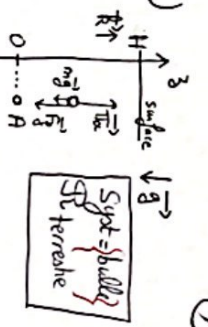


Etude d'une bulle de gaz (extrait G2E 09)

(1)

3.1. La bulle est soumise à :

- son poids $\vec{mg} = -mg \vec{e}_z$
- la poussée d'Archimède $\vec{\pi}_a = +\pi_a \vec{e}_z$
- la force de frottement $\vec{F}_f = -f_f \vec{e}_z = -6\pi\eta R \vec{v}$ avec $\vec{v} = \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$



Pour une bulle de rayon R : $\vec{mg} = -\mu_0 \times \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{e}_z$ avec $\vec{v} = \frac{dz}{dt} \vec{e}_z$

Mouvement rectiligne vers le haut : $\vec{\pi}_a = +\mu \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{e}_z$

Selon O_3 : $-mg + \pi_a - F_f = m \ddot{z} \Leftrightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 (\mu - \mu_0) \rho - 6\pi\eta R \dot{z} = m \ddot{z}$

3.2. Si $\mu \gg \mu_0$ $\mu - \mu_0 \approx \mu$ (on néglige le poids devant la poussée d'Archimède)

alors $(N) \Rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 \mu \rho - 6\pi\eta R \dot{z} = m \ddot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} = \frac{4}{3} \pi R^3 \mu_0 \ddot{z}$

3.3. Si $\sum F_z = 0$ le mouvement devient rectiligne uniforme, $\ddot{z} = 0$

Alors $v = v_\infty$ (avant le mouvement est accéléré mais la force de frottement $\uparrow$ avec la vitesse)

En a alors $(1) \Rightarrow \frac{2}{3} R^3 \mu \rho = \frac{2}{3} \rho \nu_\infty \Rightarrow \nu_\infty = \frac{2}{9} \frac{R^3 \mu \rho}{\eta}$

A.N. : $\nu_\infty = 2.922 \text{ m.s}^{-1}$

3.4. En supposant un mouvement à la vitesse constante $\nu_\infty = \frac{H}{T}$

3.5.1. La pression est celle de l'eau à la profondeur H

Dans l'eau : $dP = -\rho g dz \Leftrightarrow P(H) - P_0 = -\rho g (H - 0)$

On suppose l'équilibre mécanique entre la bulle (gaz) et l'extérieur (eau) $\Rightarrow P_{\text{gaz}} = P_{\text{eau}}$

3.5.2. entre A et B : $\int dP = -\rho g dz \Leftrightarrow P(B) - P(A) = -\rho g (z - 0)$

$\Leftrightarrow P(z) = P_A - \rho g z$ Δ : il faut choisir une origine des z (ici, $z=0$ à $t=0$)

3.5.3. On considère le gaz comme un gaz parfait

$P(z) V(z) = n R T(z)$

n est constant, $T(z)$ aussi donc $P(z) V(z) = P_A V_A$

$\Leftrightarrow V(z) = \frac{P_A V_A}{P(z)}$

3.5.4. $V(z) = \frac{4}{3} \pi R^3$ $V_A = \frac{4}{3} \pi R^3$ (R = rayon initial)

$d'ou (2) \Rightarrow r(z) = R \left(\frac{P_A}{P(z)} \right)^{1/3} \Leftrightarrow r(z) = R \left(\frac{P_A}{P_A - \rho g z} \right)^{1/3}$

3.6. On reprend 3.3 avec $r(z)$

$\nu_\infty(z) = \frac{2}{9} \frac{r(z)^3 \mu \rho}{\eta} \Leftrightarrow \nu_\infty(z) = \frac{2}{9} \frac{R^3 \mu \rho}{\eta} \left(\frac{P_A}{P_A - \rho g z} \right)^{1/3}$

$\Leftrightarrow \nu_\infty(z) = \nu_\infty \left(\frac{P_A}{P_A - \rho g z} \right)^{1/3}$

3.7. La vitesse n'est pas constante, elle dépend de $z \Rightarrow$ il faut intégrer

$\nu_\infty(z) = \frac{dz}{dt} \Leftrightarrow dt = \frac{dz}{\nu_\infty(z)}$ (on pose $t^* \text{ et } z^*$)

On somme de $0 \rightarrow T$: $\int_0^T dt = \int_0^H \frac{dz}{\nu_\infty(z)} = \int_0^H \frac{1}{\nu_\infty(z)} dz = \int_0^H \frac{1}{\frac{2}{9} \frac{R^3 \mu \rho}{\eta} \left(\frac{P_A}{P_A - \rho g z} \right)^{1/3}} dz$

$\Leftrightarrow T = \frac{1}{\nu_\infty} \frac{1}{\rho} \left[-\frac{1}{\mu g} \times \frac{1}{\frac{2}{3} + 1} (P_A - \rho g z)^{5/3} \right]_0^H = \frac{3}{5 \nu_\infty} \frac{1}{\rho} \left[-\frac{1}{\mu g} (P_A - \rho g z)^{5/3} \right]_0^H$

$T = \frac{3}{5 \nu_\infty} \frac{1}{\rho} \left[\frac{P_A^{5/3}}{\mu g} - \frac{(P_A - \rho g H)^{5/3}}{\mu g} \right] \Rightarrow T = \frac{3T}{5} \frac{P_A^{5/3} - (P_A - \rho g H)^{5/3}}{P_A^{5/3} - (P_A - \rho g H)^{5/3}}$

Par 3.5.4 : $\mu g = \frac{P_A - P_0}{H}$

Par 3.4 : $\nu_\infty = \frac{H}{T}$ $\nu_\infty \mu g = \frac{P_A - P_0}{T}$

$T = \frac{3}{5} T \frac{1 - \alpha^{5/3}}{1 - \alpha}$ avec $\alpha = \frac{P_0}{P_A}$