Fiche n° 29. Fonctions de deux variables

Réponses

29.1 a) .... $\boxed{]0,+\infty[\times[0,+\infty[}$

29.1 b) .... $\boxed{\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geqslant 0\}\backslash\{(0,0)\}}$

29.1 c) .... $\boxed{\varnothing}$

29.2 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=5y^4+x}$

29.2 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2y\cos(2xy-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(2x-1)\cos(2xy-y)}$

29.2 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2}{1+(2x+y)^2} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{1+(2x+y)^2}}$

29.3 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-\sin(x-y) \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\sin(x-y)}$

29.3 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(\mathrm{e}^{xy})-xy\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-x^2\sin(\mathrm{e}^{xy})\,\mathrm{e}^{xy}}$

29.3 c) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=y\,x^{y-1} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x}$

29.3 d) .... $\boxed{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases} \text{ et } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}}$

29.4 a) .... $\boxed{\sin(2t)}$

29.4 b) .... $\boxed{\dfrac{2\mathrm{e}^{4t}+\mathrm{e}^{-2t}}{\sqrt{\mathrm{e}^{4t}-\mathrm{e}^{-2t}}}}$

29.4 c) .... $\boxed{-72\cos(4t)-46\sin(4t)}$

29.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)-\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

29.5 a) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial v}(u,v)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)+\dfrac{1}{2c}\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(\dfrac{u+v}{2},\dfrac{v-u}{2c}\right)}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial r}(r,\theta)=\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

29.5 b) .... $\boxed{\dfrac{\partial(f\circ\varphi)}{\partial\theta}(r,\theta)=-r\sin\theta\dfrac{\partial f}{\partial x}(r\cos\theta,r\sin\theta)+r\cos\theta\dfrac{\partial f}{\partial y}(r\cos\theta,r\sin\theta)}$

29.6 a) .... $\boxed{(0,0)}$

29.6 b) .... $\boxed{(0,3)}$

29.6 c) .... $\boxed{(0,0) \text{ et } (-1,-1).}$

29.6 d) .... $\boxed{(0,1) \text{ et } (0,\mathrm{e}^{-2}).}$

29.6 e) .... $\boxed{(0,0),(1,1) \text{ et } (-1,-1).}$

Corrigés

29.2 b) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$. Soit $y \in \mathbb{R}$. La première application partielle $f_y : t \mapsto \sin(2ty - y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f_y' : t \mapsto 2y\cos(2ty - y)$. On obtient $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = f_y'(x) = 2y\cos(2xy - y)$ en évaluant en $t = x$.

29.3 d) Calculons $\dfrac{\partial f}{\partial x}$. On fixe $a = (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $a \neq (0,0)$ alors la première application partielle en a est $t \mapsto \dfrac{ty^2}{t^2+y^2}$. Sa dérivée est $t \mapsto \dfrac{y^2 \cdot (t^2+y^2) - ty^2 \cdot 2t}{(t^2+y^2)^2}$, d'où $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{y^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}$ en évaluent en $t = x$. Reste à traiter le cas où $a = (0,0)$. On calcule à la main le taux d'accroissement :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \frac{\frac{x \cdot 0^2}{x^2+0^2} - 0}{x} = \frac{0}{x^3} = 0.$$

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0) - f(0,0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} 0 = 0.$

29.4 a) On pourrait simplement dériver $w : t \mapsto 4(\sin t)^2 + 3(\cos t)^2$, mais ce n'est pas l'idée du chapitre. La règle de la chaîne donne : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(u(t),v(t))\dfrac{\partial u}{\partial t}(t) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(u(t),v(t))\dfrac{\partial v}{\partial t}(t) = 8\sin t\cos t + 6\cos t(-\sin t) = 2\sin t\cos t = \sin(2t)$.

29.5 a) La règle de la chaîne donne $\dfrac{\partial (f\circ\varphi)}{\partial u}(u,v) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u,v))\dfrac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u,v)$, avec les notations $\varphi_1(u,v) = \dfrac{u+v}{2}$ et $\varphi_2(u,v) = \dfrac{v-u}{2c}$. Remarque : c'est le changement de variables utilisé pour résoudre l'équation des ondes. En physique, on note abusivement $x = \varphi_1$ et $y = \varphi_2$.

29.6 a) Calculons les dérivées partielles : $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x + 2y$. La résolution est immédiate.

29.6 b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + y - 3$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y - 6$. On résout et on obtient $x = 0, y = 3$.

29.6 c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x - 6y$.
On résout et on obtient $(0,0)$ et $(-1,-1)$

29.6 d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 + (\ln y)^2 + 2\ln y$.
On résout et on obtient $x = 0$ et $(\ln y)^2 + 2\ln y = 0$ d'où $y = 1$ ou $y = \mathrm{e}^{-2}$

29.6 e) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 4y$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 - 4x$.
On résout et on obtient $x^3 = y$ et $y^3 = x$ d'où $x = 0$ ou $x^8 = 1$ donc $(0,0), (1,1) et (-1,-1)$.
