DS n°8 - Concours blanc partie 1 - Correction

Exercice 1

1. X compte le nombre de succès ("observer un A") au cours de $2n$ tentatives identiques et indépendantes.
   Donc $\boxed{X \text{ suit une loi binomiale de paramètres } 2n \text{ et } p}$. On en déduit que $\boxed{E(X) = 2np}$ et $\boxed{V(X) = 2np(1-p)}$.

2. (a) Tout d'abord, Y prend ses valeurs dans $[\![1, 2n+1]\!]$.
   On définit les événements :
   - A_k : "obtenir un A au $k^{\text{ème}}$ lancer"
   - B_k : "obtenir un B au $k^{\text{ème}}$ lancer"

   On fixe $k \in [\![1, 2n]\!]$.
   $$\begin{aligned} P(Y=k) &= P\Big(B_1 \cap \cdots \cap B_{k-1} \cap A_k\Big) \\ &= P(B_1) \dots P(B_{k-1}) P(A_k) \qquad \text{(par indépendance)} \\ &= p\,(1-p)^{k-1} \end{aligned}$$
   Par ailleurs :
   $$P(Y = 2n+1) = P\Big(B_1 \cap \cdots \cap B_{2n}\Big) = (1-p)^{2n} \text{ (par indépendance)}$$
   $\boxed{\text{La loi de } Y \text{ est donné par : } \forall k \in [\![1, 2n]\!],\ P(Y=k) = p\,(1-p)^{k-1} \text{ et } P(Y = 2n+1) = (1-p)^{2n}}$

   (b) i. Soit $x \in]0, 1[$. Comme $x \neq 1$, on peut appliquer la formule de somme géométrique.
   $$F_N(x) = \sum_{k=0}^{N} x^k = \frac{1 - x^{N+1}}{1-x}$$
   $$\boxed{\text{Pour tout } x \in]0,1[,\ F_N(x) = \frac{1-x^{N+1}}{1-x}}\ .$$

   ii. Par les théorèmes opératoires, F_N est dérivable sur $]0, 1[$.
   Soit $x \in]0, 1[$. D'une part, $F_N'(x) = f_N(x)$ et d'autre part :
   $$\begin{aligned} F_N'(x) &= \frac{-(N+1)\,x^N\,(1-x) - (1-x^{N+1}) \times (-1)}{(1-x)^2} \\ &= \frac{-(N+1)x^N + (N+1)x^{N+1} + 1 - x^{N+1}}{(1-x)^2} \\ &= \frac{1 + N\,x^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2} \end{aligned}$$
   $$\boxed{\forall x \in]0,1[,\ f_N(x) = \frac{1 + Nx^{N+1} - (N+1)x^N}{(1-x)^2}}$$

   iii. On calcule :
   $$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=1}^{2n+1} k\,P(Y=k) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{2n} k\,p(1-p)^{k-1}\right) + (2n+1)(1-p)^{2n} \\ &= (1-q) \times f_{2n}(q) + (2n+1)\,q^{2n} \\ &= (1-q) \times \frac{1 + 2n\,q^{2n+1} - (2n+1)q^{2n}}{(1-q)^2} + (2n+1)\,q^{2n} \\ &= \frac{1 + 2n\,q^{2n+1} - (2n+1)\,q^{2n} + (2n+1)\,q^{2n}\,(1-q)}{1-q} \\ &= \frac{1 - q^{2n+1}}{1-q} \end{aligned}$$
   $$\boxed{E(Y) = \frac{1 - q^{2n+1}}{1-q}}$$

3. (a) i. Pour Z_1, $n = 1$. On joue donc jusqu'à ce qu'on observe une fois la lettre A ou une fois la lettre B. Ainsi, dans tous les cas, dès qu'on a lancé le jeton une fois l'expérience est terminée. Et, dans tous les cas, la lettre perdante n'est pas apparue.

$\boxed{Z_1 \text{ suit une loi certaine égale à } 0.}$

ii. Pour Z_2, $n = 2$. On joue donc jusqu'à ce qu'on observe 2 fois la lettre A ou 2 fois la lettre B.

Z_2 ne prend ainsi que deux valeurs : 0 et 1. Z_2 suit donc une loi de Bernoulli.

On détermine son paramètre en calculant $P(Z_2 = 1)$.

$$\begin{aligned}
P(Z_2 = 1) &= P\Big((A_1 \cap B_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup (B_1 \cap A_2 \cap B_3) \cup (A_1 \cap B_2 \cap B_3) \Big) \\
&= P(A_1 \cap B_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap A_3) + P(B_1 \cap A_2 \cap B_3) + P(A_1 \cap B_2 \cap B_3) \quad \text{(incompatibilité)} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \text{(indépendance)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$\boxed{Z_2 \text{ suit une loi de Bernoulli de paramètre } \frac{1}{2}.}$

(b) Pour Z_n, on joue jusqu'à obtenir n fois la lettre gagnant. Au minimum, on a obtenu 0 fois la lettre perdante et au maximum on l'a obtenue $n - 1$ fois. Entre les deux, toutes les valeurs entières sont possibles.

$\boxed{Z_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]}$.

(c) i. On raisonne par des arguments de dénombrement. Au total, il y a 2^{i+j} séries de taille $i + j$ (pour chaque position, il faut choisir entre A et B).

Parmi ces séries, pour en construire une qui contient i fois la lettre A, il faut choisir les positions des A ; il y a $\binom{i+j}{i}$ façons de le faire. Les B n'ont alors plus le choix.

Ainsi, $\boxed{P(E_{i,j}) = \dfrac{\binom{i+j}{i}}{2^{i+j}}}$.

Par un raisonnement similaire, $P(E_{j,i}) = \binom{i+j}{j} \times \dfrac{1}{2^{i+j}}$.

Enfin, par symétrie des coefficients binomiaux, $\binom{i+j}{j} = \binom{i+j}{i}$, ce qui prouve que $\boxed{P(E_{j,i}) = P(E_{i,j})}$.

ii. Pour obtenir $(Z_n = k)$, il y a deux façons :

- 1ère façon : sur tous les résultats précédents, on avait obtenu $n - 1$ fois la lettre A et k fois la lettre B, et ensuite au $(n + k)^{\text{ème}}$ lancer on obtient un A
- 2ème façon : la même chose mais en échangeant les rôles de A et B

On en déduit que $\boxed{(Z_n = k) = \Big(E_{n-1,k} \cap A_{n+k}\Big) \cup \Big(E_{k,n-1} \cap B_{n+k}\Big)}$.

Cette union est disjointe, d'où :

$$\begin{aligned}
P(Z_n = k) &= P(\, E_{n-1,k} \cap A_{n+k}\,) + P(\, E_{k,n-1} \cap B_{n+k}\,) \\
&= P(E_{n-1,k})\, P(A_{n+k}) + P(E_{k,n-1})\, P(B_{n+k}) \quad \text{(par indépendance)} \\
&= \binom{n-1+k}{k} \frac{1}{2^{n-1+k}} \times \frac{1}{2} + \binom{n-1+k}{k} \frac{1}{2^{n-1+k}} \times \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

C'est-à-dire $\boxed{P(Z_n = k) = \dfrac{\binom{n-1+k}{k}}{2^{n-1+k}}}$

Exercice 2

1. (a) • Pour (S_n)

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!}$$

Ainsi, $S_{n+1} - S_n \geqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{(S_n) \text{ est croissante}}$.

• Pour (R_n)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} R_{n+1} - R_n &= \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} + \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \frac{1}{n\,(n!)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{1}{(n+1)\,(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n\,(n!)} \\ &= \frac{n + n(n+1) - (n+1)(n+1)}{n(n+1)\,(n+1)!} \\ &= \frac{-1}{n(n+1)\,(n+1)!} \end{aligned}$$

Ainsi, $R_{n+1} - R_n \leqslant 0$, ce qui prouve que $\boxed{(R_n) \text{ est décroissante}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$R_n - S_n = \frac{1}{n\,(n!)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ceci associé à la question 1 prouve que les suites (R_n) et (S_n) sont adjacentes.

Donc $\boxed{(S_n) \text{ et } (R_n) \text{ convergent et ont une même limite}}$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$g_1(x) = f_1(x)e^{-x} = \Big(\sum_{k=0}^{1} \frac{x^k}{k!}\Big)e^{-x} = (1+x)e^{-x}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R},\ g_1(x) = (1+x)e^{-x}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$g_n(0) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{0^k}{k!}\Big)e^{-0} = 1$$

$$g_n(1) = \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{1^k}{k!}\Big)e^{-1} = S_n e^{-1}$$

$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ g_n(0) = 1 \text{ et } g_n(1) = S_n e^{-1}}$.

(c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par les théorèmes opératoires, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f_n(x) &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} \\ f_n'(x) &= 0 + 1 + \frac{2x}{2!} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{n!} \\ &= 1 + x + \dots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ f_n'(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!}}$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$. Par les théorèmes opératoires, g_n est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} g_n'(x) &= f_n'(x)e^{-x} - f_n(x)e^{-x} \\ &= \Big(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\Big)e^{-x} \\ &= -\frac{x^n}{n!}e^{-x} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ et tout } n \in \mathbb{N},\ g_n'(x) = \frac{-x^n e^{-x}}{n!}}.$$

(e) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{n!}\,dx = \frac{1}{n!}\Big[e^{-x}\Big]_0^1 = \frac{1}{n!}\Big(e^{-1}-1\Big)$$

$$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ \int_0^1 \frac{-e^{-x}}{n!}\,dx = \frac{e^{-1}-1}{n!}}.$$

ii. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$. On encadre :

$$\begin{array}{lccccl}
 & 0 & \leqslant & x & \leqslant 1 & \\
\Rightarrow & 0 & \leqslant & x^n & \leqslant & 1 \\
\Rightarrow & -1 & \leqslant & -x^n & \leqslant & 0 \\
\Rightarrow & \dfrac{-e^{-x}}{n!} & \leqslant & \dfrac{-x^n e^{-x}}{n!} & \leqslant & 0 \quad \text{(par stricte positivité de exponentielle et de la factorielle)} \\
\Rightarrow & \displaystyle\int_0^1 \frac{-e^{-x}}{n!}\,dx & \leqslant & \displaystyle\int_0^1 \frac{-x^n e^{-x}}{n!}\,dx & \leqslant & 0 \quad \text{(par croissance de l'intégrale)}
\end{array}$$

Ceci devient : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \dfrac{e^{-1}-1}{n!} \leqslant \displaystyle\int_0^1 g_n'(x)\,dx \leqslant 0}$.

(f) Soit $n \in \mathbb{N}$. On calcule :

$$\int_0^1 g_n'(x)\,dx = \Big[g_n(x)\Big]_0^1 = g_n(1) - g_n(0) = S_n e^{-1} - 1$$

D'où, en combinant avec le résultat précédent : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \dfrac{e^{-1}-1}{n!} \leqslant S_n e^{-1} - 1\,dx \leqslant 0}$.

(g) D'après le théorème des gendarmes et la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n e^{-1} - 1 = 0$.

Ceci se transforme en $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n e^{-1} = 1$, c'est-à-dire $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = e^1}$.

Exercice 3

1. Soit $p \in \mathbb{N}$.

$$I_{p,0} = \int_0^1 x^p \, dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1}\right]_0^1 = \frac{1}{p+1}$$

$$\boxed{\forall p \in \mathbb{N}\,,\ I_{p,0} = \frac{1}{p+1}}$$

2. Soit $q \in \mathbb{N}$.

$$I_{0,q} = \int_0^1 (1-x)^q \, dx = \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\right]_0^1 = \frac{1}{q+1}$$

$$\boxed{\forall q \in \mathbb{N}\,,\ I_{0,q} = \frac{1}{q+1}}$$

3. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $q \in \mathbb{N}$.

On pose : $\begin{cases} u'(x) = (1-x)^q & u(x) = -\dfrac{(1-x)^{q+1}}{q+1} \\ v(x) = x^p & v'(x) = px^{p-1} \end{cases}$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. D'où, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} I_{p,q} &= \left[-\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\, x^p\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{(1-x)^{q+1}}{q+1}\, px^{p-1} \, dx \\ &= 0 + \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1} \end{aligned}$$

$$\boxed{\forall (p,q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}\,,\ I_{p,q} = \frac{p}{q+1} I_{p-1,q+1}}$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} I_{n,n} &= \frac{n}{n+1}\, I_{n-1,n+1} \\ &= \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\, I_{n-2,n+2} \\ &= \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\,\frac{n-2}{n+3}\, I_{n-3,n+3} \\ &= \dots \\ &= \frac{n}{n+1}\,\frac{n-1}{n+2}\,\frac{n-2}{n+3}\,\cdots\,\frac{1}{2n} I_{0,2n} \\ &= \frac{(n\,!)^2}{(2n)\,!}\,\frac{1}{2n+1} \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_{n,n} = \dfrac{(n\,!)^2}{(2n+1)\,!}}$.