

Suite de la fiche N°3 : EXEMPLES DE SIMULATIONS MONTE CARLO

1. Mesure d'aire

On reprend l'exemple de la mesure de l'aire d'une feuille A4, dont les dimensions ont été mesurées dans les règles de l'art à l'aide d'un triple décimètre gradué au millimètre.

Données

On a effectué une évaluation de type B de l'incertitude des longueurs et largeurs. Dans ce cadre, on considère que ces grandeurs sont modélisées par des distributions uniformes, dont la demi-étendue est donnée dans le tableau suivant.

Mesurandes	l	L
Valeur mesurée	21 cm	29,7 cm
Demi-étendue	0,05 cm	0,05 cm

D'autres choix pour cette demi-étendue sont possibles, qui font intervenir l'appréciation de l'opérateur sur ses propres capacités.

```
[ ] # Importation des bibliothèques

import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

[ ] # Entrée des données

l = 21
e_l = .05
L = 29.7
e_L = .05

N = 100000 # nombre de simulations Monte-Carlo
```

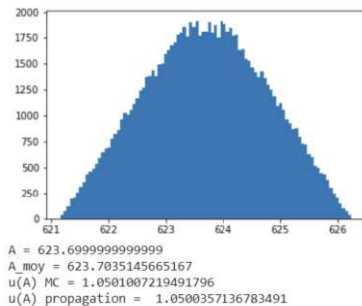
```
[ ] # Simulations
l_MC = l + rd.uniform(-e_l, e_l, N)
L_MC = L + rd.uniform(-e_L, e_L, N)
A_MC = l_MC * L_MC

[ ] # Représentation de l'histogramme de A
plt.hist(A_MC, bins='rice')
plt.show()

# Calculs de l'aire et de son incertitude
A = l * L
A_moy = np.average(A_MC)
u_A = np.std(A_MC, ddof=1)

u_l = e_l / np.sqrt(3)
u_L = e_L / np.sqrt(3)
u_A_prop = A * np.sqrt((u_l/l)**2 + (u_L/L)**2)

# Affichage des résultats
print("A =", A)
print('A_moy =', A_moy) #choix alternatif
print('u(A) MC =', u_A)
print('u(A) propagation =', u_A_prop)
```



Commentaire

Il y a deux possibilités pour calculer la valeur mesurée de l'aire :

- prendre directement le produit des deux valeurs mesurées, l et L ;
- prendre la moyenne de la simulation Monte Carlo. Les deux valeurs sont très proches (comparées à l'incertitude-type), mais différentes, et ce d'autant plus que la non-linéarité de la relation $A = l * L$ est marquée.

Il n'y a pas de réponse évidente à ce choix, qui est encore controversé chez les métrologues. Pour résumer, les bayésiens considèrent que la moyenne est la meilleure chose à faire ; les fréquentistes s'y opposent et préfèrent faire le produit des valeurs mesurées.

En CPGE on fait donc... ce que l'on préfère !

▼ 2. Mesure de volume

Imaginons qu'on connaisse la valeur mesurée du diamètre D d'une sphère, et son incertitude-type $u(D)$ associée. Quel est son volume V ?

Données

Mesurande	D
Valeur mesurée	1 cm
Incertitude-type	1 mm

Comme on connaît l'incertitude-type (c'est une donnée du problème), on fait l'hypothèse raisonnable que la distribution de probabilité modélisant le rayon de la sphère est gaussienne.

```
[ ] # Entrée des données

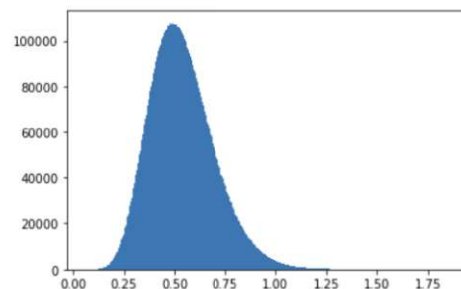
D = 1
u_D = .1

# Simulations
D_MC = D + rd.normal(0, u_D, N)
V_MC = 4/3*np.pi*(D_MC/2)**3

# Représentation de l'histogramme de V
plt.hist(V_MC, bins='rice')
plt.show()

# Calculs de l'aire et de son incertitude
V = 4/3*np.pi*(D/2)**3
V_moy = np.average(V_MC)
u_V = np.std(V_MC, ddof=1)
```

```
[ ] # Affichage des résultats
print("V =", V)
print('V_moy =', V_moy)      #choix alternatif
print('u(V) =', u_V)
```



```
V = 0.5235987755982988
V_moy = 0.5393872715337829
u(V) = 0.1602549963211476
```

A vous de jouer :

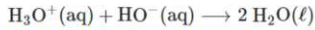
A vous de coder une simulation Monte Carlo dans l'activité expérimentale N°5 :

« Calcul de l'incertitude-type de la capacité calorifique du calorimètre $u(C_{cal})$ »

Exemple 3- TITRAGE ACIDO-BASIQUE DIRECT

Présentation du titrage

On s'intéresse au titrage d'un volume V_a d'une solution d'acide chlorhydrique (H_3O^+ , Cl^-) de concentration C_a par une solution de soude (Na^+ , HO^-) de concentration C_b . L'équation de la réaction de titrage est



Soit V_e le volume de solution versée à l'équivalence. On détermine la valeur de la concentration C_a par

$$C_a = \frac{C_b \cdot V_e}{V_a}$$

Données

Grandeurs	V_a	V_e	C_b
Valeur	20.00 mL	11.15 mL	0.1033 mol·L ⁻¹
Incertitude-type	0.017 mL	0.05 mL	0.0036 mol·L ⁻¹

```
[ ] # Importation des bibliothèques

import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
[ ] # Entrée des données du problème
```

```
Va = 20          # en mL
u_Va = 0.017     # en mL

Ve = 11.15      # en mL
u_Ve = 0.05     # en mL

Cb = 0.1033     # en mol/L
u_Cb = 0.0036  # en mol/L
```

• Quel est le résultat de la mesure de C_a ?

1. Calculer puis afficher la valeur de C_a déduite de la mesure du volume équivalent.

```
[ ] # Calcul et affichage de la concentration Ca issue de l'unique mesurage
Ca = Cb*Ve/Va
print(Ca)
```

```
0.05758975000000001
```

2. Réaliser $N = 10000$ simulations du titrage précédent selon la méthode de Monte-Carlo. Représenter l'histogramme des valeurs de C_a obtenues à l'issue de ces N simulations.

```
[ ] # Simulation de N = 10000 Titrages par la méthode Monte-Carlo

N = 1000000      # nombre de tirages à réaliser

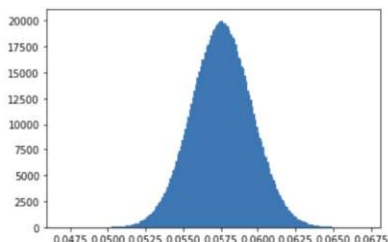
Va_sim = Va + rd.normal(0,u_Va, N)      # simulation des valeurs de Va
Cb_sim = Cb + rd.normal(0,u_Cb, N)      # simulation des valeurs de Cb
Ve_sim = Ve + rd.normal(0,u_Ve, N)      # simulation des valeurs de Ve

Ca_sim = Cb_sim*Ve_sim/Va_sim            # simulation des valeurs de Ca
```

```
[ ] # Représentation de l'histogramme
plt.hist(Ca_sim, bins='rice')

# à compléter

plt.show()
```



```
[ ] ## Analyse statistique des résultats de la simulation MC

Ca_moy = np.average(Ca_sim)      # Calcul de la valeur moyenne de Ca_sim
u_Ca = np.std(Ca_sim, ddof=1)    # Ecart-type de Ca_sim
print(Ca_moy, u_Ca)
```

```
0.05758842994195216 0.0020245308384638718
```

- 3 - Calculer et afficher la valeur moyenne des concentrations et l'écart-type (et donc l'incertitude-type) des concentrations C_a obtenues à l'issue des N simulations. En déduire le résultat de la mesure.