Fonctions réelles de deux variables réelles

Représentation graphique

Exercice 1

Soit f la fonction définie par :

$$f : (x, y) \mapsto \ln(2x + x^2 + y^2)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Montrer que les lignes de niveau de f sont des cercles dont on donnera le centre et le rayon.
3. Déterminer l'allure de la surface représentative de f.

Exercice 2

Soit f la fonction définie par :

$$f : (x, y) \mapsto \ln(1 - xy)$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Déterminer les lignes de niveaux de f

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 - y}$$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et le représenter graphiquement.
2. Déterminer les lignes de niveau de f.
3. Déterminer l'allure de la surface représentative de f.

Calcul différentiel à l'ordre 1

Exercice 4

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f : (x, y) \mapsto x^2 y - 3y$$

On note :

- S sa surface représentative
- A le point de S tel que $x_A = 4$ et $y_A = 3$

1. Démontrer que f est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer l'équation du plan tangent à S en A.

Exercice 5

L'altitude de l'interface entre deux couches géologiques est donnée par la fonction z définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,,\ z(x, y) = 2(x^2 - 1)^2 + y^2$$

1. Déterminer le gradient de z en tout point de $\mathbb{R}^2$. En déduire les trois points critiques de z.
2. (a) Justifier que z est positive sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) En déduire qu'en deux des points précédents, z admet un minimum global.
3. En étudiant les variations des deux fonctions partielles de z en l'origine, montrer que z n'admet pas d'extremum au troisième point.

Exercice 6

Soient φ et f les fonctions définies par :

$$\forall t > 0 \,,\ \varphi(t) = \ln(t) - t + \frac{1}{t}$$

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[^2 \,,\ f(x, y) = x \ln(y) - y \ln(x)$$

1. Montrer que φ s'annule une et une seule fois sur $]0, +\infty[$ et préciser en quel point.
2. (a) Calculer le vecteur gradient de f en tout point de $]0, +\infty[^2$.
   (b) En déduire que, si f admet un extremum local en (x_0, y_0), alors $\varphi\left(\frac{x_0}{y_0}\right) = 0$.
3. En étudiant les fonctions partielles de f en (e, e), conclure que f n'admet pas d'extremum sur $]0, +\infty[^2$.

Exercice 7

Dans chacun des cas suivants, étudier les extrema (locaux et globaux) de f :

1. $f : (x, y) \mapsto x^3 + y^3$
2. $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$
3. $f : (x, y) \mapsto x^4$

Exercice 8

Soient $x = (x_1, \ldots x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ deux séries statistiques.

On note :

- M_i le point du plan de coordonnées (x_i, y_i) $(i \in [\![1, n]\!])$
- $f : (a, b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} (y_i - a x_i - b)^2$
- $D_{a,b}$ la droite d'équation $y = ax + b$ $((a, b) \in \mathbb{R}^2)$

Le but de cet exercice est de démontrer que f admet un minimum et de déterminer $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(a_0, b_0)$ soit minimal.

1. Calculer les dérivées partielles premières de f et déterminer l'unique $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\frac{\partial f}{\partial a}(a_0, b_0) = \frac{\partial f}{\partial b}(a_0, b_0) = 0$.
2. Vérifier que D_{a_0, b_0} passe par le point moyen $G(\overline{x}, \overline{y})$.
3. Montrer que f admet un minimum en (a_0, b_0).

EDP

EDP est une abréviation qui signifie Equation aux Dérivées Partielles. Les EDP ont souvent servi dans les sujets de concours de ces dernières années.

Exercice 9

Déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$$

Exercice 10

Déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^y$$

Exercice 11

Déterminer l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ et qui vérifient :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3f(x,y)$$