Fiche de calcul n° 29

032A

Fonctions de deux variables

Prérequis
Fonctions d'une variable réelle (limites, continuité, dérivabilité)

A la suite du cours de 1ère année.

Les fondamentaux

Calcul 29.1 — Ensembles de définition.

Déterminer le plus grand ensemble de définition possible de chacune des fonctions suivantes.

a) $(x,y) \longmapsto \ln(x) + \sqrt{y}$ ....

b) $(x,y) \longmapsto \dfrac{x\sqrt{y}}{x^2+y^2}$ ....

c) $(x,y) \longmapsto \sqrt{16-x^2-y^2}\,\ln\left(x^2+y^2-16\right)$ ....

Calcul 29.2 — Dérivation partielle.

Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes.

a) $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^5 + xy + \pi$ ....

b) $f : (x,y) \longmapsto \sin(2xy - y)$ ....

c) $f : (x,y) \longmapsto \arctan(2x + y)$ ....

Calcul 29.3

Même exercice.

a) $f : (x,y) \longmapsto \cos(x - y)$ ....

b) $f : (x,y) \longmapsto x\cos(e^{xy})$ ....

c) $f : (x,y) \longmapsto x^y$ ....

d) $f : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ ....

Composition de fonctions

Calcul 29.4

On note $w(t) = f(u(t), v(t))$. Calculer $w'(t)$ pour chacune des fonctions f, u, v définies ci-dessous.

a) $f(x, y) = 4x^2 + 3y^2$ avec $\begin{cases} u = \sin \\ v = \cos \end{cases}$ ....

b) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ avec $\begin{cases} u(t) = e^{2t} \\ v(t) = e^{-t} \end{cases}$ ....

c) $f(x, y) = x^2 - 3xy + 2y^2$ avec $\begin{cases} u(t) = 3\sin(2t) \\ v(t) = 4\cos(2t) \end{cases}$ ....

Calcul 29.5 — Changements de variables.

Soient $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ et $c \in \mathbb{R}^*$.
Exprimer les dérivées partielles de $f \circ \varphi$ selon celles de f pour les fonctions suivantes.

a) $\varphi : (u, v) \mapsto \left(\dfrac{u + v}{2}, \dfrac{v - u}{2c} \right)$ .....

b) $\varphi : (r, \theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$ ....

Calcul 29.6 — Points critiques.

Déterminer les points critiques de la fonction f.

a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy + 1$ ....

b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$ ....

c) $f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ ....

d) $f(x, y) = y(x^2 + (\ln y)^2)$ ....

e) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ ....

Réponses mélangées

$\varnothing$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2}{1+(2x+y)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{1}{1+(2x+y)^2}$ $\quad -72\cos(4t) - 46\sin(4t)$

$(0,0)$ et $(-1,-1)$. $\quad \sin(2t)$ $\quad (0,1)$ et $(0,\mathrm{e}^{-2})$. $\quad \{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cos(\mathrm{e}^{xy}) - xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}$$

$\dfrac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}}$ $\quad (0,0)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y\ln x$

$\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial \theta}(r,\theta) = -r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta, r\sin\theta) + r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ $\quad]0,+\infty[\times[0,+\infty[$

$(0,0), (1,1)$ et $(-1,-1)$. $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\sin(x-y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sin(x-y)$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) + \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$$

$(0,3)$ $\quad \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x+y$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 5y^4+x$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2y\cos(2xy-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (2x-1)\cos(2xy-y)$$

$$\frac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$$