est ce qu'on voulait, et donc P_n est factorisable par R .

3. On calcule :

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_n(x) dx &= \int_0^1 \frac{P_n(x)}{x^2+1} dx \\ &= \int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx \\ &= \left[4 \arctan(x)\right]_0^1 - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx \\ &= \pi - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx \end{aligned}$$

$$\boxed{\int_0^1 Q_n(x) dx = \pi - \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx}$$

4. D'une part :

$$\left| \pi - \int_0^1 Q_n(x) dx \right| = \left| \frac{(-1)^n}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx \right| = \frac{1}{4^{n-1}} \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx$$

(la fonction intégrée est positive sur $[0, 1]$, donc l'intégrale est positive)

Soit $x \in [0, 1]$.

$$1 \leq x^2 + 1 \quad \text{donc} \quad \frac{1}{x^2+1} \leq 1 \quad \text{donc} \quad \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} \leq x^{4n}(1-x)^{4n}$$

$$\text{D'où, par croissance de l'intégrale : } \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{x^2+1} dx \leq \int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n} dx.$$

En combinant ces informations, on obtient :

$$\boxed{\left| \pi - \int_0^1 Q_n(x) dx \right| \leq \frac{1}{4^{n-1}} \int_0^1 x^{4n}(1-x)^{4n} dx}$$

5. (a) $I_p = \int_0^1 x^p (1-x)^p dx.$

On pose :

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^p & u(x) &= \frac{x^{p+1}}{p+1} \\ v(x) &= (1-x)^p & v'(x) &= -p(1-x)^{p-1} \end{aligned}$$

u et v sont de classe C^1 sur $[0, 1]$ donc on peut procéder par intégration par parties :

$$I_p = \left[\frac{1}{p+1} x^{p+1} (1-x)^p \right]_0^1 + \frac{p}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{p-1} dx$$

$$= 0 + \frac{p}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{p-1} dx$$

$$\text{D'où : } \boxed{I_p = \frac{p}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{p-1} dx}.$$

(b) De proche en proche, on obtient :

$$\begin{aligned}
 I_p &= \frac{p}{p+1} \int_0^1 x^{p+1} (1-x)^{p-1} dx \\
 &= \frac{p}{p+1} \times \frac{p-1}{p+2} \times \int_0^1 x^{p+2} (1-x)^{p-2} dx \\
 &= \dots \\
 &= \frac{p}{p+1} \times \frac{p-1}{p+2} \times \dots \times \frac{1}{2p} \int_0^1 x^{2p} (1-x)^0 dx
 \end{aligned}$$

$$\text{Or : } \int_0^1 x^{2p} (1-x)^0 dx = \left[\frac{x^{2p+1}}{2p+1} \right]_0^1 = \frac{1}{2p+1}$$

$$\text{D'où : } I_p = \frac{p(p-1)(p-2) \times \dots \times 2 \times 1}{(p+1)(p+2)(p+3) \times \dots \times (2p-1)(2p)(2p+1)}.$$

6. En utilisant le résultat de la question 5b, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x^{4n} (1-x)^{4n} dx &= \frac{(4n)(4n-1)(4n-2) \times \dots \times 2 \times 1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3) \times \dots \times (8n-1)(8n)(8n+1)} \\
 &= \frac{\left[(4n)(4n-1)(4n-2) \times \dots \times 2 \times 1 \right]^2}{1 \times 2 \times \dots \times (4n-1)(4n)(4n+1)(4n+2)(4n+3) \times \dots \times (8n-1)(8n)(8n+1)} \\
 &= \frac{\left((4n)! \right)^2}{(8n+1)!}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où, en combinant avec le résultat de la question 4 : } \left| \pi - \int_0^1 Q_n(x) dx \right| \leq \frac{\left((4n)! \right)^2}{4^{n-1}(8n+1)!}.$$

7. (a) P_1 est de degré 8 et R est de degré 2 donc Q_1 est de degré 6.

(b) On note $Q_1 : x \mapsto ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$ où a, b, c, d, e, f, g sont des réels à déterminer ($a \neq 0$).

$$\forall x \in \mathbb{R}, P_1(x) = (x^2 + 1)Q_1(x)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 4 + x^4(1-x)^4 = (x^2 + 1)(ax^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g)$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \\
 4 + x^4(1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4) \\
 = ax^8 + bx^7 + (c+a)x^6 + (d+b)x^5 + (e+c)x^4 + (f+d)x^3 + (g+e)x^2 + fx + g
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, \\
 x^8 - 4x^7 + 6x^6 - 4x^5 + x^4 + 4 \\
 = ax^8 + bx^7 + (c+a)x^6 + (d+b)x^5 + (e+c)x^4 + (f+d)x^3 + (g+e)x^2 + fx + g
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -4 \\ c+a &= 6 \\ d+b &= -4 \\ e+c &= 1 \\ f+d &= 0 \\ g+e &= 0 \\ f &= 0 \\ g &= 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = -4, c = 5, d = 0, e = -4, f = 0, g = 4$$

$$Q_1 \text{ est le polynôme défini sur } \mathbb{R} \text{ par : } Q_1 : x \mapsto x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4.$$

(c) D'une part :

$$\int_0^1 Q_1(x) \, dx = \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4x^6}{6} + x^5 - \frac{4x^3}{3} + 4x \right]_0^1 = \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{66}{21} = \frac{22}{7}$$

D'autre part, pour $n = 1$:

$$\frac{\left((4n)!\right)^2}{4^{n-1}(8n+1)!} = \frac{(4!)^2}{9!} = \frac{4 \times 3 \times 2}{5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9} = \frac{1}{5 \times 7 \times 2 \times 9} = \frac{1}{630}$$

$\frac{22}{7}$ est une approximation de π avec une précision de $\frac{1}{630}$.
