

Concours Blanc - Mathématiques Partie 1 - Correction

Exercice 1

1. • Equation caractéristique

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est : $x^2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{9} \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$

Pour cette équation, $\Delta = 36 - 36 = 0$. Il y a donc une seule solution qui est $\frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

• Conclusion

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y & : & \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ t & \mapsto & (K_1 t + K_2) e^{\frac{t}{3}} \end{array} \quad \middle| \quad K_1, K_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

2. (a) Tout d'abord, par les théorèmes opératoires sur les fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

On va démontrer par récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n) e^{\frac{t}{3}}$.

• Initialisation : pour $n = 0$

$\varphi^{(0)} = \varphi$ est de la forme voulue en posant $a_0 = a$ et $b_0 = b$.

• Hérédité

On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que $\varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n) e^{\frac{t}{3}}$.

Soit $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^{(n+1)}(t) = a_n e^{\frac{t}{3}} + \frac{1}{3} (a_n t + b_n) e^{\frac{t}{3}} = \left[\frac{1}{3} a_n t + \left(a_n + \frac{1}{3} b_n \right) \right] e^{\frac{t}{3}}$$

$\varphi^{(n+1)}$ est donc de la forme voulue en posant $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$ et $b_{n+1} = a_n + \frac{1}{3} b_n$.

Il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)} : t \mapsto (a_n t + b_n) e^{\frac{t}{3}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{3} b_{n+1} = \frac{1}{3} a_n + \frac{1}{3} \left(a_n + \frac{1}{3} b_n \right) = \frac{2}{3} a_n + \frac{1}{9} b_n = \frac{2}{3} \left(b_{n+1} - \frac{1}{3} b_n \right) + \frac{1}{9} b_n = \frac{2}{3} b_{n+1} - \frac{1}{9} b_n$$

(b_n) satisfait donc la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_{n+2} = \frac{2}{3} b_{n+1} - \frac{1}{9} b_n$

(c) Tout d'abord, d'après 2a, (a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $a_0 = a$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n a$.

• Equation caractéristique de (b_n)

L'équation caractéristique de (b_n) est la même que celle de l'équation différentielle de la question 1.

Ainsi, l'unique solution est $\frac{1}{3}$.

• Terme général de (b_n)

Il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (\lambda n + \mu) \left(\frac{1}{3}\right)^n$

• Constantes

Pour déterminer λ et μ on résout :

$$\begin{cases} b_0 = b \\ b_1 = a + \frac{1}{3}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = b \\ \frac{1}{3}(\lambda + \mu) = a + \frac{1}{3}b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = b \\ \lambda = 3a \end{cases}$$

• Conclusion pour (b_n)

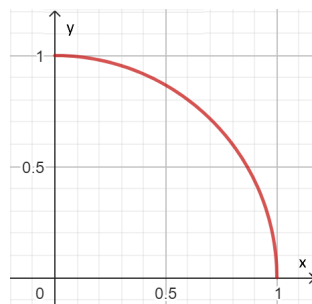
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = (3an + b) \left(\frac{1}{3}\right)^n$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(n)} : t \mapsto \left[\left(\frac{1}{3}\right)^n a t + (3an + b) \left(\frac{1}{3}\right)^n \right] e^{\frac{t}{3}}$

Exercice 2**Partie A - Calculs d'intégrales par différentes méthodes**

1. (a) L'équation du cercle C est : $x^2 + y^2 = 1$
- (b) Soit $x \in [0, 1]$.
 $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \Leftrightarrow f(x)^2 = 1 - x^2$ (car $f(x) \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$)
 $\Leftrightarrow f(x)^2 + x^2 = 1$

La courbe représentative de f est donc la portion de C correspondant aux abscisses entre 0 et 1 :



- (c) Par les théorèmes opératoires de continuité, f est continue sur $[0, 1]$.

La fonction racine est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et $x \mapsto 1 - x^2$ s'annule en 1.

Donc, par les théorèmes opératoires concernant les fonctions de classe C^1 , f est de classe C^1 sur $[0, 1[$.

Soit $x \in [0, 1[$. $f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}$.

$$\forall x \in [0, 1[, f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

2. (a) C est de rayon 1 donc l'aire du disque dont C est la circonférence est de π .
- (b) Comme f est positive, l'intégrale qu'on veut calculer est l'aire sous la courbe de f . D'après le lien établi entre f et le cercle C à la question 1, cette aire vaut le quart de l'aire totale délimitée par le cercle C.

$$\text{Donc } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

3. (a) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$

$$\text{D'où : } \forall \theta \in \mathbb{R}, \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

- (b) Le changement de variable est de classe C^1 .

$x = \cos(\theta)$ donc $dx = -\sin(\theta) d\theta$. De plus, $x = 0$ correspond à $\theta = \frac{\pi}{2}$ et $x = 1$ à $\theta = 0$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2(\theta)} (-\sin(\theta)) d\theta$$

$$= - \int_{\pi/2}^0 |\sin(\theta)| \sin(\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta) d\theta \quad (\text{sur l'intervalle d'intégration, } |\sin(\theta)| = \sin(\theta))$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{\sin(2\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

4. (a) Soit $b \in [0, 1[$.

$$\text{On pose : } \begin{cases} u'(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & u(x) = -\sqrt{1-x^2} \\ v(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & v(x) = 1 \end{cases}$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b]$. D'où, par intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left[-x \sqrt{1-x^2} \right]_0^b + \int_0^b \sqrt{1-x^2} dx \\ &= -b \sqrt{1-b^2} + \int_0^b f(x) dx \\ &\xrightarrow{b \rightarrow 1^-} 0 + \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi, } \boxed{\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{4}}$$

- (b) Soit $b \in [0, 1[$.

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int_0^b \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^b \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx + \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^b \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^b \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{b \rightarrow 1^-} \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

(questions 2b et 4a)

$$\boxed{\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}}$$

Partie B - Trigonométrie réciproque

1. (a) On pose $c = 0$. Calculer $\arccos(0)$ revient à résoudre dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation $\cos(x) = 0$.

D'après le cercle trigonométrique, l'unique solution de cette équation est $x = \frac{\pi}{2}$ et donc $\boxed{\arccos(0) = \frac{\pi}{2}}$.

On procède de même pour les deux autres valeurs et on trouve $\boxed{\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ et } \arccos(1) = 0}$

- (b) L'ensemble des solutions de $\cos(x) = c$ est : $\left\{ \arccos(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\arccos(c) + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

2. (a) Soit $b \in [0, 1[$.

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left[-\arccos(x) \right]_0^b = \arccos(0) - \arccos(b) \xrightarrow{b \rightarrow 1^-} \arccos(0) - \arccos(1)$$

$$\text{C'est-à-dire : } \boxed{\lim_{b \rightarrow 1^-} \int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{2}}$$

- (b) Soit $[a, b] \subset [0, 1[$.

$$\text{On pose : } \begin{cases} u'(x) = 1 & u(x) = x \\ v(x) = \arccos(x) & v(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{cases}$$

Les fonctions u et v ainsi définies sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b]$. D'où, par intégration par parties :

$$\int_a^b \arccos(x) dx = \left[x \arccos(x) \right]_a^b + \int_a^b \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$= b \arccos(b) - a \arccos(a) - \left[f(x) \right]_a^b \quad (\text{en utilisant la fonction } f \text{ de la partie 1})$$

$$\boxed{\text{Pour tout segment } [a, b] \subset [0, 1[, \text{ on a : } \int_a^b \arccos(x) dx = b \arccos(b) - a \arccos(a) + \sqrt{1-a^2} - \sqrt{1-b^2}}$$

Exercice 3**Partie A - Etude d'un exemple**

1. (a) Soit
- $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
- .

$$\begin{aligned}
 (x, y, z) \in \text{Ker}(h) &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y - 5z = 0 \\ 4x \quad \quad - 4z = 0 \\ \quad 2y + 2z = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 6x + y - 5z = 0 \\ \quad - 2y - 2z = 0 \\ \quad 2y + 2z = 0 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow 3L_2 - 2L_1 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ y = -z \\ z = z \end{cases}
 \end{aligned}$$

Ceci prouve que $\text{Ker}(h) = \text{Vect}\left((1, -1, 1)\right)$.

On a obtenue une famille génératrice constituée d'un seul vecteur non nul. Cette famille est donc libre.

Donc $\boxed{\left((1, -1, 1)\right) \text{ est une base de } \text{Ker}(h)}$.

- (b) D'après la matrice,
- $\text{Im}(h) = \text{Vect}\left((6, 4, 0), (1, 0, 2), (-5, -4, 2)\right)$

Or, $(6, 4, 0) - (1, 0, 2) + (-5, -4, 2) = (0, 0, 0)$.

Donc $\text{Im}(h) = \text{Vect}\left((6, 4, 0), (1, 0, 2)\right)$

Cette famille de vecteur est constituée de deux vecteurs non colinéaires; cette famille est donc libre.

Donc $\boxed{\left((6, 4, 0), (1, 0, 2)\right) \text{ est une base } \text{Im}(h)}$.

$\text{Im}(h)$ est donc un plan vectoriel de l'espace et a donc une équation de la forme $ax + by + cz = 0$.

Pour déterminer a, b, c on résout :

$$\begin{cases} (6, 4, 0) \in \text{Im}(h) \\ (1, 0, 2) \in \text{Im}(h) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 4b = 0 \\ a + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -b \\ a = -2c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 3c \\ a = -2c \end{cases}$$

$\boxed{\text{Im}(h) \text{ a pour équation } -2x + 3y + z = 0}$.

- (c) D'après la question 1a,
- $\text{Ker}(h) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$
- , donc
- $\boxed{h \text{ n'est pas injectif}}$
- .

De plus, h étant un endomorphisme, on en déduit que $\boxed{h \text{ n'est pas surjectif}}$ et donc $\boxed{h \text{ n'est pas bijectif}}$.

2. On considère
- $u = e_1 = (1, 0, 0)$
- . Dans ce cas
- $h(e_1) = (6, 4, 0)$
- et
- $h^2(e_1) = h(6, 4, 0) = (40, 24, 8)$
- .

La famille $(e_1, h(e_1), h^2(e_1))$ est libre (se voit grâce aux 0). De plus elle est constituée de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3; c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$.

Donc $\mathbb{R}^3 = \text{Vect}(e_1, h(e_1), h^2(e_1))$ et $\boxed{h \text{ est cyclique}}$.

3. (a) Soit
- $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$
- . On résout :

$$\alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3 = (0, 0, 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta - \gamma = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \quad 3\beta + 2\gamma = 0 \\ \quad \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 + L_2 \\ L_1 - L_3 \end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \beta = \gamma = \alpha = 0$$

Ceci prouve que la famille (u_1, u_2, u_3) est libre. De plus, elle est constituée de 3 vecteurs dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3.

Donc $\boxed{(u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

(b) On calcule :

$$\begin{aligned} h(u_1) &= (0, 0, 0) = 0 \times u_1 + 0 \times u_2 + 0 \times u_3 \\ h(u_2) &= (8, 4, 4) = 0 \times u_1 + 4 \times u_2 + 0 \times u_3 \\ h(u_3) &= (12, 8, 0) = 0 \times u_1 + 4 \times u_2 + 4 \times u_3 \end{aligned}$$

La matrice demandée est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

(c) • Tout d'abord, h est linéaire donc h_F est linéaire.

• On commence par montrer que h_F est bien un endomorphisme de F :

Soit $u \in F$: on écrit $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$.

$h(u) = h(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = \lambda_1 h(u_1) + \lambda_2 h(u_2) = 4\lambda_2 u_2 \in F$: c'est ce qu'on voulait.

Donc $h_F : F \rightarrow F$ et h_F est un endomorphisme de F

• Caractère cyclique :

On prend $u = u_1 + u_2 = (3, 0, 2)$; ainsi $h_F(u) = 4u_2 = (2, 1, 1)$

La famille $(u_1 + u_2, u_2)$ est constituée de deux vecteurs non colinéaires ; elle est donc libre.

Donc $\text{Vect}(u_1 + u_2, u_2)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 2 de F , dont la dimension est aussi 2.

Donc $F = \text{Vect}(u, h_F(u))$ et h_F est cyclique.

Partie B - Les endomorphismes nilpotents

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ceci prouve que f est nilpotent d'indice $p = 3$.

2. (a) $f^{p-1} \neq 0_E$ donc il existe $u \in E$ tel que $f^{p-1}(u) \neq 0_E$: montrons que ce vecteur u convient.

Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1}$ des scalaires tels que $\lambda_0 u_0 + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(u) = 0_E$.

En appliquant f^{p-1} à cette égalité, on a : $\lambda_0 f^{p-1}(u) + \lambda_1 f^p(u) + \dots + \lambda_{p-1} f^{p+p-1}(u) = 0_E$, d'où $\lambda_0 f^{p-1}(u) = 0_E$

Ensuite, puisque $f^{p-1}(u) \neq 0_E$, on obtient $\lambda_0 = 0$.

Ainsi, $\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{p-1} f^{p-1}(u) = 0_E$.

De même, en appliquant f^{p-2} à cette égalité, il vient $\lambda_1 = 0$.

Et ainsi de suite, de proche en proche, $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{p-1} = 0$, ce qui prouve que la famille est libre.

Il existe un vecteur $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ est libre.

(b) Dans $\mathbb{R}^n$, toute famille libre a au plus n vecteurs. Donc $p \leq n$.

(c) On raisonne par double implication :

• On suppose que $p = n$

Dans ce cas, il existe un vecteur u tel que la famille $(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u)) = (u, f(u), \dots, f^{n-1}(u))$ soit libre.

Cette famille est libre constituée de n vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ qui est de dimension n ; c'est donc une base de $\mathbb{R}^n$.

Donc $\mathbb{R}^n = \text{Vect}(u, f(u), \dots, f^{p-1}(u))$ et f est cyclique

• On suppose que f est cyclique et on note u un vecteur associé.

Ainsi, $\mathbb{R}^n = \text{Vect}(u, f(u), f^2(u), \dots, f^{n-1}(u))$.

Ainsi, la famille étant libre, nécessairement, $f^{n-1}(u) \neq 0_E$ et donc l'indice de nilpotence de f est supérieur ou égal à n , c'est-à-dire $p \geq n$.

Comme on avait par ailleurs $p \leq n$ (question B2b), on obtient $p = n$

Conclusion : f est cyclique si et seulement si $p = n$.