Isolons (par ex) A_1 (on peut chercher à isoler A_2 ou A_3 au choix) ③

$$A_1 = \frac{m_2}{k}\left(\omega^2 - \frac{k}{m_1} - \frac{k}{m_2}\right)A_3 \quad \text{(par 2e équation)}$$

On reporte dans la 1e : $-\frac{m_2}{k}\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)^2 A_1 + \frac{k}{m_2} A_1 = 0$

$$\Longleftrightarrow \left[-\frac{m_2}{k}\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)^2 + \frac{k}{m_2}\right] \cdot A_1 = 0$$

$A_1 \neq 0 \Longrightarrow -\frac{m_2}{k}\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)^2 + \frac{k}{m_2} = 0 \leftarrow$ c'est la relation, on peut simplifier.

$$\Longleftrightarrow \boxed{\left(-\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)^2 = \frac{k^2}{m_2^2}} \Longleftrightarrow \left|-\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right| = \frac{k}{m_2}$$

B.13

$$\Longleftrightarrow -\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} = \frac{k}{m_2} \quad \text{ou} \quad -\omega^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} = -\frac{k}{m_2}$$

$$\Longleftrightarrow \omega^2 = \frac{k}{m_1} \quad \text{ou} \quad \omega^2 = \frac{2k}{m_2} + \frac{k}{m_1}$$

$\omega > 0$ donc $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$ ou $\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{2k}{m_2}}$

ω_1 est la plus petite solution $\Longrightarrow \boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_1}}}$ et $\boxed{\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1} + \frac{2k}{m_2}}}$

B.14. AN $\boxed{\omega_1 = \sqrt{\frac{1{,}42 \cdot 10^3}{2{,}66 \cdot 10^{-26}}} = 2{,}31 \cdot 10^{14}\ \text{rad.s}^{-1}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{1{,}42 \cdot 10^3}{2{,}66 \cdot 10^{-26}} + \frac{2 \times 1{,}42 \cdot 10^3}{1{,}99 \cdot 10^{-26}}}$

(à 3 chiffres) $\boxed{\omega_2 = 4{,}43 \cdot 10^{14}\ \text{rad.s}^{-1}}$

B.15.

- si $\omega = \omega_1$ (4) $\begin{cases} \frac{k}{m_2} A_1 + \frac{k}{m_2} A_3 = 0 \\ \frac{k}{m_2} A_1 + \frac{k}{m_2} A_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{k}{m_2}(A_1 + A_3) = 0 \Longleftrightarrow A_1 = -A_3$

⚠ Les amplitudes A_1 et A_3 sont opposées, Mais x_1 et x_3 sont en sens inverse } c'est la vibration symétrique (les 2 atomes O vont dans la m̂ direction

- si $\omega = \omega_2$ (4) $\begin{cases} -\frac{k}{m_2} A_1 + \frac{k}{m_2} A_3 = 0 \\ \frac{k}{m_2} A_1 - \frac{k}{m_2} A_3 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \frac{k}{m_2}(A_3 - A_1) = 0$

$\omega_2^2 = \frac{k}{m_1} + \frac{2k}{m_2}$ $\Longleftrightarrow A_1 = A_3$

A_1 et A_3 identiques mais x_1 et x_3 orientés en sens opposé $\Rightarrow$ les 2 atomes O vont dans des sens opposés $\Longrightarrow$ c'est la vibration antisymétrique pour ω_2

④

B.16 Sur la figure 2, on donne $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$

avec $\omega = \omega_1$, $\lambda_1 = \frac{2\pi \times 3 \cdot 10^8}{2{,}31 \cdot 10^{14}} = 8{,}16 \cdot 10^{-6}\ m$ c'est (presque) la vibration symétrique

avec $\omega = \omega_2$, $\lambda_2 = \frac{2\pi \times 3 \cdot 10^8}{4{,}43 \cdot 10^{14}} = 4{,}25 \cdot 10^{-6}\ m$, c'est la vibration antisymétrique

Rem, on a donc un écart important pour λ_1, les hypothèses du modèles sont peut-être trop simple (oscillateur non harmonique ?)

Modélisation des modes de vibration de CO_2 (Agro 2023, TB) 1

B.1. C : $1s^2 2s^2 2p^2$ → = 2e ligne ; = 2e colonne du bloc p } 2e ligne, 4e colonne de la ligne (qui compte 8 colonnes)

O : $1s^2 2s^2 2p^4$ ⇒ 2e ligne et 4e colonne bloc p = 6e colonne.

Rem : avec les colonnes numérotées de 1 à 18, C est dans la colonne 14 et O dans la 16

B.2 $\langle O=C=O \rangle$ molécule linéaire type $\boxed{AX_2}$

B.3. $\chi_C < \chi_O$ ⇒ la liaison est polarisée $\overset{+\delta}{C}-\overset{-\delta}{O}$, $\vec{\mu_i}$

Pour la molécule, les 2 moments dipolaires de liaison se compensent

$\overset{-\delta}{O}=\overset{+2\delta}{C}=\overset{-\delta}{O}$ $\vec{\mu}=\vec{0}$, molécule apolaire

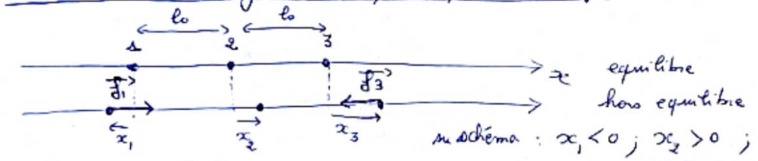
B.4. Le mode symétrique ne change pas le moment dipolaire qui est constamment nul. En revanche, $\vec{\mu}$ varie au cours des élongations antisymétriques

ex $\overset{+\delta}{O}-\overset{+2\delta}{C}——\overset{-\delta}{O}$ $\vec{\mu_1}$, $\vec{\mu_2}$, $\vec{\mu}$ $\vec{\mu}=\vec{\mu_1}+\vec{\mu_2}\neq\vec{0}$

$\vec{\mu_1}$ et $\vec{\mu_2}$ ne se compensent pas.

⇒ Seul le mode d'élongation antisymétrique est actif

B.5.



au schéma : $x_1 < 0$; $x_2 > 0$; $x_3 > 0$

Atome 1 : la longueur "ℓ" $= \ell_{1-2} = \ell_0 - x_1 + x_2$

$$\boxed{\vec{f_1} = +k(-x_1+x_2)\vec{u_x}}$$

⚠ le sens des forces dépend de x_1, x_2, x_3, le schéma est un exemple

Atome 3 : la longueur "ℓ" $= \ell_0 - x_2 + x_3$

$$\boxed{\vec{f_3} = -k(-x_2+x_3)\vec{u_x}}$$

B.6. Dans un référentiel galiléen, un système soumis à une résultante des forces nulle a un mouvement rectiligne uniforme (ou est à l'équilibre)

B.7 On néglige la pesanteur ici ⇒ pas de forces extérieures sur le centre de masse.

B.8 A la position d'équilibre $G = M_{2eq}$

On introduit les points M_{1eq}, M_{2eq}, M_{3eq} par la relation de Chasles

2

B.8. $$m_1\Big(\vec{GM_{1eq}} + \underbrace{\vec{M_{1eq}M_1}}_{x_1\vec{u_x}}\Big) + m_2\Big(\vec{GM_{2eq}} + \underbrace{\vec{M_{2eq}M_2}}_{x_2\vec{u_x}}\Big) + m_1\Big(\vec{GM_{3eq}} + \underbrace{\vec{M_{3eq}M_3}}_{x_3\vec{u_x}}\Big) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{m_1\vec{GM_{1eq}} + m_2\vec{GM_{2eq}} + m_1\vec{GM_{3eq}}}_{=0} + (m_1x_1 + m_2x_2 + m_1x_3)\vec{u_x} = \vec{0}$$

(c'est le cas particulier de l'équilibre)

D'où $\boxed{m_1x_1 + m_2x_2 + m_1x_3 = 0}$ (1)

B.9 Sur l'atome 1 : $\vec{f_1} = m_1\vec{a_1}$ $\vec{f_1}$ par B.5.

On projette selon $\vec{u_x}$: $k(-x_1+x_2) = m_1\ddot{x}_1$ $\ddot{x}_1 = \frac{d^2x_1}{dt^2}$

par (1) : $x_2 = -\frac{m_1}{m_2}(x_1+x_3)$

d'où $k\left(-x_1 - \frac{m_1}{m_2}x_1 - \frac{m_1}{m_2}x_3\right) = m_1\ddot{x}_1$

$$\Leftrightarrow k\left(-\frac{x_1}{m_1} - \frac{x_1}{m_2} - \frac{x_3}{m_3}\right) = \ddot{x}_1 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_1 + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)kx_1 + \frac{k}{m_2}x_3 = 0} \quad (2)$$

B.10 Sur l'atome 3 : $\vec{f_3} = m_1\vec{a_3}$

Selon $\vec{u_x}$: $-k(-x_2+x_3) = m_1\ddot{x}_3$

On remplace x_2 : $-k\left(+\frac{m_1}{m_2}(x_1+x_3)+x_3\right) = m_1\ddot{x}_3$ (3)

$$\Leftrightarrow \ddot{x}_3 + k\left(\frac{1}{m_2}(x_1+x_3) + \frac{x_3}{m_1}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}_3 + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)kx_3 + \frac{k}{m_2}x_1 = 0}$$

B.11 $x_1(t) = A_1\sin(\omega t)$
$\dot{x}_1(t) = A_1\omega\cos(\omega t)$
$\ddot{x}_1(t) = -A_1\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2x_1(t)$

De même $x_3(t) = A_3\sin(\omega t)$
$\dot{x}_3 = \omega A_3\cos(\omega t)$
$\ddot{x}_3 = -A_3\omega^2\sin(\omega t) = -\omega^2x_3(t)$

On remplace dans (2) et (3) :

(2) ⟺ $-A_1\omega^2\cancel{\sin(\omega t)} + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)kA_1\cancel{\sin(\omega t)} + \frac{kA_3}{m_2}\cancel{\sin(\omega t)} = 0$

(3) ⟺ $-A_3\omega^2\cancel{\sin(\omega t)} + \left(\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}\right)kA_3\cancel{\sin(\omega t)} + \frac{k}{m_2}A_1\cancel{\sin(\omega t)} = 0$

(sin ωt n'est pas la fonction nulle)

⟺ système (4)

B.12. Dans ce système, les inconnues sont A_1, A_3 et ω (pour connaître x_1 et x_3)

⇒ il faut une 3e relation