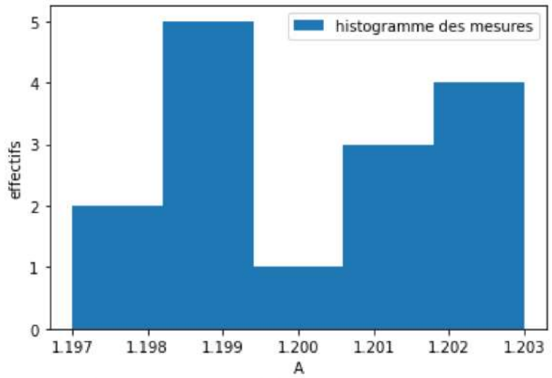
<u>Fiche n°2</u> : Mesures et Incertitudes en Travaux Pratiques
Evaluation de l'incertitude de type A : cas d'une série de mesures

<u>Objectifs</u> : ☞ *Procéder à une évaluation de l'incertitude-type par approche statistique (type A)*
☞ *Ecrire un résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs*
☞ *Utiliser le langage Python pour procéder à l'évaluation d'une incertitude-type*

On utilise une approche statistique dès lors que l'on a une **série de mesures qui ne sont pas toutes identiques.**

II – Evaluation sur des mesures répétées : Evaluation de type A

1) <u>Un exemple</u>



On mesure l'absorbance d'une solution à l'aide d'un spectrophotomètre. on répète 15 mesures de l'absorbance d'une solution ; la ligne de base du spectrophotomètre a été soigneusement réalisée au préalable

n°	1	2	3	4	5	6	7	8
A	1.200	1.201	1.199	1.199	1.203	1.201	1.202	1.199
n°	9	10	11	12	13	14	15	
A	1.197	1.199	1.201	1.202	1.199	1.198	1.202	

On peut représenter l'histogramme des valeurs à l'aide d'un tableur (Excel ou Python par exemple)

Exemple

On souhaite connaître l'incertitude-type associée à la mesure d'une absorbance à l'aide d'un spectrophotomètre. L'écart-type expérimental déterminé à partir de 15 observations d'un opérateur est s_{exp} = 0,0017. Ce même opérateur mesure à nouveau l'absorbance de la solution et relève l'indication A = 1,202. Cela signifie que l'absorbance de la solution vaut environ 1,202 avec une variabilité de 0,0017.

L'objectif est d'utiliser toutes les valeurs mesurées pour **estimer la valeur** et **l'incertitude-type** de cette mesure.

2) <u>Estimation de la valeur de la mesure et estimation de l'incertitude-type</u>

Lorsque la variabilité des mesures est accessible, il convient de **répéter un grand nombre de fois le processus de mesure** pour estimer **l'incertitude-type** sur une unique réalisation de la mesure.
L'intérêt de la **moyenne** est qu'elle va réduire les variabilités.

Le problème pour déterminer l'écart-type de la moyenne d'une série d'observations est que l'on ne dispose que d'une unique moyenne ! Pour estimer l'écart-type, il faudrait avoir plusieurs moyennes, ce qui exigerait de refaire plusieurs séries d'observations : cela serait fastidieux.
On peut montrer que l'écart-type d'une moyenne d'une série de N observations peut être estimé sur la simple base de l'écart-type de la série, à l'aide de l'expression suivante :

$$u(\bar{x}) = \frac{s_{\exp}}{\sqrt{N}} =$$ où s_{exp} est l'écart type expérimental

<u>Propriété</u> : On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$. On note l'incertitude-type $u(x)$ de cet ensemble de mesures qui est évaluée en calculant son écart-type.

Le résultat de l'expérience est : $\bar{x} + u\left(\bar{x}\right)$

Avec $\bar{x} = \dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ la moyenne de la distribution

Et $u\left(\bar{x}\right) = \dfrac{s_{\exp}}{\sqrt{N}}$ incertitude type

Remarque : On rappelle en effet que l'écart-type $s_{\exp} = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{N-1}}$ d'une série de données donne une idée de la dispersion ou de l'étalement des données.

Le facteur $1/\sqrt{N}$ montre que **plus on fait de mesures, plus l'incertitude sera faible et donc plus le résultat sera précis**

Exemple

Soit N = 15 valeurs de l'absorbance d'une solution. La moyenne des absorbances de la série est A = 1,200133 et l'écart-type s_{exp} = 0,00172654.

L'incertitude-type sur la moyenne des absorbances est donc $u\left(\bar{A}\right) = \dfrac{0.00172654}{\sqrt{15}}$ = 0,00044579.

On peut donc écrire, en conservant deux chiffres significatifs pour l'incertitude-type : A = 1,20012 ± 0,00045.

Ainsi, en une série de mesure, on obtient les points expérimentaux, leur incertitude-type, la moyenne de ces points et grâce à cette formule, l'incertitude-type sur la moyenne. On obtient ainsi une estimation plus précise de la grandeur à mesurer en modérant la variabilité de chaque prise de mesure unique

Remarques

- *L'expression mathématique de u(x) n'est pas à connaître par cœur. Les calculatrices ou les tableurs font automatiquement le calcul de* s_{exp}*. À vous de chercher comment faire sur votre calculatrice.*
- *La dimension de* u(x) *est la même que celle de la série de mesures. Par exemple, si la série de mesure est une longueur, alors u(x) est une longueur.*

Comment faire en TP ou TIPE ?

➔ En pratique : Les tableurs, comme Excel, peuvent calculer la moyenne et l'écart type d'une série de données. Regarder les formules à utiliser sur l'exemple ci-dessous (attention, les formules utilisées doivent être précédées du signe « = ». Par exemple, dans la case E4 on a tapé : « =MOYENNE(B2 : H2) »).

Exemple :

On effectue le titrage par colorimétrie d'un volume V_0 = 10 mL d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration inconnue c_0 par une soude de concentration c = $2,0.10^{-2}$ mol.L^{-1}.
Sept élèves ont trouvé les valeurs suivantes pour c_0 :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Elève n°	1	2	3	4	5	6	7
2	c_0 (mol.L^{-1})	3,42E-02	3,40E-02	3,48E-02	3,38E-02	3,50E-02	3,34E-02	3,52E-02
3								
4		Valeur moyenne (MOYENNE(B2:H2))			0,03434286			
5		Ecart type (ECARTYPE(B2:H2))			0,00067047			
6		Incertitude type (E5/RACINE(7))			0,00025341			

➔ Vous pouvez également utiliser votre calculatrice :

- *TI : « STAT », « EDIT », rentrer les valeurs dans une liste puis « STAT », « CALC », «1-Var Stats » et nom de la liste. Ecart-type : Sx.*
- *Casio : « MENU », « STAT », remplir une liste, « CALC », « SET », mettre la liste concernée dans « 1 Var XList » et 1 dans «1 Var Freq » puis « EXE » et « 1 Var ». Ecart type : Sx*

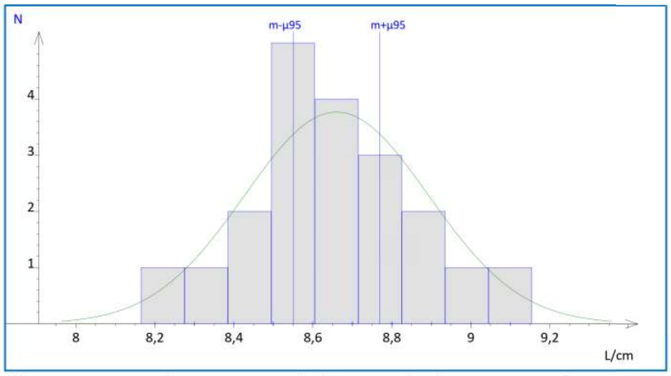
➔ En TP : Un **programme Python** permet aussi de réaliser ces différents calculs

Voir le fichier Python correspondant

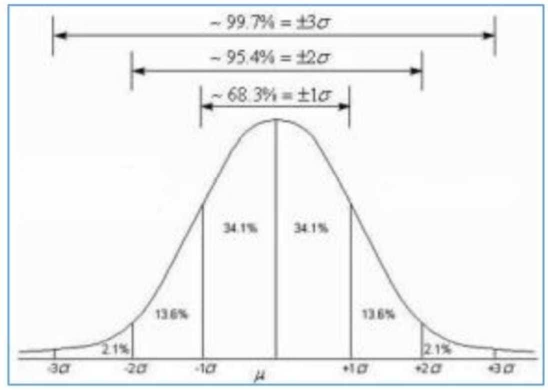
Pour complément : Incertitude-type et intervalle de confiance.

- **Dans le cas d'une répartition parfaitement gaussienne**

Généralement, lorsque l'on dispose d'un très grand nombre d'expériences, on constate que l'histogramme qui représente la dispersion des résultats du mesurage suit une **loi gaussienne ou une loi normale**



Histogramme des mesures de l'exemple des germes de blé et courbe de Gauss associée



Espérance et écart type pour une gaussienne

➔ **L'incertitude-type u(x)** correspond à un **niveau de confiance à 68 %**

Signification : Dans la plupart des cas rencontrés en physique ou chimie, on acceptera l'hypothèse que la loi de distribution de x est une loi Gaussienne : si on donnait le résultat de la mesure de X sous forme de l'intervalle $[x - u(x), x + u(x)]$, la probabilité pour qu'un résultat de mesure appartienne à cet intervalle ne serait que de 68%.

- **Intervalle de confiance**

Si on souhaite **un intervalle de confiance plus large**, il convient de multiplier l'incertitude-type par un coefficient d'élargissement dit de **Student** (noté t ou k).

En tenant compte de ce coefficient**, l'incertitude élargie** devient : $\boxed{u(x)_{élargie} = t_{\%} \times u(x)}$

Le coefficient $t_{\%}$ dépend du nombre de mesures effectuées et du niveau de confiance *souhaité (un niveau de confiance de x % signifie qu'il y a x % de chance de trouver la valeur vraie dans l'intervalle défini par l'incertitude autour de la valeur moyenne).* Les coefficients de Student sont des valeurs tabulées (ci-dessous pour indication)

n	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
t_{95}	12,7	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26
t_{99}	63,7	9,93	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25
n	**11**	**12**	**13**	**15**	**19**	**21**	**50**	**100**	∞
t_{95}	2,23	2,20	2,18	2,15	2,10	2,09	2,01	1,98	1,96
t_{99}	3,17	3,11	3,05	2,98	2,88	2,85	2,68	2,63	2,57

➔ Par défaut, le coefficient de Student pour un intervalle de confiance à 95% est $\mathbf{t_{95\%} \approx 2}$.