Concours Blanc - Mathématiques Partie 2 - Correction

Exercice

Partie A - Résultats préliminaires

1. Le discriminant de l'équation est $\Delta = q^2 + 4pq$.
   Or : $p > 0$ et $q > 0$, donc $\Delta > 0$.
   Donc $\boxed{\text{l'équation } f(x) = 0 \text{ possède deux solutions réelles distinctes}}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ quelconque.
   D'une part, $f(x) = x^2 - qx - pq$.
   D'autre part, $f(x) \ = \ (x - r_1)(x - r_2) \ = x^2 - (r_1 + r_2)x + r_1 r_2$.
   Ainsi, par identification, on obtient $\boxed{r_1 + r_2 = q \quad \text{et} \quad r_1 r_2 = -pq}$.
3. On calcule :
$$\begin{aligned} f(1) &= 1 - q - pq \\ &= p - pq \\ &= p(1-q) \\ &= p^2 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f(-1) &= 1 + q - pq \\ &= 1 + q(1-p) \\ &= 1 + q^2 \end{aligned}$$
$$f(0) = -pq$$
   On obtient donc : $\boxed{f(1) = p^2 > 0 \ \ , \ \ f(-1) = 1 + q^2 > 0 \ \ , \ \ f(0) = -pq < 0}$.
4. f est un polynôme réel donc f est continue sur $\mathbb{R}$.
   On peut donc appliquer le théorème des valeurs intermédiaires sur $[-1, 0]$.
   Puisque $f(-1) > 0$ et $f(0) < 0$, on en déduit que f s'annule sur $]-1, 0[$.
   De même, f s'annule sur $]0, 1[$.
   Enfin, on sait d'après la question 1 que f a exactement deux racines réelles r_1 et r_2 avec $r_1 < r_2$.
   On en déduit que : $\boxed{-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1}$.
5. Tout d'abord, on déduit de la question 4 que $|\, r_2 \,| = r_2 < 1$.

   Ensuite, puisque r_1 et r_2 sont les racines de f et puisque $r_1 < r_2$, on sait que :
$$r_1 = \frac{q - \sqrt{q^2 + 4pq}}{2} \text{ et } r_2 = \frac{q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{2}$$
   Par inégalité triangulaire, on en déduit que :
   $|\, r_1 \,| = \left| \dfrac{q - \sqrt{q^2 + 4pq}}{2} \right| \leqslant \dfrac{|q| + |\sqrt{q^2 + 4pq}|}{2} = \dfrac{q + \sqrt{q^2 + 4pq}}{2} = r_2 = |r_2|$
   Donc $|r_1| \leqslant |r_2|$.

   Enfin :
$$\begin{aligned} |r_1| = |r_2| \quad &\Leftrightarrow \quad |q - \sqrt{q^2 + 4pq}| = |q + \sqrt{q^2 + 4pq}| \\ &\Rightarrow \quad (q - \sqrt{q^2 + 4pq})^2 = (q + \sqrt{q^2 + 4pq})^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2\sqrt{q^2 + 4pq} = 2\sqrt{q^2 + 4pq} \\ &\Leftrightarrow \quad q^2 + 4pq = 0 \end{aligned}$$
   Cette dernière ligne est fausse d'après la question 1.
   En combinant toutes ces informations, on obtient : $\boxed{|r_1| < |r_2| < 1}$.

Partie B - Nombre de pile dans les 3 premiers lancers

- Loi de S

  Tout d'abord, $S(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(S=0) &= P\,(\,X_1 + X_2 + X_3 = 0\,) \\
&= P\Big(\,(X_1 = 0) \cap (X_2 = 0) \cap (X_3 = 0)\Big) \\
&= P\,(\,F_1 \cap F_2 \cap F_3\,) \\
&= P(F_1) \times P(F_2) \times P(F_3) \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= (1-p)^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(S=1) &= P\,(\,X_1 + X_2 + X_3 = 1\,) \\
&= P\Big(\,(P_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap P_2 \cap F_3) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3)\Big) \\
&= P\,(P_1 \cap F_2 \cap F_3) + P\,(F_1 \cap P_2 \cap F_3) + P\,(F_1 \cap F_2 \cap P_3) \qquad \text{(événements incompatibles)} \\
&= P(P_1)\,P(F_2)\,P(F_3) + P(F_1)\,P(P_2)\,P(F_3) + P(F_1)\,P(F_2)\,P(P_3) \qquad \text{(par indépendance)} \\
&= 3\,p(1-p)^2
\end{aligned}$$

  On calcule de même $P(S=2)$ et $P(S=3)$.

  La loi de S est donnée par :

k	0	1	2	3
$P(S=k)$	$(1-p)^3$	$3\,p(1-p)^2$	$3\,p^2(1-p)$	p^3

- Espérance

$$\begin{aligned}
E(S) &= 0 \times (1-p)^3 + 1 \times 3p(1-p)^2 + 2 \times 3\,p^2(1-p) + 3\,p^3 \\
&= 3\,p\,\Big((1-p)^2 + 2p(1-p) + p^2\Big) \\
&= 3\,p\,\Big(1 - 2p + p^2 + 2p - 2p^2 + p^2\Big) \\
&= 3p
\end{aligned}$$

$\boxed{E(S) = 3p}$

Partie C - Equivalent de a_n quand n tend vers l'infini

1. On calcule, en utilisant l'hypothèse d'indépendance :
$$\begin{aligned} a_1 &= P(A_1) = P(P_1\cap P_2) = P(P_1)\,P(P_2) = p^2\\ a_2 &= P(A_2) = P(F_1\cap P_2\cap P_3) = qp^2\\ a_3 &= P(A_3) = P(P_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4)+P(F_1\cap F_2\cap P_3\cap P_4) = pqp^2+q^2p^2 = qp^2(p+q) = qp^2\end{aligned}$$
$\boxed{a_1=p^2 \quad ; \quad a_2=qp^2 \quad ; \quad a_3=qp^2}$

2. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
Si on obtient face au premier lancer, c'est comme si on avait un lancer "de moins" pour réaliser A_{n+2} ; il s'agit donc d'obtenir, à partir du deuxième lancer, deux piles consécutifs pour la première fois aux lancers $n+2$ et $n+3$, événement qui a la même probabilité que A_{n+1}. On en déduit la première formule.
Sachant que l'on obtient pile au premier lancer, pour observer deux piles consécutifs pour la première fois aux lancers $n+2$ et $n+3$, il est nécessaire d'obtenir face au deuxième lancer. Ensuite, il s'agit d'obtenir, à partir du troisième lancer, deux piles consécutifs pour la première fois aux lancers $n+2$ et $n+3$. Cet événement a pour probabilité $P(F_2)P(A_n)=qP(A_n)$. On en déduit la deuxième formule.
$\boxed{\text{Pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ P_{F_1}(A_{n+2})=a_{n+1} \text{ et } P_{P_1}(A_{n+2})=qa_n\ .}$

(b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (F_1,P_1). Il vient :
$$\begin{aligned} P(A_{n+2}) &= P(F_1)\,P_{F_1}(A_{n+2})+P(P_1)\,P_{P_1}(A_{n+2})\\ &= qa_{n+1}+pqa_n\end{aligned}$$
$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_{n+2}=qa_{n+1}+pqa_n}$

(c) On doit avoir : $a_2=qa_1+pqa_0$.
D'après la question B1, cela équivaut à : $pq^2=qp^2+pqa_0$, d'où $\boxed{a_0=0}$.

3. (a) (a_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 sans second membre.

- Equation caractéristique
On résout : $x^2-qx-pq=0$, c'est-à-dire $f(x)=0$; les solutions sont r_1 et r_2.
- Terme général
Il existe donc λ et μ des réels tels que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $a_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$
- Constantes
Pour déterminer λ et μ, on résout :
$$\begin{cases} a_0 = 0\\ a_1 = p^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda+\mu=0\\ \lambda r_1+\mu r_2=p^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\mu=-\lambda\\ \lambda(r_1-r_2)=p^2\end{cases} \Leftrightarrow \lambda=-\frac{p^2}{r_2-r_1} \text{ et } \mu=\frac{p^2}{r_2-r_1}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ a_n=\frac{p^2}{r_2-r_1}(r_2^n-r_1^n)}$$

(b) $-1<r_1<1$ donc $\lim_{n\to+\infty} r_1^n=0$ et de même pour r_2.
Donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} a_n=0}$.

(c) Soit $n\in\mathbb{N}$.
$$a_n=\frac{p^2}{r_2-r_1}r_2^n\left[1-\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n\right]$$
Or, $|r_1|<|r_2|$ donc $\left|\frac{r_1}{r_2}\right|<1$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^n=0$.

On en déduit que $\boxed{a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{p^2}{r_2-r_1}r_2^n}$.

Partie D - Expression de a_n en fonction de n par une méthode matricielle

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. En utilisant le résultat de la question B2b, on peut écrire :
$X_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+2} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qa_{n+1} + pqa_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & pq \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X_n$
D'après les résultats de la question A2, cela revient à : $\boxed{X_{n+1} = MX_n}$.

2. $\det(P) = r_1 - r_2$ donc, d'après la question A1, $\det(P) \neq 0$, ce qui prouve que $\boxed{P \text{ est inversible}}$.
De plus, d'après la formule du cours, $P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\boxed{P^{-1} = \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix}}$.

3. On calcule :
$$\begin{aligned} D &= P^{-1}MP \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 + r_2 & -r_1r_2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1(r_1 + r_2) - r_1r_2 & r_2(r_1 + r_2) - r_1r_2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^2 & r_2^2 \\ r_1 & r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_1r_2 & 0 \\ 0 & -r_2^2 + r_1r_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1^2 - r_1r_2 & 0 \\ 0 & -r_2^2 + r_1r_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$
On en déduit que : $\boxed{D = \begin{pmatrix} r_1 & 0 \\ 0 & r_2 \end{pmatrix}}$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$D^n = \underbrace{(P^{-1}MP)\dots(P^{-1}MP)}_{n \text{ fois}} = P^{-1}MPP^{-1}M\dots MPP^{-1}MP = P^{-1}M^nP$
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ D^n = P^{-1}M^nP}$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.
(X_n) étant une suite géométrique de raison M et de premier terme X_0, on obtient :
$X_n = M^nX_0 = PD^nP^{-1}X_0$
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ X_n = PD^nP^{-1}X_0}$

6. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$$\begin{aligned} X_n &= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -r_2 \\ -1 & r_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1^n & 0 \\ 0 & r_2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 \\ -p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r_1 - r_2} \begin{pmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^2 r_1^n \\ p^2 r_2^n \end{pmatrix} \end{aligned}$$
En calculant uniquement la deuxième ligne, on obtient :
$\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_n = \frac{1}{r_1 - r_2}\left(p^2r_1^n - p^2r_2^n\right)}$ (identique au résultat de la partie B).

Partie E - Etude de la probabilité de ne jamais obtenir un double pile

1. On calcule :
$$\begin{aligned}(1-r_2)(1-r_1) &= 1-(r_1+r_2)+r_1r_2\\ &= 1-q-pq \qquad \text{(d'après la question A1)}\\ &= p-p(1-p)\\ &= p(1-1+p)\\ &= p^2\end{aligned}$$
$\boxed{(1-r_2)(1-r_1)=p^2}$

2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
$$\begin{aligned}S_N &= \sum_{k=1}^{N} a_k\\ &= \sum_{k=1}^{N} \frac{p^2}{r_2-r_1}(r_2^k-r_1^k)\\ &= \frac{p^2}{r_2-r_1}\left(r_2\frac{1-r_2^N}{1-r_2}-r_1\frac{1-r_1^N}{1-r_1}\right) \qquad \text{(possible car } r_1\neq 1 \text{ et } r_2\neq 1)\\ &= \frac{1}{r_2-r_1}\Big((1-r_1)(r_2-r_2^{N+1})-(1-r_2)(r_1-r_1^{N+1})\Big) \qquad \text{(d'après D1)}\end{aligned}$$
$\boxed{\text{Pour tout } N\in\mathbb{N}^*,\ S_N=\frac{1}{r_2-r_1}\Big((1-r_1)(r_2-r_2^{N+1})-(1-r_2)(r_1-r_1^{N+1})\Big)}$

3. $-1<r_1<1$ et $-1<r_2<1$ donc $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N=\frac{1}{r_2-r_1}\Big((1-r_1)r_2-(1-r_2)r_1\Big)=1$
$\boxed{\lim\limits_{N\to+\infty} S_N=1}$

4. $\boxed{\text{Asymptotiquement, l'événement "ne jamais obtenir un double pile" est impossible.}}$