Concours blanc - Mathématiques - Partie 2

Mardi 28 mai 2024 - Durée : 2h

L'usage de la calculatrice est interdite.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Problème

Ce problème débute par l'étude de résultats préliminaires concernant une matrice dans la partie A. Ces résultats seront ensuite utilisés dans la partie B pour mener l'étude probabiliste de la position d'un virus informatique. Un changement de modélisation aboutit à la résolution d'une équation matricielle en partie C, cette étude étant complétée en partie D.

Dans tout le problème, p désigne un réel appartenant à $]0,1[$. On note $q = 1 - p$.
Dans tout le problème, on note $B = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^2$.

Partie A - Résultats préliminaires

On définit $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M.

1. (a) En notant $u = (1, -1)$, montrer que (u) est une base de $\mathrm{Ker}\Big(f - (p-q)\mathrm{id}\Big)$.
   (b) En notant $v = (1, 1)$, montrer que (v) est une base de $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$.
2. Justifier que $B' = (u, v)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer $D = \mathrm{Mat}_{B'}(f)$.
3. On note $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Justifier que P est inversible et déterminer P^{-1}.
   (b) Justifier que $P = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id})$ et $P^{-1} = \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id})$.
4. Démontrer que $M = P\,D\,P^{-1}$.
   On pourra traduire l'égalité $f = \mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}$ *dans des bases appropriées.*

Partie B - Première modélisation

Un réseau informatique est constitué de deux serveurs notés A et B. A une date initiale, un virus s'introduit dans le serveur A. Au bout de deux semaines, ce virus reste en A avec une probabilité de p ou quitte A pour aller en B avec une probabilité de q. De même, s'il est en B, au bout de deux semaines, il peut y rester avec une probabilité de p ou revenir en A avec une probabilité de q. On admet qu'à chaque nouvelle quinzaine, le virus peut rester sur le même serveur ou le quitter avec les probabilités p et q.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la probabilité de l'événement "le virus se trouve en A au bout de $2n$ semaines" et v_n la probabilité de l'événement "le virus se trouve en B au bout de $2n$ semaines".

Enfin, comme dans la partie A, M désigne la matrice $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

1. Déterminer une expression de u_{n+1} en fonction de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier avec soin votre réponse.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $C_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
   (a) Préciser C_0.
   (b) Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = M\,C_n$.
   (c) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, une expression de C_n en fonction de M, n et C_0.
3. (a) Déduire de ce qui précède une expression de u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (b) Ces suites sont-elles convergentes ? Si oui, préciser leurs limites.
4. Quels résultats obtiendrait-on si le virus avait été initialement positionné sur le serveur B ?

Partie C - Equation matricielle

On souhaite modéliser la position du virus toutes les semaines plutôt que toutes les quinzaines.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note w_n la probabilité de l'événement "le virus de trouve en A au bout de n semaines" et x_n la probabilité de l'événement "le virus de trouve en B au bout de n semaines". On note également $D_n = \begin{pmatrix} w_n \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Comme dans les parties A et B, M désigne la matrice $M = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$.

1. Quelle relation lie D_{2n} et C_n ?
2. On suppose qu'il existe au moins une matrice $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ à coefficients positifs ou nuls telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ ,D_{n+1} = ND_n$$

   (a) Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (N^2 - M)\, C_n = 0$$

   (b) On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $N^2 - M$.
   Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi)$ et en déduire que $N^2 = M$.

   (c) On pose $\Delta = P^{-1}NP$. Démontrer que $\Delta^2 = D$ et en déduire que Δ est une matrice diagonale et que $p - q$ vérifie une inégalité à préciser. Donner alors toutes les matrices Δ solutions de $\Delta^2 = D$.

   (d) En déduire enfin qu'il existe au plus deux matrices N solutions du problème.

Partie D - Généralisation de l'équation précédente

On souhaite généraliser la recherche précédente et on se pose la question suivante : peut-on affirmer que pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il existe une ou plusieurs matrice(s) $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle(s) que $N^2 = M$?

Dans cette partie, on note $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à M.

1. (a) Démontrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

   (b) Montrer qu'il existe une base $B' = (v_1, v_2)$ de $\mathbb{R}^2$ telle que $\mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Pour la suite des questions, on note $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que, par un raisonnement similaire à celui mené dans la partie A, cela veut dire qu'il existe $Q \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que : $M = QTQ^{-1}$.

2. (a) Résoudre l'équation $\Theta^2 = T$ d'inconnue $\Theta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

   (b) Conclure.