DS n°8 - Concours blanc partie 2 - Correction

Problème

Partie A - Résultats préliminaires

1. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & (x,y) \in \mathrm{Ker}\Big(f-(p-q)\mathrm{id}\Big) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (p-q)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} px + qy = (p-q)x \\ qx + py = (p-q)y \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} qy = -qx \\ qx = -qy \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & x = -y \quad (\text{car } q \neq 0) \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\mathrm{Ker}\Big(f-(p-q)\mathrm{id}\Big) = \mathrm{Vect}(u)$. Or, $u \neq (0,0)$; il constitue donc une famille libre.

Donc $\boxed{(u) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}\Big(f-(p-q)\mathrm{id}\Big).}$

(b) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} & (x,y) \in \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} px + qy = x \\ qx + py = y \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} (p-1)x + qy = 0 \\ qx + (p-1)y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow\ & \begin{cases} (p-1)x + qy = 0 & \\ \Big((p-1)^2 - q^2\Big)y = 0 & (p-1)L_2 - qL_1 \end{cases} \end{aligned}$$

Tout d'abord, cette combinaison est possible car $p-1 \neq 0$.
Ensuite : $(p-1)^2 - q^2 = (-q)^2 - q^2 = 0$.
Donc le système est équivalent à $(p-1)x + qy = 0$, c'est-à-dire $-qx + qy = 0$, c'est-à-dire $x = y$ (car $q \neq 0$).
Ceci prouve que $\mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v)$. Or, $v \neq (0,0)$; il constitue donc une famille libre.

Donc $\boxed{(v) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f-\mathrm{id}).}$

2. B' est une famille constituée de deux vecteurs non colinéaires, donc cette famille est libre.
Ainsi, B' est une famille libre constituée de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2. Donc $\boxed{B' \text{ est une base de } \mathbb{R}^2}$.

De plus, par définition de u et v, $f(u) = (p-q)u$ et $f(v) = v$. D'où : $\boxed{D = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$.

3. (a) $\det(P) = 1 + 1 = 2 \neq 0$ donc $\boxed{P \text{ est inversible}}$. De plus, d'après la formule du cours : $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$.

(b) $\mathrm{id}(u) = u = 1e_1 - 1e_2$ et $\mathrm{id}(v) = v = 1e_1 + 1e_2$.

Ceci prouve que $\boxed{\mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}) = P}$.

De plus, $\mathrm{id}(e_1) = e_1 = \frac{1}{2}(u+v)$ et $\mathrm{id}(e_2) = e_2 = \frac{1}{2}(-u+v)$.

Ceci prouve que $\boxed{\mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id}) = P^{-1}}$

4. On sait que $f = \mathrm{id} \circ f \circ \mathrm{id}$.
D'où : $\mathrm{Mat}_B(f) = \mathrm{Mat}_{B',B}(\mathrm{id}) \times \mathrm{Mat}_{B'}(f) \times \mathrm{Mat}_{B,B'}(\mathrm{id})$.
C'est-à-dire : $\boxed{M = PDP^{-1}}$.

Partie B - Première modélisation

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On note :

   - A_n l'événement : "le virus se trouve en A au bout de $2n$ semaines"
   - B_n l'événement : "le virus se trouve en B au bout de $2n$ semaines"

   D'après la formule des probabilités totales appliquée au S.C.E. (A_n, B_n) :
   $$\begin{aligned} u_{n+1} &= P(A_n)\,P(A_{n+1}\,|\,A_n) + P(B_n)\,P(A_{n+1}\,|\,B_n) \\ &= u_n \times p + v_n \times q \end{aligned}$$
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = p\,u_n + q\,v_n}$

2. (a) Initialement, le virus s'introduit en A donc $\boxed{C_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   D'après la question 1, on sait que $u_{n+1} = p\,u_n + q\,v_n$.
   Par un raisonnement similaire, on obtient également $v_{n+1} = q\,u_n + p\,v_n$. D'où :
   $$\begin{cases} u_{n+1} = p\,u_n + q\,v_n \\ v_{n+1} = q\,u_n + p\,v_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$
   C'est-à-dire : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = MC_n}$.

   (c) On reconnaît une suite géométrique.
   On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ C_n = M^n\,C_0}$.

3. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On commence par calculer M^n :
   $$M^n = \left(PDP^{-1}\right)^n = \underbrace{(PDP^{-1})\,(PDP^{-1})\,\ldots\,(PDP^{-1})}_{n \text{ fois}} = PD^nP^{-1}$$
   $$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} &= C_n \\ &= PD^nP^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p-q)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p-q)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (p-q)^n \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
   On en déduit que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{(p-q)^n + 1}{2} \text{ et } v_n = \dfrac{-(p-q)^n + 1}{2}}$.

   (b) $0 < p < 1$ et $-1 < -q < 0$ donc $-1 < p - q < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (p-q)^n = 0$
   $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ convergent avec } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}}$

4. Par symétrie des rôles de A et B, on obtiendrait :
   $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{-(p-q)^n + 1}{2} \text{ et } v_n = \dfrac{(p-q)^n + 1}{2} \text{ et donc } \lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \dfrac{1}{2}}$

Partie C - Equation matricielle

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par définition des probabilités w_{2n}, x_{2n}, u_n et v_n, on a $\begin{pmatrix} w_{2n} \\ x_{2n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

   $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}\,,\ D_{2n} = C_n}$

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $(N^2 - M)\, C_n \ = \ N^2\, C_n - M\, C_n \ = \ N^2\, C_n - C_{n+1}$ (question B2b)
   Or : $N^2\, C_n = \ N^2\, D_{2n} \ = \ N\, D_{2n+1} \ = \ D_{2n+2} \ = \ C_{n+1}$ (question C1 et hypothèse de la question C2)
   Il reste donc : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\,,\ (N^2 - M)\, C_n = 0}$.

   (b) D'après la question 2a, $(N^2 - M)\, C_0 = 0$ donc $(1, 0) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.
   De même, en considérant C_1, on apprend que $(p, q) \in \operatorname{Ker}(\varphi)$.
   Or, la famille $\big((1,0),(p,q)\big)$ est une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc une famille libre. C'est donc une famille libre constituée de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^2$.
   On en déduit que $\operatorname{Ker}(\varphi)$ contient une base de $\mathbb{R}^2$ et donc $\boxed{\operatorname{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^2}$.
   Ceci implique que φ est l'endomorphisme nul de $\mathbb{R}^2$, et donc sa matrice dans B est la matrice nulle.
   Ainsi, $N^2 - M = 0_2$. C'est-à-dire : $\boxed{N^2 = M}$.

   (c) On calcule : $\Delta^2 \ = \ P^{-1}NP\,P^{-1}NP \ = \ P^{-1}N^2P \ = \ P^{-1}MP \ = \ D$
   Ainsi $\boxed{\Delta^2 = D}$
   On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec a, b, c, d des coefficients réels à déterminer.

   $$\Delta^2 = D \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p-q & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc &= p-q \\ c(a+d) &= 0 \\ b(a+d) &= 0 \\ bc+d^2 &= 1 \end{cases}$$

   Or :

   - On suppose que $a + d = 0$, c'est-à-dire $a = -d$.
     Donc L_1 devient $a^2 + bc = p - q$ et L_4 devient $bc + a^2 = 1$, d'où l'on déduit que $p - q = 1$.
     Or, par définition, $q = 1 - p$ et donc $p - q = p - (1 - p) = 2p - 1$.
     Ainsi, on aurait : $2p - 1 = 1 \ \Leftrightarrow\ p = 1$, ce qui est faux.
   - Ainsi, $a + d \neq 0$ et on peut terminer la résolution du système :
     $$\Delta^2 = D \Leftrightarrow \begin{cases} c &= 0 \\ b &= 0 \\ a^2 &= p-q \\ d^2 &= 1 \end{cases}$$

   Comme on a supposé pour la question 2 qu'il existe au moins une matrice N solution, on en déduit que $\boxed{p - q \geqslant 0}$.
   Par ailleurs, on a aussi obtenu que $\boxed{\Delta \text{ est diagonale}}$.
   Enfin :
   $$\boxed{\text{L'équation } \Delta^2 = D \text{ a 4 solutions qui sont : } \begin{pmatrix} \sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sqrt{p-q} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

   (d) $\Delta = P^{-1}NP$ donc $N = P\Delta P^{-1}$.
   On note $\Delta = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ l'une des matrices obtenues à la fin de la question précédente et on calcule :
   $$N \ = \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \ = \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -a \\ d & d \end{pmatrix} \ = \ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a+d & d-a \\ d-a & a+d \end{pmatrix}$$
   Parmi ces matrices, on veut conserver seulement celles à coefficients positifs ou nuls.

   - la condition $a + d \geqslant 0$ élimine la matrice où $a = -\sqrt{p-q}$ et $d = -1$
   - la condition $d - a \geqslant 0$ élimine la matrice où $d = -1$ et $a = \sqrt{p-q}$

   Et donc $\boxed{\text{il existe au plus deux matrices } N \text{ solutions du problème}}$.

Partie D - Généralisation de l'équation précédente

1. (a) Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$(x,y) \in \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} -x & + & y & = & 0 \\ -x & + & y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\Big((1,1)\Big)$

Par ailleurs :

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\Big(f(e_1), f(e_2)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((-1,-1),(1,1)\Big) = \mathrm{Vect}\Big((1,1)\Big)$

C'est-à-dire : $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)}$.

(b) On pose $v_1 = (1,1)$ et $v_2 = e_2 = (0,1)$.

D'une part, la famille B' est alors libre parce que composée de deux vecteurs non colinéaires.

Ainsi, B' est une famille libre de deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2 donc B' est une base de $\mathbb{R}^2$.

De plus, $f(v_1) = (0,0) = 0v_1 + 0v_2$ et $f(v_2) = f(e_2) = v_1 = 1v_1 + 0v_2$.

Donc la matrice de f dans la base B' est bien $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\boxed{\text{Il existe une base } B' \text{ de } \mathbb{R}^2 \text{ telle que } \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

2. (a) On pose $\Theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ et on résout :

$$\Theta^2 = T \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a^2+bc & = & 0 \\ c(a+d) & = & 0 \\ b(a+d) & = & 1 \\ bc+d^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

Or : d'après L_3, $a+d \neq 0$, et donc $L_2 \Leftrightarrow c = 0$.

$$\text{D'où : } \Theta^2 = T \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a^2+bc & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b(a+d) & = & 1 \\ d^2 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} a & = & 0 \\ c & = & 0 \\ b(a+d) & = & 1 \\ d & = & 0 \end{array}\right.$$

Dans ce système, les lignes L_1, L_4 et L_3 sont en contradictions les unes avec les autres.

Donc le système n'a pas de solution.

$$\boxed{\text{L'équation } \Theta^2 = T \text{ d'inconnue } \Theta \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ n'a pas de solution.}}$$

(b) On suppose qu'il existe $N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $N^2 = M$. Dans ce cas :

$N^2 = M \Leftrightarrow N^2 = QTQ^{-1} \Leftrightarrow Q^{-1}N^2Q = T \Leftrightarrow (Q^{-1}NQ)^2 = T$.

Or, d'après la question précédente, ceci est impossible.

$$\boxed{\text{Pour une matrice } M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{, il n'existe pas toujours de matrice } N \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } N^2 = M.}$$