Concours Blanc - Mathématiques - Partie 2

Mercredi 4 juin 2025 - Durée : 2h

L'usage de la calculatrice est interdit.
Toute réponse doit être justifiée. La qualité de la rédaction et du raisonnement est prise en compte dans la notation.
Toute réponse doit être encadrée. Une réponse non encadrée ne sera pas prise en compte.
Une copie mal présentée sera lourdement sanctionnée.

Exercice

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie (pas forcément équilibrée). On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$. On admet que les lancers sont mutuellement indépendants.

Pour tout entier naturel k non nul, on note :

- P_k l'événement "on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer"
- F_k l'événement "on obtient face au $k^{\text{ème}}$ lancer"

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement "deux piles consécutifs apparaissent pour la première fois aux lancers numéros n et $n+1$" et on note a_n sa probabilité.

Partie A - Résultats préliminaires

On considère la fonction polynomiale f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x^2 - qx - pq$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux solutions réelles distinctes.
   Pour toute la suite, on notera r_1 et r_2 ces solutions, avec $r_1 < r_2$.
2. Exprimer $r_1 + r_2$ et $r_1 r_2$ en fonction de p et q.
3. Calculer $f(1)$, $f(-1)$ et $f(0)$. Préciser le signe de chacune de ces quantités.
4. Montrer que :
$$-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$$
5. Montrer que :
$$|r_1| < |r_2| < 1$$

Partie B - Nombre de pile dans les 3 premiers lancers

Dans cette partie, on fixe $n = 3$.
Pour tout $k \in [\![1, 3]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si le $k^{\text{ème}}$ lancer donne pile et 0 sinon.
Enfin, on note $S = X_1 + X_2 + X_3$.

Déterminer la loi de S ainsi que son espérance.

Partie C - Equivalent de a_n quand n tend vers l'infini

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
2. (a) Expliquer pourquoi $P_{F_1}(A_{n+2}) = a_{n+1}$ et $P_{P_1}(A_{n+2}) = qa_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) Démontrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ a_{n+2} = qa_{n+1} + pqa_n$$
   (c) Quelle valeur doit-on attribuer à a_0 si on veut que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie cette relation de récurrence ?
3. (a) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}(r_2^n - r_1^n)$$
   (b) Déterminer la limite de la suite (a_n).
   (c) Donner un équivalent simple de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie D - Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle

On définit les matrices M et P par :

$$M = \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

On définit également, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice colonne X_n par :

$$X_n = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix}$$

On note enfin I la matrice identité de taille 2.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de M et X_n.
2. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. Expliciter la matrice $D = P^{-1}MP$.
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}M^nP$.
5. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = PD^nP^{-1}X_0$.
6. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_2, r_1, p et n.

Partie E - Etude de la probabilité de ne jamais obtenir un double pile

1. Exprimer $(1 - r_2)(1 - r_1)$ en fonction de p.
2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $S_N = \sum_{k=1}^{N} P(A_k)$ en fonction de p, r_1 et r_2.
3. Calculer $\lim_{N\to+\infty} S_N$.
4. Que peut-on en déduire ?