Fonctions réelles de deux variables réelles

Exercice 1

Fait en classe.

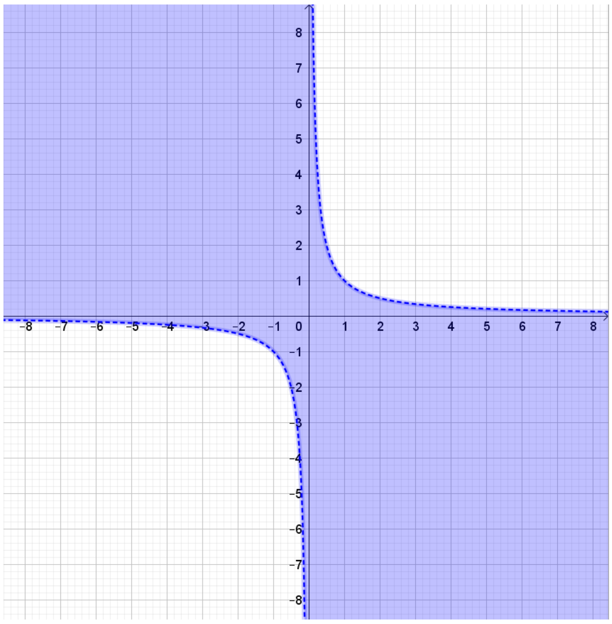
Exercice 2 (Correction complète)

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

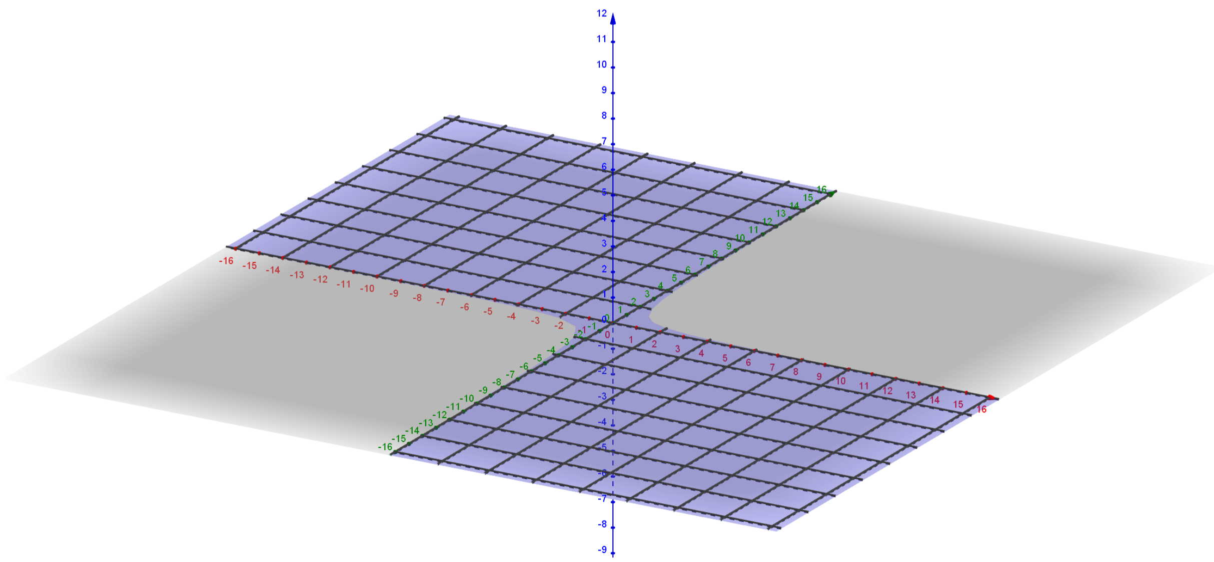
$$\begin{aligned} f(x,y) \text{ existe } &\Leftrightarrow 1 - xy > 0 \\ &\Leftrightarrow 1 > xy \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } \left(x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} > y\right) \text{ ou } \left(x < 0 \text{ et } \frac{1}{x} < y\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est : } \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ ou } \left(x > 0 \text{ et } \frac{1}{x} > y\right) \text{ ou } \left(x < 0 \text{ et } \frac{1}{x} < y\right) \right\}}$$

Graphiquement :



Ou d'ailleurs :

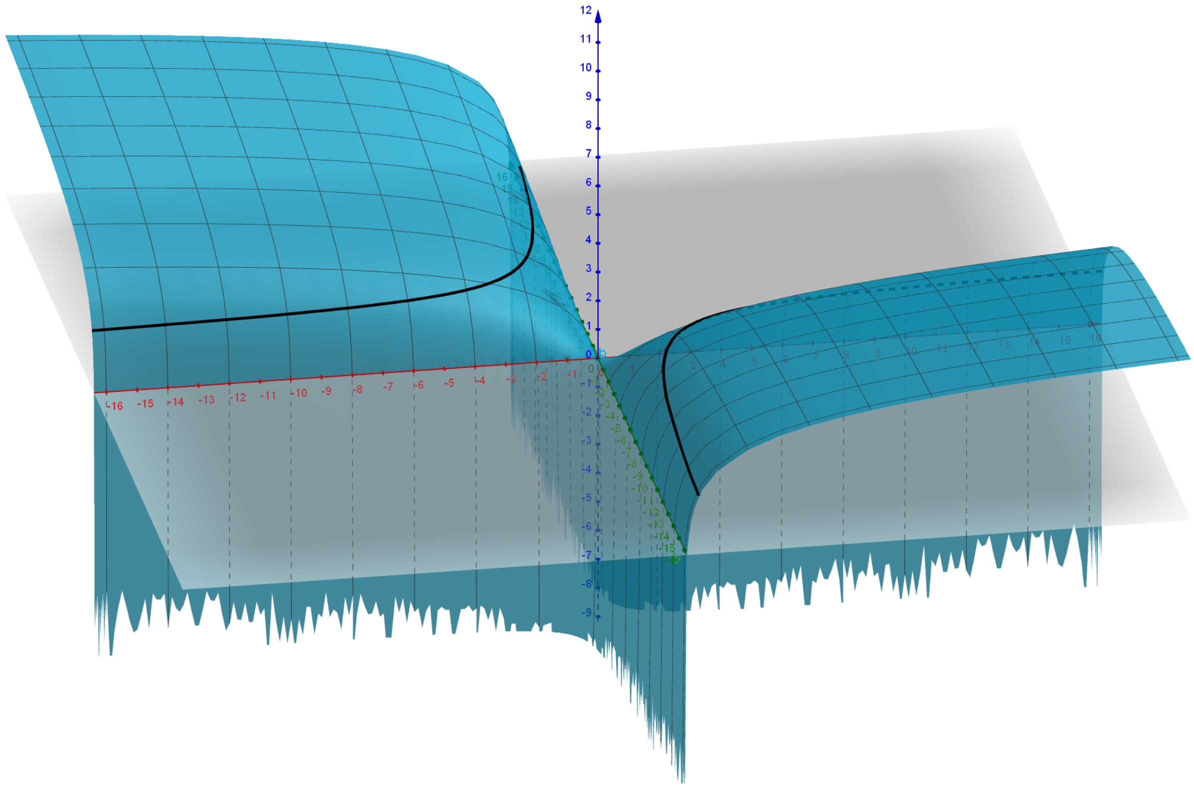


2. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$.
   On transforme :

$$\begin{array}{rcl} f(x,y)=k & \Leftrightarrow & \ln(1-xy)=k \\ & \Leftrightarrow & 1-xy=e^k \\ & \Leftrightarrow & 1-e^k=xy \\ & \Leftrightarrow & x=0 \text{ ou } y=\dfrac{1-e^k}{x} \end{array}$$

   La ligne de niveau k ($k \in \mathbb{R}$) de f est l'union de la droite définie par $z = k$ et $x = 0$ et de l'hyperbole située dans la plan d'équation $z = k$ et d'équation $y = \dfrac{1-e^k}{x}$.

   Graphiquement, en représentant la surface représentative de f et l'hyperbole associée à la ligne de niveau 2 :



   (La figure a été un peu tournée par rapport à la figure précédente, pour mieux voir l'hyperbole)

Exercice 3 (Correction complète)

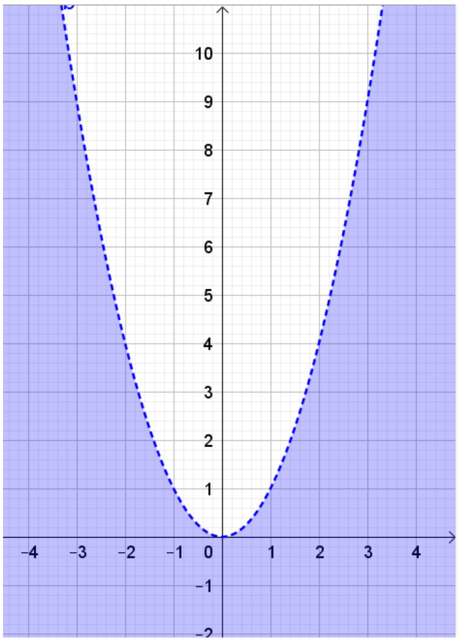
1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} f(x,y)\text{existe} \quad &\Leftrightarrow \quad x^2 - y \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x^2 \geqslant y \end{aligned}$$

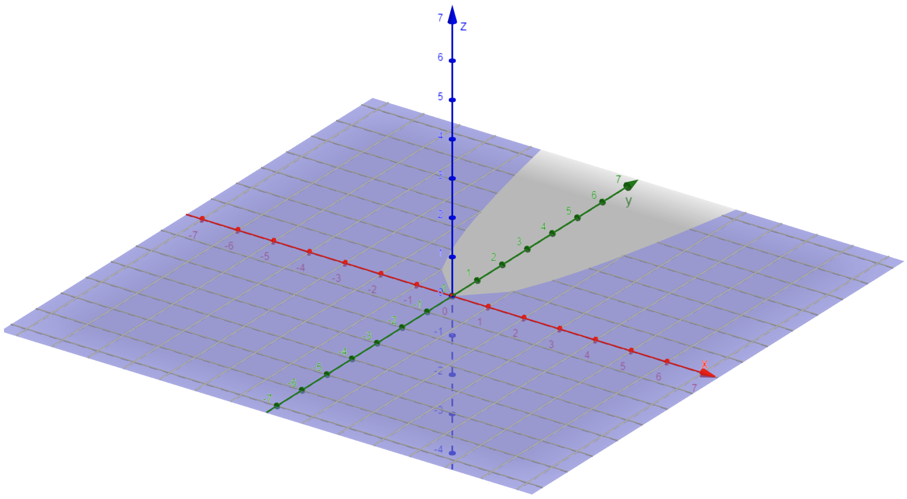
$$\boxed{\text{L'ensemble de définition de } f \text{ est } \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 \geqslant y \right\}.}$$

Cela correspond à la partie du plan située en-dessous (au sens large) de la parabole d'équation $y = x^2$.

Graphiquement :



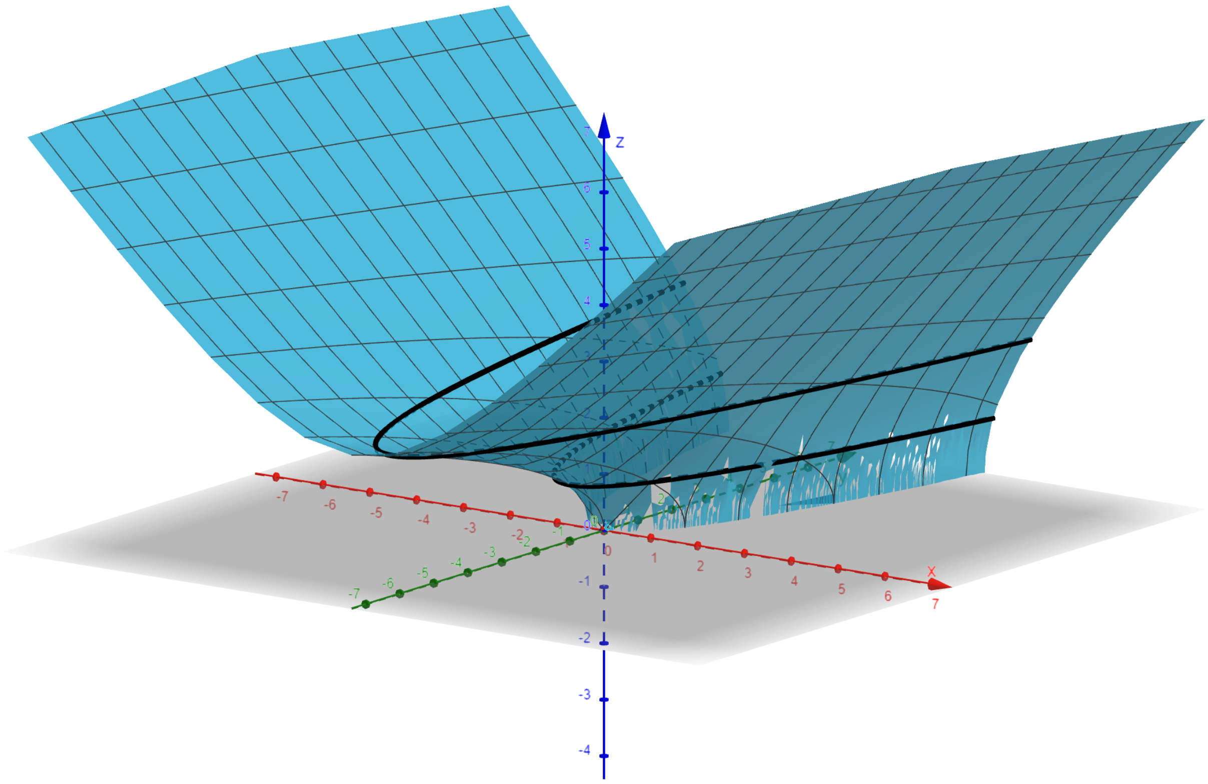
Ou d'ailleurs :



2. Soit $k \in \mathbb{R}$.
   On transforme :
   $f(x,y) = k \iff \sqrt{x^2 - y} = k$

   - <u>Si $k < 0$</u>
     Dans ce cas, il n'y a pas de ligne de niveau k pour f.
   - <u>Si $k \geqslant 0$</u>
     Dans ce cas :
     $$\begin{aligned} f(x,y) = k &\iff \sqrt{x^2 - y} = k \\ &\iff x^2 - y = k^2 \\ &\iff y = x^2 - k^2 \end{aligned}$$
     La ligne de niveau k de f est la parabole incluse dans le plan d'équation $z = k$ et ayant pour équation $y = x^2 - k^2$

3. On trace l'allure de la représentation graphique de f, en y ajoutant la ligne de niveau 1 et la ligne de niveau 2, 5.
   (*Ces valeurs ont été choisies purement parce qu'elles rendaient bien sur le dessin.*)



Exercice 4

Fait en classe.

Exercice 5

Fait en classe.

Exercice 6 (Correction rapide)

1. Utiliser le théorème de la bijection.
   $\varphi'(t) = -\dfrac{t^2 - t + 1}{t^2}$ et pour le numérateur, $\Delta = -3$ donc φ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$.
   De plus $\varphi(\,]0, +\infty[\,) = \mathbb{R}$.
   Ceci donne le côté existence et unicité.
   Et $\varphi(1) = 0$.
2. (a) $\left(\ln y - \dfrac{y}{x}, \dfrac{x}{y} - \ln x \right)$
   (b) Extremum local en $(x_0, y_0) \Rightarrow$ (système)
   De plus, $\varphi\left(\dfrac{x_0}{y_0}\right) = 0$ d'après le système.
3. Extremum local en $(x_0, y_0) \Rightarrow \dfrac{x_0}{y_0} = 1$
   De plus, $\ln(y_0) - \dfrac{y_0}{x_0} = 0 \Rightarrow y_0 = e$.
   On conclut avec l'étude des fonctions partielles.

Exercice 7 (Correction complète)

1. - Points critiques

     Tout d'abord, par les théorèmes opératoires, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

     Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

     $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2$.

     Le seul point critique est donc $(0, 0)$.

   - Vérifications

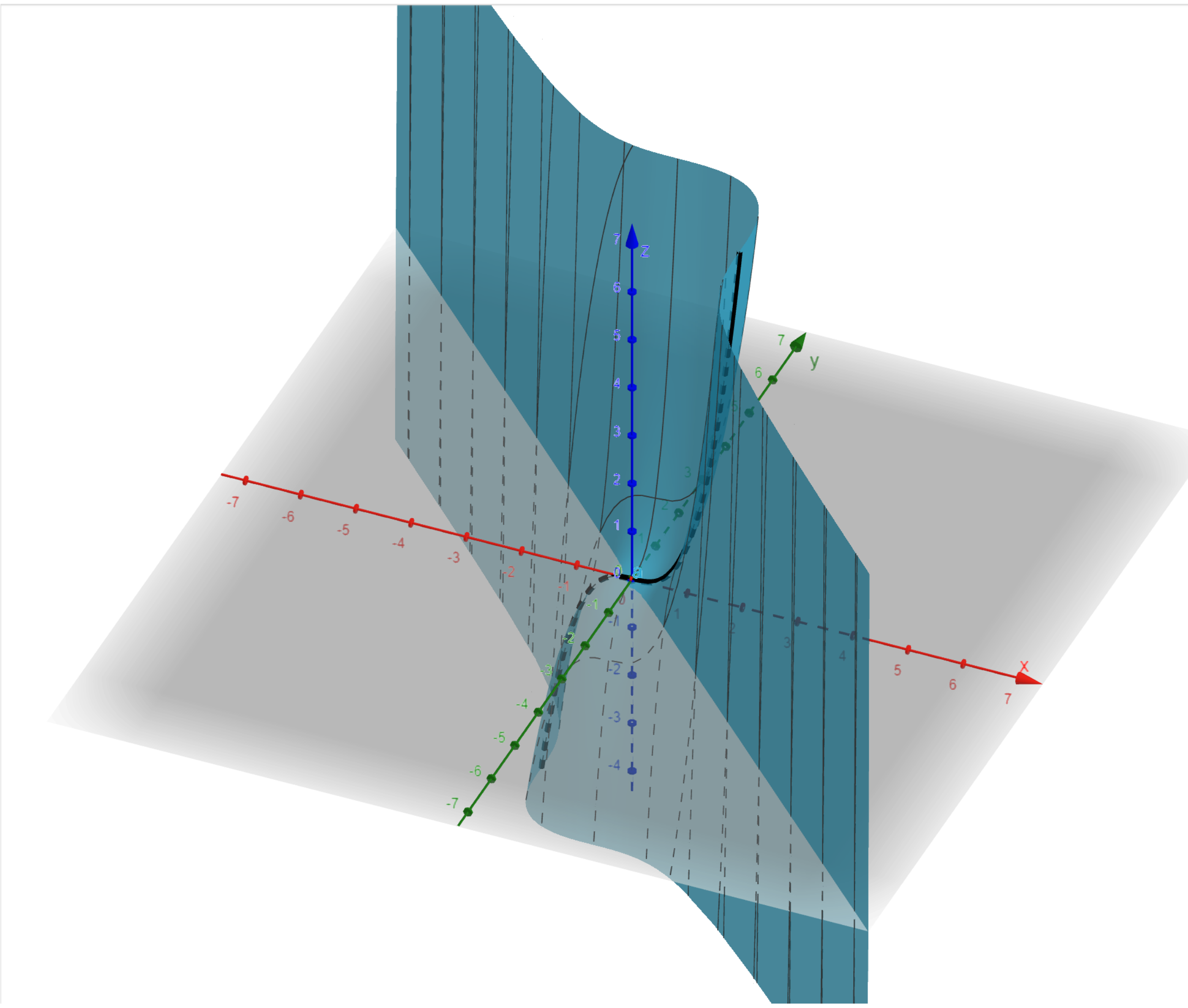
     On considère la fonction partielle $f_{y=0} : x \mapsto x^3$.

     En $x = 0$, cette fonction n'admet ni minimum ni maximum.

     Donc $\boxed{\text{f n'a pas d'extremum, ni local, ni global}}$.

   - Complément - Illustration

     On représente ici la surface représentative de f, sur laquelle on ajoute la représentation de la fonction partielle.



2. • Points critiques

Tout d'abord, par les théorèmes opératoires, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -2y$

Le seul point critique est donc $(0, 0)$.

• Vérifications

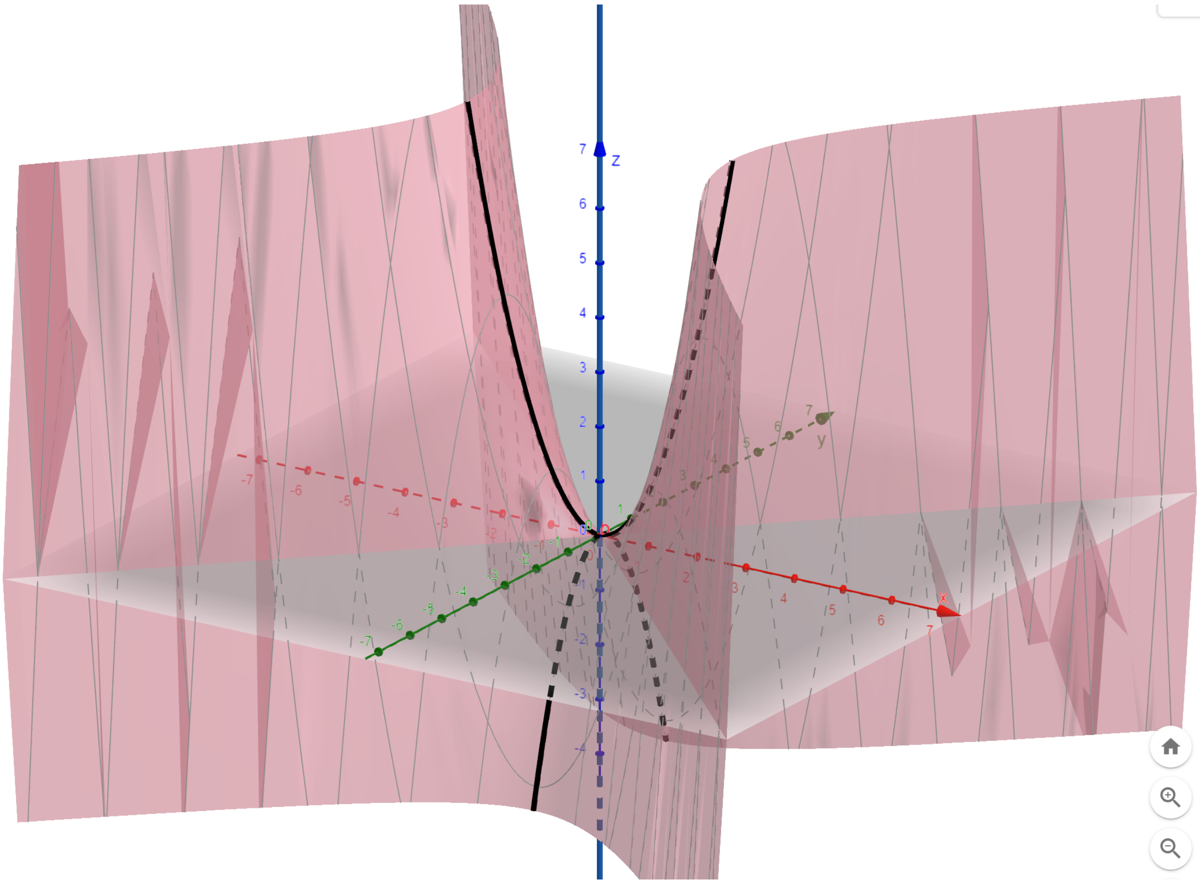
→ On considère la fonction partielle $f_{x=0} : y \mapsto -y^2$.
En 0, cette fonction a un maximum global.
Donc, si f a un extremum en $(0, 0)$, cet extremum est nécessairement un maximum.

→ On considère la fonction partielle $f_{y=0} : x \mapsto x^2$
En O, cette fonction a un minimum global.
Donc, si f a un extremum en $(0, 0)$, cet extremum est nécessairement un minimum.

Donc $\boxed{f \text{ n'a pas d'extremum, ni local, ni global}}$.

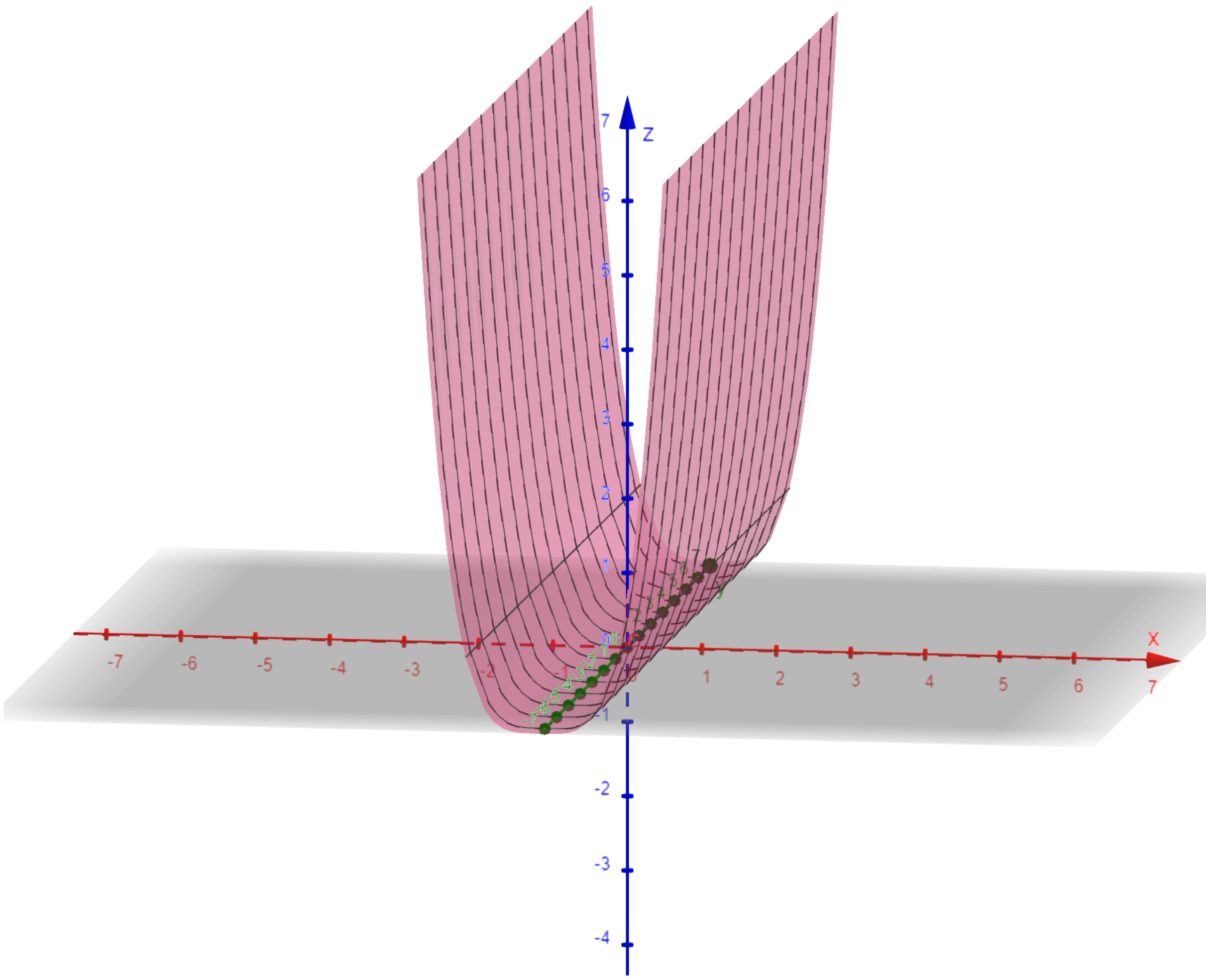
• Complément - Illustration

On représente ici la surface représentative de f, sur laquelle on ajoute la représentation des fonctions partielles.



3.
- <u>Points critiques</u>
  Tout d'abord, par les théorèmes opératoires, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
  Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
  $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x^3$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$
  Il y a donc une infinité de points critiques : ce sont tous les points de la forme $(0, y)$ avec $y \in \mathbb{R}$.
- <u>Vérifications</u>
  Soit $y \in \mathbb{R}$: $f(0, y) = 0$.
  Par ailleurs, f est positive sur $\mathbb{R}^2$.
  Donc $\boxed{f \text{ admet un minimum global qui est } 0}$.

- <u>Complément - Illustration</u>
  On représente ici la surface représentative de f.



Exercice 8

Cette exercice sera fait. Je ne sais pas quand ; le mois de juin est une hypothèse probable.

Exercice 9

Les solutions de l'équation sont les fonctions f qui ont une expression de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \varphi(y) \end{array}$$

où φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 10

Les solutions de l'équation sont les fonctions f qui ont une expression de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & xe^y + \varphi(y) \end{array}$$

où φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque.

Exercice 11

Les solutions de l'équation sont les fonctions f qui ont une expression de la forme :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & K(y)e^{3x} \end{array}$$

où K est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ quelconque.