

DS n°8 - Concours blanc partie 2 - Correction**Problème****Partie A - Contexte**

Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au_{n+1} + bu_{n+1} + cu_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

On reconnaît une suite géométrique de raison A .

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}.$

Partie B - Premier exemple

1. Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

$$U \in \text{Ker}(f) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 0$$

Donc $\text{Ker}(f) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ donc f est injectif.

De plus, f est un endomorphisme, donc f est surjectif et f est bijectif.

2. (a) • Liberté

On résout :

$$\begin{aligned} & \alpha U_1 + \beta U_{-1} + \gamma U_2 = 0_{\mathbb{R}^3} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \alpha + \beta + 4\gamma = 0 \\ 2\beta + 2\gamma = 0 & L_1 - L_2 \\ 3\gamma = 0 & L_1 - L_3 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \gamma = \beta = \alpha = 0 \end{aligned}$$

Donc la famille est libre.

• Conclusion

B est une famille libre constituée de 3 vecteurs, dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Donc B est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) On calcule : $f(U_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = U_1$ $f(U_{-1}) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -U_{-1}$ $f(U_2) = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = 2U_2$

D'où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(c) D'après la calculatrice, $PDP^{-1} = A$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$A^n = \underbrace{(PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1})}_{n \text{ fois}}$$

$$= PD^n P^{-1}$$

$$= P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1} \quad (D \text{ est diagonale})$$

$$= P \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + 2^n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] P^{-1}$$

$$= \underbrace{P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{R_1} + \underbrace{(-1)^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{R_2} + \underbrace{2^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}}_{R_3}$$

Il existe trois matrices R_1 , R_2 et R_3 de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la partie A et la question B3, on :

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \left(R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3 \right) \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit le résultat voulu en calculant la dernière ligne.

Il existe des constantes α , β et γ telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma(-1)^n$.

Partie C - Deuxième exemple

1. Soit $X \in \Delta = \text{Vect}(\mathbf{U})$.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $X = \lambda \mathbf{U}$. On calcule alors :

$$AX = A\lambda\mathbf{U} = \lambda A\mathbf{U} = \lambda \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \times 2\mathbf{U} = (2\lambda)\mathbf{U}$$

Ceci prouve que $AX \in \Delta$ et donc Δ est stable par A .

2. (a) $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $AV = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires (se voit grâce aux 0) et donc comme il y a *deux* vecteurs, cela prouve qu'ils forment une famille libre.

Donc V et AV engendrent un espace vectoriel de dimension 2, c'est-à-dire un plan vectoriel.

L'espace vectoriel engendré par V et AV est un plan vectoriel.

- (b) On calcule :

$$A^2V = A \times (AV) = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \times \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -2V + 3AV$$

Ceci prouve que $A^2V \in \text{Vect}(V, AV)$, c'est-à-dire A^2V appartient au plan φ .

- (c) Soit $X \in \varphi = \text{Vect}(V, AV)$.

Ainsi, il existe λ et μ réels tels que $X = \lambda V + \mu AV$. On calcule alors :

$$AX = A(\lambda V + \mu AV) = \lambda AV + \mu A^2V$$

Ceci prouve que AX est une combinaison linéaire de deux éléments de φ , et donc $AX \in \varphi$.

C'est ce qu'on voulait. Donc φ est stable par A .

Partie D - Résultats sur les droites et plans stables par une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

1. On raisonne par double implications.

- Sens direct : on suppose que Δ est stable par A .
Comme $U \in \Delta$, on a donc $AU \in \Delta$.
Or, $\Delta = \text{Vect}(U)$.
Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AU = \lambda U$.
- Sens réciproque : on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AU = \lambda U$.
Soit $X \in \Delta = \text{Vect}(U)$.
Ainsi, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $X = \mu U$.
D'où : $AX = A\mu U = \mu AU = \mu \lambda U \in \text{Vect}(U) = \Delta$.
Donc Δ est stable par A .

La droite vectorielle Δ est stable par A si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $AU = \lambda U$.

2. (a) On raisonne par double implications.

- Sens direct : on suppose que le plan φ est stable par A .
Comme $U_1 \in \varphi$, par stabilité, on déduit que $AU_1 \in \varphi$.
De même pour U_2 .
- Sens réciproque : on suppose que les vecteurs AU_1 et AU_2 appartiennent à φ .
Soit $X \in \varphi = \text{Vect}(U_1, U_2)$.
Ainsi, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $X = \alpha U_1 + \beta U_2$.
D'où : $AX = A(\alpha U_1 + \beta U_2) = \alpha AU_1 + \beta AU_2$.
 X est donc une combinaison linéaire d'éléments de φ , et donc $X \in \varphi$.
Ceci prouve que φ est stable par A .

Le plan φ est stable par A si et seulement si les vecteurs AU_1 et AU_2 appartiennent à φ .

(b) On raisonne par double implications.

- Sens direct : on suppose que le plan φ est stable par A .
Dans ce cas, d'après la question D2a, AU_1 appartient à φ .
D'après le résultat admis, cela prouve que U_1 et $(A^T)U_3$ sont orthogonaux.
Or, puisque U_3 est un vecteur normal à φ non nul, cela prouve que $(A^T)U_3 \in \text{Vect}(U_3)$.
Donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(A^T)U_3 = \lambda U_3$.
- Sens réciproque : on suppose qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(A^T)U_3 = \lambda U_3$.
Dans ce cas, cela prouve que $(A^T)U_3$ est un vecteur normal à φ , et donc nécessairement U_1 et $(A^T)U_3$ sont orthogonaux.
D'après le résultat admis, cela prouve que $AU_1 \in \varphi$.
De même, $AU_2 \in \varphi$.
Et donc d'après D2a on en déduit que φ est stable par A .

Le plan φ est stable par A si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(A^T)U_3 = \lambda U_3$.

Partie E - Fin du second exemple

1. (a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On résout :

$$(E_\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 5y + 2z = \lambda x \\ x = \lambda y \\ y = \lambda z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4\lambda^2 - 5\lambda + 2 - \lambda^3)z = 0 \\ x = \lambda^2 z \\ y = \lambda z \end{cases}$$

On résout par ailleurs :

$$\begin{aligned} 4\lambda^2 - 5\lambda + 2 - \lambda^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) &= 0 \quad (\text{racine évidente}) \\ \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 2) &= 0 \end{aligned}$$

On en déduit que :

- Si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$, alors la première ligne du système devient $0 = 0$ et le système a une infinité de solutions.
- Sinon, le système a pour unique solution $z = x = y = 0$

(E_λ) a des solutions différentes du vecteur nul si et seulement si $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$.

- (b) En combinant les réponses D1 et E1a, la question revient à finir de résoudre (E_1) et (E_2) .

- Pour (E_1)

$$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x & 0 & = & 0 \\ & y & = & y \\ & & = & z \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z$$

- Pour (E_2)

$$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x & 0 & = & 0 \\ & y & = & 2y \\ & & = & 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4z \\ y = 2z \\ z = z \end{cases}$$

Les droites vectorielles stables par A sont $D_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $D_2 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

2. Comme précédemment, on commence par résoudre F_1 et F_2 :

- Pour (F_1)

$$(F_1) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + z = x \\ -5x + z = y \\ 2x = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 0 \\ -5x - y + z = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -3x \\ z = 2x \end{cases}$$

- Pour (F_2)

$$(F_2) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y + z = 2x \\ -5x + z = 2y \\ 2x = 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ -5x - 2y + z = 0 \\ 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = -2x \\ z = x \end{cases}$$

D'après D2b et le résultat admis, on en déduit que A a exactement deux plans stables :

- φ_1 qui a pour vecteur normal $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et donc pour équation $x - 3y + 2z = 0$
- φ_2 qui a pour vecteur normal $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc pour équation $x - 2y + z = 0$

A a exactement deux plans stables, qui ont pour équations respectives $x - 3y + 2z = 0$ et $x - 2y + z = 0$.

3. En s'aidant des questions précédentes, on pose : $e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Vérifions que ces vecteurs conviennent :

- D'après E1b, e_1 est solution de (E_2) donc $Ae_1 = 2e_1$
- D'après E1b, la droite vectorielle engendrée par e_2 est stable par A .
- Les produits scalaires $e_2 \cdot v_2$ et $e_3 \cdot v_2$ sont nuls donc $e_2 \in \varphi_2$ et $e_3 \in \varphi_2$.
De plus, e_2 et e_3 sont libres ; ils engendrent donc φ_2 qui est un plan stable par A .
- Reste à démontrer que B est alors une base.

$$\text{rg}(e_1, e_2, e_3) = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{rg} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

Ceci prouve que B est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.

De plus, B est constituée de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Donc B est une base de $\mathbb{R}^3$.

En posant $e_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, la famille B convient.

4. (a) On calcule : $f(e_1) = 2e_1$ $f(e_2) = e_2$ $f(e_3) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e_2 + e_3$

La matrice demandée est $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Après calculs au brouillon, on conjecture que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On le démontre par récurrence.

- Initialisation : pour $n = 0$.

$$\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3 = T^0$$

- Hérédité : on suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$T^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

C'est ce qu'on voulait.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = P T^n P^{-1} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

$$= \left[2^n P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} + n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} \right] \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}$$

On en déduit le résultat voulu en calculant la dernière ligne.

Il existe des constantes α , β et γ telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha 2^n + \beta + \gamma n$