Extrait G2E 2016, sujet portant sur l'eau dans l'atmosphère

8. Analyse de document : croissance d'une goutte d'eau par accrétion

Lire le document suivant et répondre aux trois questions ci-après.

Document :

Une goutte d'eau de masse volumique ρ_0 tombe verticalement à travers un nuage formé de fines gouttelettes en suspension. La masse volumique moyenne du nuage est notée ρ. On suppose que les gouttelettes sont initialement immobiles dans le référentiel d'étude, et qu'elles sont absorbées par la goutte lorsque celle-ci vient à leur rencontre. La seule force extérieure prise en compte est la force de pesanteur et on admettra que la goutte est et reste sphérique. On prendra un axe vertical descendant. (Figure 5). A l'instant initial t = 0 la goutte est à l'origine O de l'axe, avec une vitesse nulle et un rayon r_0.

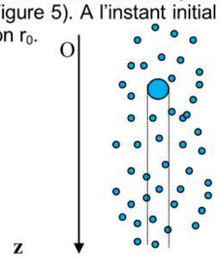

Fig. 5

Relation entre r et z :
En considérant l'accroissement de masse de la goutte dû au volume balayé par celle-ci pendant une chute de dz = vdt, on montre que : $\frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{4\rho_0}\frac{dz}{dt}$.

En effet pendant dt la goutte est descendue de dz=vdt. Elle a balayé un volume δV=πr²vdt ce qui correspond a une masse d'eau récupérée provenant des gouttelettes du nuage égale à
$\delta m = \rho\, \delta V = \rho\, \pi r^2\, dt\, v$ Or $m = \rho_0 4\pi r^3/3$ donc $dm = \rho_0 4\pi r^2 dr$

$dm = \delta m$ donne $\rho\, \pi r^2\, dt\, v = \rho_0 4\pi r^2 dr$ avec $v = dz/dt$, on a bien : $\frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{4\rho_0}\frac{dz}{dt}$

On en déduit l'évolution du rayon r de la goutte en fonction de la distance de chute z : $r(t) = r_0 + \frac{\rho}{4\rho_0} z(t)$

Obtention de l'équation du mouvement :
On souhaite ensuite établir l'équation différentielle satisfaite par z(t), sans chercher à la résoudre (On laisserait cette tâche à un logiciel d'intégration numérique).

On a : $\vec{p}(t) = m(t)\vec{v}(t) + 0$ $\quad \vec{p}(t+dt) = (m(t)+dm)(\vec{v}+d\vec{v}) = m(t+dt)\vec{v}(t+dt)$

$d\vec{p} = m(t+dt)\vec{v}(t+dt) - m(t)\vec{v}(t) = d(m\vec{v}) \quad soit \quad \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{g}$

Obtention de l'équation différentielle finale :
Compte tenu de la masse de la goutte $m = \rho_0 4\pi r^3/3$, du fait que v = dz/dt ainsi que des résultats précédents, on démontre l'équation : $\ddot{z} + \frac{3\dot{z}^2}{4\frac{\rho_0}{\rho} r_0 + z} = g$

$$\text{en effet} \quad m = \frac{4\pi r^3 \rho_0}{3} \quad et \quad \frac{d(mv)}{dt} = mg \text{ alors } \frac{4\pi r^3\rho_0}{3}\frac{dv}{dt} + v\frac{d\frac{4\pi r^3\rho_0}{3}}{dt} = \frac{4\pi r^3\rho_0}{3} g \quad soit \quad \frac{dv}{dt} + v\frac{3}{r}\frac{dr}{dt} = g$$

$$or \quad \frac{dr}{dt} = \frac{\rho}{4\rho_0}\frac{dz}{dt} \quad et \quad v = \frac{dz}{dt} \rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{3}{r}\frac{\rho}{4\rho_0}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = g \quad de\ plus \quad r(t) = r_0 + \frac{\rho}{4\rho_0} z(t) \rightarrow \ddot{z} + \frac{3\dot{z}^2}{4\frac{\rho_0}{\rho} r_0 + z} = g$$

Questions :

8.1. Donner le principe physique qui permet d'établir l'équation du mouvement. Décrire le système sur lequel porte le principe physique.
8.2. Cette modélisation conduit-elle à une vitesse limite ?
8.3. Quel phénomène important n'est pas pris en compte dans cette modélisation ?

9. Résolution de problème : chute d'une goutte d'eau constituée

On considère la chute verticale d'une goutte d'eau constituée de masse constante de rayon constant, dans l'air uniforme et dans le champ de pesanteur terrestre uniforme $\vec{g}$. On oriente l'axe des $\vec{z}$ vers le bas. Lors d'une averse, des gouttes de 3 mm de diamètre atteignent une vitesse de 8 m.s^{-1} soit environ 30 km/h. (A titre d'information il se trouve que les gouttes un peu plus grosses se fragmentent dans leur chute). On tient compte d'une force de frottement fluide laminaire du type $-\alpha\vec{v}$. Estimer l'ordre de grandeur numérique du paramètre α ainsi que l'ordre de grandeur du temps nécessaire pour que la goutte atteigne sa vitesse limite.
D'autres modèles sont-ils possibles ou souhaitables ?