Fiche n°1 : Mesures et Incertitudes en Travaux Pratiques

Objectifs :

- *Identifier les incertitudes*
- *Procéder à une évaluation de l'incertitude-type par approche statistique (type A)*
- *Procéder à une évaluation de l'incertitude-type par une autre approche que statistique (type B)*
- *savoir calculer une incertitude-type d'une grandeurs s'exprimant en fonction d'autres grandeurs*
- *Ecrire un résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs*
- *Comparer deux valeurs entre elles, à l'aide de l'écart normalisé*
- *Connaître et utiliser la régression linéaire*
- *Utiliser le langage Python pour procéder à l'évaluation d'une incertitude-type*

Ce document est un résumé des principaux résultats, sur l'étude et la prise en compte des incertitudes dans la mesure de grandeurs physiques, qui nous seront nécessaires en TP. Ces résultats seront illustrés en classe à travers les TP de physique et de chimie

L'évaluation des incertitudes de mesure est toujours un point délicat du travail expérimental. Toutefois, cette difficulté est réelle et intrinsèque à toute mesure, quelle que soit le niveau de l'expérience.
L'objectif de ce document est de fournir un cadre unique pour toutes les expériences rencontrées en BCPST1.

> *« Bien que ce Guide fournisse un cadre pour l'estimation de l'incertitude, il ne peut remplacer ni la réflexion critique ni l'honnêteté intellectuelle ni la compétence professionnelle. L'évaluation de l'incertitude n'est jamais une tâche de routine ni une opération purement mathématique; elle dépend de la connaissance détaillée de la nature du mesurande et du mesurage. La qualité et l'utilité de l'incertitude fournie pour le résultat d'un mesurage dépendent, en fin de compte, de la compréhension, de l'analyse critique et de l'intégrité de [celles et] ceux qui contribuent à son évaluation. »*
>
> *GUM 2008 (dernière version)*

Introduction

La physique-chimie est une science expérimentale ; la **mesure** de grandeurs physiques (température, longueur, tension, masse, pH etc.) est une étape essentielle de presque tous les domaines qui touchent à la physique ou à la chimie.

Exemple :

Donner une valeur *unique* comme résultat d'une mesure est insuffisant. Si un pH-mètre indique que le pH d'une solution donnée est 9,9 tandis qu'un autre indique 10,1, comment réconcilier ces deux valeurs ? On voit bien qu'il est nécessaire d'établir une certaine confiance dans les résultats fournis, afin de pouvoir les comparer. C'est pourquoi il est important d'associer à une valeur mesurée une estimation de **l'incertitude**, pour décrire ainsi l'ensemble des valeurs qu'on pense raisonnables.

- Lorsqu'un chercheur, un ingénieur ou un étudiant veut vérifier expérimentalement une loi, il faut qu'il compare ses mesures aux prédictions théoriques. Cette comparaison se fait nécessairement à l'aide des incertitudes sur les valeurs expérimentales.

  Exemple : Imaginons un TP dont l'objectif serait de mesurer l'intensité de la pesanteur terrestre, valant $g = 9{,}81\ m{\cdot}s^{-2}$. Deux binômes différents mesurent $g_1 = 10 \pm 3\ m{\cdot}s^{-2}$ et $g_2 = 10{,}2 \pm 0{,}5\ m{\cdot}s^{-2}$ Le premier binôme trouve une valeur qui semble plus proche de celle attendue, mais avec une incertitude six fois plus grande : la mesure du second binôme est donc de meilleure qualité.

- Les incertitudes de mesures interviennent également dans l'industrie ou l'ingénierie. Par exemple la valeur donnée par un capteur de pression dans une tuyère n'a pas beaucoup d'intérêt si l'on n'a pas une idée de l'incertitude associée.

- Il en est de même dans de nombreux autres domaines : le pesage dans les commerces, la détermination d'une concentration lors d'une analyse biologique, la mesure de vitesse par radar, le temps de course d'un sportif, etc

➔ Connaître **la mesure** d'une grandeur est tout aussi important que de pouvoir quantifier l'**incertitude** avec laquelle on la connaît.

I – Variabilité et incertitude-type

1) La variabilité en science expérimentale

En sciences expérimentales, une **mesure** correspond à un processus plus ou moins complexe qui permet d'attribuer un ensemble de valeurs numériques à une grandeur.

Exemple

La mesure répétée d'une absorbance A d'une solution qui absorbe dans le domaine du visible à l'aide d'un spectrophotomètre conduit à un ensemble de valeurs numériques de cette absorbance. Cet ensemble de valeurs permet de décrire la mesure.

Le **résultat d'une mesure** est un **ensemble de valeurs** raisonnablement attribuables à la grandeur d'intérêt.

La mesure est intrinsèquement **variable**. Ainsi, si l'on **répète une mesure**, on trouve souvent une valeur numérique différente.

Exemples

- On mesure le volume équivalent d'un titrage ayant pour support une réaction acidobasique. Si on fait de nouveau le titrage, on obtiendra sans doute une autre valeur du volume équivalent. L'ensemble de ces valeurs permettent de décrire la mesure.
- Un pH-mètre qui permet de mesurer une valeur unique du pH donne une indication unique. Mais un autre pH-mètre de la même marque donnera potentiellement une autre indication, soulignant ainsi la variabilité de la mesure.

L'erreur de mesure est la différence entre la **valeur mesurée** et celle qu'on imagine idéalement exister. Il peut s'agir par exemple d'une **valeur de référence** précisée sur une étiquette d'un produit ménager ou de consommation de la vie courante. L'erreur de mesure n'est pas accidentelle : elle est inhérente au processus de mesure et explique la **variabilité** de cette dernière.
Cette **variabilité** peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de **la méthode de mesure** (procédure mise en œuvre par l'opérateur)

  Exemple : Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision!

- les **variations de l'environnement** (température et pression par exemple)

  Exemple 2 : Si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.

- les **instruments de mesure** et **appareils** (temps de réponse, étalonnage…)

  Exemple 3 : Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente. De même avec un pH-mètre ou spectrophotomète

- **l'opérateur** (fatigue, erreur de parallaxe, effet de ménisque dans une pipette…)

  Exemple 4 : Par exemple, mesurer un volume avec une pipette jaugée peut entraîner une erreur avec la lecture au trait de jauge.

Exemples

- Si on effectue un titrage à l'aide d'une burette graduée tous les 0,10 mL on commet forcément une erreur en lisant la valeur du volume équivalent. Il faut tenir compte de la variabilité qui est cachée par la lecture sur une échelle discrète. Le même titrage avec une autre burette graduée tous les 0,050 mL ne donnera potentiellement plus la même indication.
- Le repérage de ce même volume équivalent à l'aide d'un indicateur de fin de réaction est intrinsèquement lié à la subjectivité de l'opérateur qui décidera (ou pas) de stopper le titrage selon la perception du changement de couleur par ses yeux.
- Si on mesure la masse d'un réactif avec une balance dont la tare est faussée de 1 g, même en répétant le mesurage et faisant des moyennes, on commettra une erreur, qui peut avoir des conséquences pour la suite des manipulations.

Généralement au niveau scolaire, **la personne réalisant l'expérience est la principale cause de variabilité** de la mesure. Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante. Il est donc totalement naturel que deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.

Dans la mesure du possible, on essaie **de trouver les sources d'erreur et d'évaluer les incertitudes correspondantes**.

Remarque : Il faut bien distinguer de qui relève de l'estimation de la variabilité associée au processus de mesure, et aux fautes commises par un manque de soin. Si un opérateur réalise la ligne de base d'un spectrophotomètre avec une eau trouble ou une cuve sale, il s'agit d'une faute plus que d'une erreur

2) Comment caractériser un ensemble de mesures ?

La description d'un ensemble de valeurs obtenues suite à des opérations répétées de mesure est possible à l'aide de deux paramètres : la **moyenne et l'écart-type**.

- La **moyenne arithmétique**, notée $\bar{x}$. Soit un ensemble de N mesures notées x_i avec i allant de 1 à N, on définit la **moyenne** $\bar{x}$ de l'ensemble par $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$
- **L'écart-type** (ou **écart-type expérimental**) noté s_{exp} permet de caractériser la dispersion (ou l'étalement) des observations. On le calcule avec l'expression : $\boxed{s_{exp} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}{N-1}}}$

Exemple

Supposons que l'on obtienne 4 valeurs lors du mesurage d'un volume équivalent en mL :{10,00 ; 10,25 ;9,95 ; 10,30}.

• La moyenne arithmétique expérimentale vaut $V_{eq} = \frac{10.00+10.25+9.95+10.30}{4}$ = 10,125 mL et il s'agit de ce qu'on pense être la meilleure estimation du résultat de mesure, autrement dit la valeur mesurée. *Remarquons que la valeur mesurée ne fait pas partie des 4 valeurs obtenues lors de la répétition du mesurage. Ce n'est en aucun cas une obligation*.

• L'écart-type expérimental, caractérisant la dispersion des valeurs observées autour de la moyenne, vaut donc :

$$s_{exp} = \sqrt{\frac{1}{4-1}(10.00-10.125)^2 + (10.25-10.125)^2 + (9.95-10.125)^2 + (10.30-10.125)^2}$$

Soit s_{exp} = 0,175594 mL, ce qui semble raisonnable compte-tenu des écarts à la moyenne observés.

Soulignons qu'il est impératif de prendre de la hauteur sur les valeurs obtenues lors d'un mesurage répété avant de calculer les deux paramètres précédents. On doit travailler à bien identifier les erreurs. Il arrive que des valeurs aberrantes soient produites. Elles peuvent introduire une erreur significative dans le résultat d'un mesurage. Dans ce cas, il est possible d'écarter une ou plusieurs mesures suite à un examen approprié des résultats mais cette opération doit être solidement documentée et justifiée.

Exemple

On répète le mesurage du volume équivalent (en mL) lors du titrage d'une solution d'acide chlorhydrique par une solution de soude et on reporte la série {10,10 ; 10,00 ;10,20 ; 9,90 ; 16,00 ;10,00 ; 10,10}. Si on évalue la moyenne et l'écart-type sur cette série de données brutes, on prend le risque de se tromper gravement. En effet, il y a de grandes chances que la valeur 16,00 résulte d'une erreur de report (10,6 mL peut-être ?) ou d'une faute de l'opérateur (par exemple, mauvaise utilisation de la pipette jaugée à deux traits, mauvaise solution prélevée). Ici, on pourrait prudemment refaire les mesures puis écarter la valeur 16,00 des données.

Comment calculer la moyenne et l'écart-type ?

- Avec Excel ou Open office : « =MOYENNE(A1:A15) » et « =ECARTYPE(A1 :A15) » (en ayant renseigné les cellules A1 à A15 avec les données expérimentales et s'il y a 15 mesures bien entendu)
- Avec Python, on peut utiliser la bibliothèque numpy. Les données expérimentales sont d'abord introduites dans un tableau (ou array) via la commande np.array([...,...,...]). La moyenne est calculée à l'aide de np.average(...) et l'écart-type à l'aide de np.std(..., ddof=1). Il est nécessaire de préciser ddof=1 pour s'assurer que le calcul utilise bien le dénominateur N-1.
- Avec le mode statistiques d'une calculatrice *(cf notice de votre calculatrice)*.

3) L'incertitude-type

La **valeur mesurée** est ce qu'on pense être la meilleure estimation de la grandeur mesurée.
Deux cas se présentent :

- lorsqu'on a une **unique valeur**, alors c'est celle que l'on prend, on n'a pas d'autre choix.
- lorsqu'on **répète des observations**, la moyenne arithmétique permet d'estimer au mieux la valeur mesurée.

Définition :
L'incertitude est une évaluation de la **variabilité de la valeur mesurée**.
La quantification de la v**ariabilité** d'une mesure x d'une grandeur est appelée **incertitude-type** et notée $\boldsymbol{u(x)}$.
Par définition, **l'incertitude-type** *est estimé à l'aide d'un calcul d'***écart-type** de la distribution des données issues d'une répétition de la mesure.

De manière plus informelle, l'incertitude-type permet de répondre à la question : « de combien la valeur mesurée est-elle susceptible de varier ?

Dans la suite, le résultat d'une mesure sera noté **par convention** $\boxed{x \pm u(x)}$.

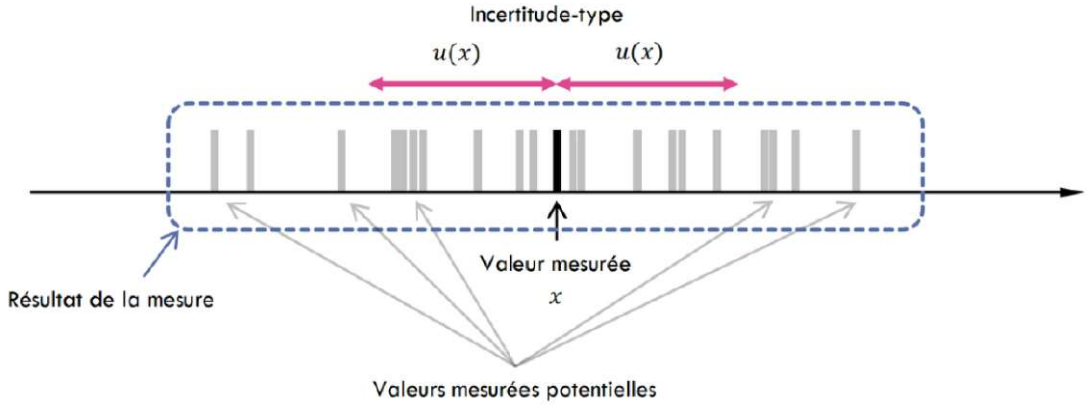
!!! Attention !!! Ce qui suit le ± est une **incertitude-type**. Il ne s'agit pas d'une « incertitude élargie ». Cette notation synthétique peut prêter à confusion. Pour éviter cela, on peut spécifier les deux informations de façon séparée, à savoir x = ... d'une part et $u(x)$ = ... d'autre part.

On fera à ce stade deux remarques :

- pour estimer l'incertitude-type du résultat d'une mesure, il faut donc **répéter un grand nombre de fois le processus de mesure**. Cette répétition et les valeurs supplémentaires servent uniquement à estimer la variabilité du processus de mesure.
- l'incertitude-type est **l'estimation d'une variabilité** qui est unique à chaque processus de mesure. Il est donc naturel que deux personnes réalisant exactement la même expérience aient une variabilité, et donc une incertitude-type, différente.

Propriété :
La **variabilité** d'un **processus de mesure** avec un protocole, du matériel et des conditions expérimentales données, impliquant une ou plusieurs personnes dans l'expérience, est mesurée par une **unique incertitude-type**.

Remarque : Incertitude-type « relative » : On peut définir de plus l'incertitude-type de mesure « relative » la grandeur $u(x)/x$, que l'on donne généralement en pourcentage %

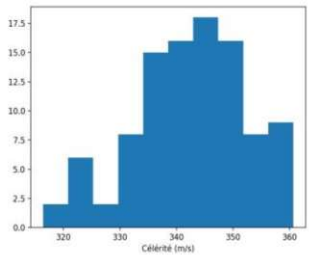


Représentation d'une série de mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

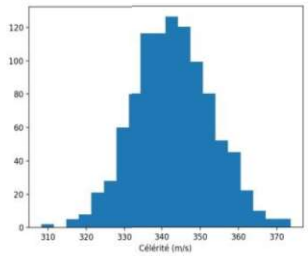
La figure représente une distribution de mesures ainsi que l'incertitude-type. On constate qu'en moyenne deux valeurs prises au hasard sont séparées de quelques u(x). Toutefois, on constate aussi que quelques points sont très éloignés des autres. Il ne s'agit pas de points aberrants, mais de valeurs dans des domaines peu fréquents car peu probables mais tout de même possibles.

Complément : Vers la distribution gaussienne

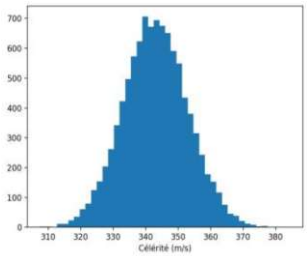
Imaginons que nous soyons capable de reproduire une expérience de mesure de temps de vol d'ultrason un très grand nombre de fois. Voici à quoi pourraient ressembler les courbes pour 100, 1 000 et 10 000 expériences.



(a) Simulation de 100 expériences.



(b) Simulation de 1 000 expériences.



(c) Simulation de 10 000 expériences.

La courbe de la figure 2c est celle qui s'approche le plus d'une distribution lisse, appelée **distribution gaussienne**. Cette courbe « en cloche » est caractéristique de très nombreux processus de mesure. Le fait que la distribution aléatoire des résultats d'une mesure tende vers une courbe gaussienne est un résultat important en physique.
Pour ces trois simulations, on trouve une valeur moyenne autour de $c_m = 343$ m/s et un écart-type de $u(c) = 10$m/s.
Le résultat de la mesure est la donnée de ces deux grandeurs.

> *Remarque : On peut montrer que, pour une distribution gaussienne, environ 68% des résultats du processus de mesure sont comprises entre $c_m - u(c)$ et $c_m + u(c)$ et 95% sont comprises entre $c_m - 2u(c)$ et $c_m + 2u(c)$.*

4) Ecriture du résultat

Lorsqu'on écrit un chiffre, le nombre de chiffres employés est par définition le nombre de chiffres significatifs. (on ne compte pas les premiers 0 à gauche)

> *Exemple : 1.2540×10^{-2} possède 5 chiffres significatifs; 0.0023 en possède 2; 1254 en possède 4;*

Le nombre de chiffres significatifs employés sert à communiquer une information grossière quant à l'incertitude associée à la valeur écrite, si on ne la connaît pas.
L'incertitude-type résulte d'une évaluation : on n'est jamais certain de sa valeur.

Propriété :
Pour rappeler que l'incertitude-type est elle-même incertaine, on limite **en général son nombre de chiffres significatifs à deux**.

Nous choisissons donc de présenter :
- l'incertitude-type arrondie avec **deux chiffres significatifs**
- la valeur mesurée et l'incertitude-type doivent avoir **le même nombre de chiffres après la virgule**
- si la notation scientifique est privilégiée, la puissance de 10 est identique pour valeur mesurée et l'incertitude-type
- **l'unité** bien évidemment.

> *Exemple : $A = 623.5$ cm^2, $u(A) = 11.3$cm^2 se réécrit $A = 624$ cm^2, $u(A) = 11$cm^2 ou encore de manière condensée $A = (624 \pm 11)$cm^2 (où ce qui suit le $\pm$ est l'incertitude-type).*
> *De même, $L = 100$ m, $u(L) = 1.55$cm se réécrit $L = (100.000 \pm 0.016)$ m.*

5) Validation d'un résultat expérimental : utilisation du z-score (ou de l'écart normalisé)

La validation d'un résultat expérimental passe assez souvent par la comparaison à une valeur de référence fournie dans la notice du constructeur ou sur l'étiquette d'un produit de consommation courante. La valeur de référence est toute valeur mesurée dont l'incertitude-type est supposée négligeable devant celle obtenue par une autre méthode.

Rappelons que **l'incertitude-type** permet de quantifier les variations potentielles de la valeur mesurée, cette dernière ne coïncidant généralement pas avec la valeur de référence. Pour **pouvoir comparer cette mesure** à la valeur de référence, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme **compatibles ou incompatibles**

Définition : On appelle **z-score ou écart normalisé** le rapport défini par l'expression :

$$z = \frac{|x - x_{ref}|}{u(x)}$$

Le z-score permet d'évaluer la compatibilité entre le résultat de la mesure et la valeur de référence.

Deux cas à distinguer:
- Si $z < 2$, alors le **résultat de la mesure est compatible** avec la valeur de référence.
- Si $z \geq 2$, alors **il ne l'est pas**.

Ce seuil à 2 est d'origine historique. On le retrouve dans de nombreux champs scientifiques, comme la médecine, la pharmacie, la biologie, la psychologie, l'économie, l'écologie, etc

Exemples

- On titre les ions calcium dans l'eau d'Hépar et on trouve C = 128,2 ± 8,7mg.L^{-1}. Sur l'étiquette la valeur de référence est 119 mg.L^{-1}. On calcule $z = \frac{|128.2 - 119|}{8.7}$ = 1,05 < 2. Le résultat est compatible avec l'indication de l'étiquette de la bouteille d'eau.
- On mesure l'indice de réfraction d'un liquide organique obtenu après évaporation du solvant à l'évaporateur rotatif. On trouve n= 1,10800 ± 0,00029. La valeur de référence indiquée dans le Handbook est 1,126.

On calcule $z = \frac{|1.126 - 1.108|}{0.00029}$ = 6,2 > 2. Ici, il y a clairement incompatibilité. Il faut conclure avec un (des) commentaire(s) pertinent(s)qui montre(nt) une prise de recul nécessaire dans la démarche scientifique

Remarque : Il est également possible de **comparer deux mesures** entre elles, chacune étant associée à son incertitude-type, à l'aide de cet écart normalisé ou z-score

$$z = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de **compatibles** si leur écart normalisé vérifie la propriété $E_N < 2$.

6) Méthodes d'estimation de l'incertitude (fiche n°2 et 3)

L'estimation des incertitudes peut s'appuyer sur des méthodes très élaborées et donner lieu à des développements mathématiques ardus. Pour un très grand nombre d'applications, il suffit de distinguer deux situations :

- Soit on peut **reproduire la mesure plusieurs fois**, et obtenir des résultats qui varient d'une mesure à l'autre : évaluation de l'incertitude par une approche statistique **(méthode de type A)**
- Soit la mesure **ne peut être réalisée qu'une seule fois** : évaluation de l'incertitude par une autre approche que statistique **(méthode de type B)**