Concours blanc - Mathématiques - Partie 2

Mercredi 31 mai 2023 - Durée : 2h

*L'usage de la calculatrice est **autorisé**.*
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Problème

Dans tout ce problème, tout vecteur de $\mathbb{R}^3$ sera assimilé à une matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ de sorte que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$, le produit matriciel AX soit correctement défini.

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On dit qu'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^3$ est ***stable*** par la matrice A si :

$$\forall X \in F,\ AX \in F$$

On rappelle que l'on appelle ***droite vectorielle*** tout espace vectoriel de dimension 1 et ***plan vectoriel*** tout espace vectoriel de dimension 2.

Partie A - Contexte

Soit a, b, c des réels. On considère une suite (u_n) telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = au_{n+2} + bu_{n+1} + cu_n$$

Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par convention, $A^0 = I_3$

Partie B - Premier exemple

On suppose dans cette partie que $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

On définit également $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $U_{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. f est-il injectif ? surjectif ? bijectif ?
2. (a) Justifier que $B = (U_1, U_{-1}, U_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer $D = \mathrm{Mat}_B(f)$.
   (c) En notant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calculer PDP^{-1} .
3. Prouver qu'il existe trois matrices R_1, R_2 et R_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que, pour tout entier naturel n, on ait :

$$A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$$

   On ne demande pas de calculer explicitement ces matrices.
4. Soit (u_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

   Prouver qu'il existe des constantes α, β et γ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n$$

   On ne demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.

Partie C - Deuxième exemple

On suppose dans cette partie que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On pose $U = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Montrer que la droite vectorielle Δ engendrée par le vecteur U est stable par A.
2. On pose $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   (a) Prouver que l'espace vectoriel engendré par les vecteurs V et AV est un plan vectoriel. On le notera φ.
   (b) Prouver que le vecteur $A^2 V$ appartient au plan φ.
   (c) En déduire que le plan φ est stable par la matrice A.

Partie D - Résultats sur les droites et plans stables par une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

Dans cette partie, on considère $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice quelconque.

1. Soit Δ une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ dirigée par un vecteur non nul U.
   Démontrer que la droite vectorielle Δ est stable par A si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $A\,U = \lambda\,U$.
2. Soit φ un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. On considère (U_1, U_2) une base de φ et U_3 un vecteur non nul normal à φ.
   (a) Montre que le plan φ est stable par A si et seulement si les vecteurs $A\,U_1$ et $A\,U_2$ appartiennent à φ.
   (b) On admettra le résultat suivant :
   "le vecteur $A\,U_1$ appartient au plan φ si et seulement si U_1 et $(A^T)\,U_3$ sont orthogonaux" .
   En déduire que le plan φ est stable par A si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(A^T)\,U_3 = \lambda\,U_3$.

Partie E - Fin du second exemple

On suppose de nouveau dans cette question que $A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation (E_λ) : $AX = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.
   Démontrer que (E_λ) a des solutions différentes du vecteur nul si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.
   (b) Déterminer les droites vectorielles stables par la matrice A.
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère l'équation (F_λ) : $(A^T)X = \lambda X$ d'inconnue $X \in \mathbb{R}^3$.
   On admettra le résultat suivant :
   "(F_λ) a des solutions différentes du vecteur nul si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$" .
   Déterminer les équations de plans vectoriels stables par la matrice A.
3. En déduire une base $B = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ telle que :
   - le vecteur e_1 vérifie : $Ae_1 = 2e_1$
   - la droite engendrée par e_2 soit stable par la matrice A
   - le plan engendré par e_2 et e_3 soit stable par la matrice A
4. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.
   (a) Déterminer la matrice de f dans la base B.
   On admettra le résultat suivant :
   "il existe alors une matrice inversible P telle que $A = PTP^{-1}$ en notant $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$" .
   (b) Déterminer T^n pour tout entier naturel n.
5. En déduire que si une suite (u_n) vérifie :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$$
   alors il existe des constantes α, β et γ telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha\,2^n + \beta + \gamma\,n$$
   On de demande pas d'expliciter les constantes α, β et γ.