

BCPST1 Mesures et incertitudes de mesure

Sommaire

BCPST1 Mesures et incertitudes de mesure, bases de métrologie

Partie 1. Dispersion des mesures

- 1) Erreur aléatoire ou systématique ?
- 2) Répétabilité et reproductibilité
- 3) Dispersion des mesures :

Partie 2. Approche statistique sur des mesures répétées

- 1) Distribution statistique des mesures, erreur aléatoire et loi normale
- 2) Probabilité d'une mesure
- 3) Influence de l'écart-type

Partie 3. Incertitude absolue ou relative, évaluation

- 1) Incertitude absolue ou relative
- 2) Incertitude-type
- 3) Evaluation pratique de l'incertitude-type.

Partie 4. Les chiffres significatifs (Important : quels chiffres garder ?)

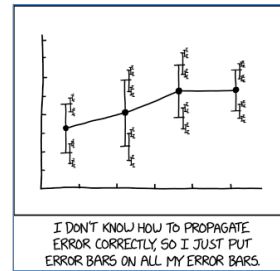
- 1) Notation scientifique
- 2) Ecriture d'une valeur expérimentale

Partie 5. Propagation dans un calcul, incertitudes-types composées

- 1) Dans une somme ou une différence
- 2) Dans un produit ou un quotient
- 3) Multiplication par un facteur constant (***)
- 4) Règles générales pour un calcul

Partie 6. Comparaison de deux valeurs, validation d'un résultat

Annexe : mesure et étalonnage



En physique-chimie, beaucoup de grandeurs sont **expérimentales** et obtenues par une **mesure**. Or, une mesure n'est jamais « parfaite » et il est fondamental de prendre conscience de sa fiabilité. Soit **X** une grandeur physique mesurable. On distingue :

- **X_{vrai}**, la **valeur vraie** de **X**, qui serait fournie par une mesure « parfaite » et théorique. *X_{vrai} est en pratique inaccessible*
- **X_{mesuré}**, la **mesure**, c'est-à-dire la valeur expérimentale, résultat d'un **mesurage**.

Problème : **X_{vrai} est inaccessible** expérimentalement. Comment l'évaluer au mieux à partir de une ou plusieurs mesures ??

Partie 1. Dispersion des mesures

1) Erreur aléatoire ou systématique ?

Si on fait une succession de mesures de **X** dans les mêmes conditions, on observe en général une **dispersion** de ces mesures autour d'une valeur moyenne. On parle alors d'**erreur aléatoire** ou accidentelle. La mesure est « **juste** » si la valeur moyenne est proche de la valeur vraie.

Ex : fluctuations aléatoires de l'appareil, « bruit », erreurs dues à des variations de conditions extérieures (température, pression, humidité)

On ne peut pas éviter une erreur aléatoire, même si on est un manipulateur irréprochable !

Quand une méthode donne une mesure décalée de **X**, c'est-à-dire quand la moyenne des mesures est toujours inférieure ou toujours supérieure à **X_{vrai}**, on parle d'**erreur systématique**.

Cela peut être le cas quand les appareils utilisés sont mal étalonnés. La mesure n'est pas juste.

Ex : thermomètre qui affiche en moyenne 2 degrés de moins que la température réelle, erreur de parallaxe sur la lecture d'une graduation, oubli de la tare d'une balance, mauvais réglage du zéro pour une mesure d'absorbance, étalonnage trop ancien de l'appareil...

L'erreur systématique conduit à un biais (les mesures sont biaisées). Si on connaît une valeur de référence, le biais est donné par la formule :

$$\text{biais} = X_{\text{moyen}} - X_{\text{référence}} \quad \text{valeur algébrique, un biais est positif ou négatif}$$

On peut aussi définir le biais relatif : $\text{biais relatif} =$

Si on a conscience d'un biais, on doit évidemment le corriger.

2) Répétabilité et reproductibilité

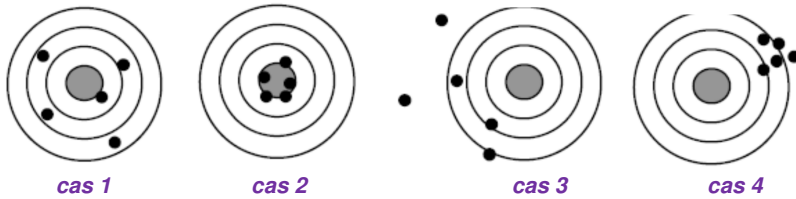
(Attention, la nuance entre les deux est subtile)

- Si des mesures successives et rapprochées de X , avec la même méthode, même opérateur, mêmes instruments sont bien compatibles, on dit que les mesures sont **répétables**.
- Si des mesures successives de X , avec différentes méthodes, différents opérateurs, différents instruments sont bien compatibles, on dit que les mesures sont **reproductibles**.

Conséquence : on a donc plus facilement répétabilité que reproductibilité

3) Dispersion des mesures : justesse ou précision (ou fidélité) ?

On peut illustrer la dispersion d'une série de mesures par le tir à la cible ci-dessous. Le centre de la cible représente X_{vrai} , on visualise 5 mesures successives



Cas 1 et 2 : on observe un tir « en moyenne » centré. Il n'y a pas d'erreur systématique. La dispersion illustre l'erreur aléatoire, elle est plus importante dans le **cas 1**. Les mesures sont **justes** dans ces deux cas (elles donnent en moyenne la bonne valeur) mais plus **précises** dans le **cas 2**.

Cas 3 et 4 : on observe en plus de l'erreur aléatoire (dispersion) une erreur systématique puisque les tirs ne sont pas centrés. Le **cas 3** n'est ni juste ni précis. Le **cas 4** n'est pas juste mais il est **précis** (ou **fidèle**).

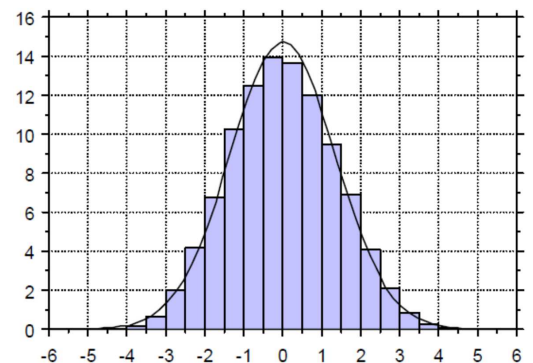
Partie 2. Approche statistique sur des mesures répétées

1) Distribution statistique des mesures, erreur aléatoire et loi normale

Si on fait un grand nombre de mesures de X et qu'on trace pour chaque intervalle de valeurs l'histogramme des valeurs obtenues, on obtient souvent une allure caractéristique.

Ex ci-contre : les intervalles sont d'une unité et la valeur moyenne de X est nulle.

Si on rétrécit les intervalles et qu'on fait un très grand nombre de mesures, l'histogramme est lissé (on ne voit plus les « escaliers ») et se rapproche de la courbe en trait plein et « en cloche » centrée sur une valeur moyenne. Cette courbe est une **Gaussienne**



Ainsi, avec une infinité de mesures de X , la distribution des valeurs est souvent une **distribution de Gauss**.

S'il n'y a pas d'erreur systématique, la valeur moyenne est alors la valeur vraie X_{vrai} . Cette valeur n'est évidemment pas accessible en pratique (il faudrait une infinité de mesures !). On note X_{moyen} la valeur moyenne et σ l'écart type théorique sur une infinité de valeurs $X_{\text{mesuré}}$.

2) Probabilité d'une mesure

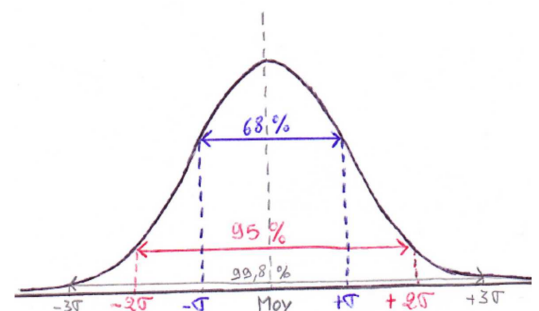
Pour une erreur aléatoire, la **courbe de distribution** normalisée d'une infinité de mesures suit souvent une **loi normale**. Elle a l'allure d'une gaussienne mais est en plus **normalisée** (c'est-à-dire que l'aire sous la courbe vaut 1). Cette courbe représente en termes techniques la densité de probabilité des mesures pour chaque intervalle de valeurs : la probabilité qu'une mesure « tombe » dans un intervalle donné de l'axe des abscisses est donnée par l'aire sous la courbe pour cet intervalle.

Rappel : pour un grand nombre de mesures, moyenne = espérance.

Ci contre : courbe de distribution : densité de probabilité en fonction de X

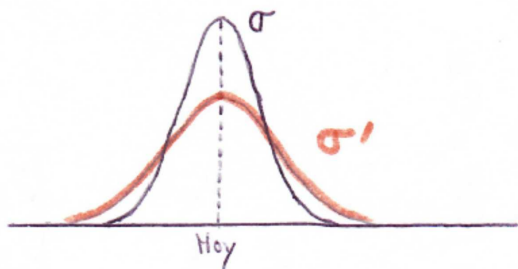
Sur une telle distribution, on constate que :

- 68% des valeurs sont « à moins d'un écart-type de la moyenne », comprises entre $X_{\text{moyen}} - \sigma$ et $X_{\text{moyen}} + \sigma$.
- 95% des valeurs sont « à moins de deux écarts-type de la moyenne », comprises entre $X_{\text{moyen}} - 2\sigma$ et $X_{\text{moyen}} + 2\sigma$.
- 99,8% des valeurs sont comprises entre $X_{\text{moyen}} - 3\sigma$ et $X_{\text{moyen}} + 3\sigma$.



A retenir qualitativement: **les erreurs les plus faibles sont aussi les plus probables.** L'erreur est supérieure à 2σ dans seulement 5% des mesures, elle est supérieure à 3σ dans 0,2% des cas.

3) Influence de σ



Ici, deux distributions « X » et « X' » ont la même valeur moyenne mais $\sigma < \sigma'$, les valeurs de « X » sont plus « précises »

σ caractérise la dispersion autour de la moyenne.

Problème : on ne connaît pas σ puisqu'on ne fait qu'un nombre limité de mesures (et pas une infinité...).

Partie 3. Incertitude absolue ou relative, évaluation

1) Incertitude absolue ou relative (***) Ne pas confondre les deux !!

- On définit une **incertitude absolue**, souvent **notée $u(X)$ ou u_x** (« u » pour uncertainty en anglais) qui permet de donner le résultat sous la forme :

$$X = X_{\text{mesuré}} \pm u_x$$

u_x est **positive** et a la **même dimension** que X

- On définit aussi une **incertitude relative** $u_x / X_{\text{mesuré}}$ (ou $u_x / |X_{\text{mesuré}}|$ si X est algébrique), positive et sans dimension. On la note souvent simplement u_x / X . Elle s'exprime en % et elle est plus « parlante » que u_x

On écrit : $X = X_{\text{mesuré}} \pm u_x / X$ près

A noter : on donne **soit l'incertitude absolue, soit l'incertitude relative**. Chacune des deux se déduit simplement de l'autre par :

Exemple : en chimie, une concentration c est fournie à 1% près. Si cette concentration est de $5 \cdot 10^{-2}$ mol/L, quelle est l'incertitude absolue ?

2) Incertitude-type

On appelle **incertitude-type** l'écart-type noté simplement σ sur la distribution théorique des valeurs. Quand on ne l'a pas, (c'est-à-dire souvent...) on peut l'assimiler en première approximation à l'écart-type expérimental σ_{exp} sur n mesures indépendantes: $u_x \sim \sigma_{\text{exp}}$

Attention, sur la calculatrice : cet écart type s'appelle s_x (et pas σ_x) ou écart-type échantillon

*Culturel : on appelle **incertitude élargie** : $u_x \text{ élargie} = k \cdot \sigma$ avec $k > 1$. k est appelé facteur d'élargissement.*

L'intervalle de confiance le plus fréquent correspond au niveau de confiance de 95%, c'est-à-dire qu'il y a 95% de chance que la valeur vraie soit dans l'intervalle proposée.

S'il n'y a qu'une erreur aléatoire, si elle suit une loi normale, si on a répété de nombreuses mesures et si on souhaite un intervalle de confiance de 95%, alors $2\sigma_{\text{exp}}$ est une bonne estimation de l'incertitude élargie. Le facteur d'élargissement est alors $k=2$.

Attention, l'incertitude n'est pas la valeur absolue de l'erreur maximale. On peut avoir la « malchance » de tomber sur une erreur supérieure à l'incertitude... mais c'est improbable (5% des cas pour l'incertitude élargie précédente) !

Pour une loi normale, quel est le niveau de confiance de l'incertitude type ?

Problème : comment faire en pratique pour évaluer « simplement » une incertitude type à notre « petit » niveau ??

3) Evaluation pratique de l'incertitude-type.

L'évaluation est de deux types (vocabulaire à connaître):

- De **type A**, ou **statistique** : en examinant *a posteriori* plusieurs mesures indépendantes de X et en chiffrant leur dispersion (pour l'erreur aléatoire) et leur justesse (pour l'erreur systématique). Plus on dispose de mesures, plus l'évaluation de type **A** est précise.
- De **type B** : *a priori* et direct, en utilisant par exemple les données fournies par le fabricant de l'appareil, les résultats de mesures antérieures ou du simple bon sens...

L'obtention précise de l'incertitude n'est pas simple et répond à une norme internationale. En pratique et sans information suffisante, on se contente parfois d'une estimation assez grossière de l'incertitude.

Pour l'estimation qui suit, on suppose que l'erreur systématique est négligeable.

a) Evaluation de type A, statistique. Incertitude type

Si on fait n mesures **indépendantes** de X , on peut calculer la valeur moyenne X_{moyen} . Cette moyenne est plus juste (= plus fiable) que chacune des mesures. En effet il est très probable que les erreurs aléatoires se compensent en partie sur la moyenne. Les lois statistiques permettent de relier les incertitudes selon : $u_{\text{(sur } X_{\text{moyen}})}} = \frac{u_{\text{(sur une mesure isolée)}}}{\sqrt{n}}$

On peut donc diminuer l'incertitude de façon très efficace en multipliant les mesures et en prenant le résultat moyen ! C'est en pratique long à faire et la valeur de n sera toujours limitée...

On peut ensuite calculer l'écart type sur les **n** mesures, σ_{exp} . Sans outil supplémentaire, σ_{exp} donne une première estimation de l'incertitude de type **A**.

- A partir de chaque mesure, on peut proposer un premier résultat sous la forme :

$$\text{Version 1 : } X = X_{\text{mesure isolée}} \pm \sigma_{\text{exp}}$$

La précision d'une mesure isolée ne dépend pas du nombre **n** de mesures, on peut avoir le même écart type avec 5 ou 30 mesures. La moyenne des mesures est en revanche d'autant plus fiable que **n** est grand.

- On peut proposer une deuxième version, à partir de la moyenne calculée :

$$\text{Version 2 : } X = X_{\text{moyen}} \pm \frac{\sigma_{\text{exp}}}{\sqrt{n}} = \text{LA meilleure estimation disponible, avec incertitude-type}$$

Si on fait ça dans deux groupes de TP, sur une dizaine de mesures par groupe, les deux groupes ont-ils les mêmes résultats ?

On considérera alors que le résultat est fiable si les intervalles proposés se recoupent. Avant de faire des calculs de moyenne et d'écart type, il faut toujours examiner les mesures et supprimer les valeurs manifestement aberrantes

- *Culturel, statistiques plus poussées : proposition d'une incertitude élargie avec un niveau de confiance de 95%*

Si la loi est normale, des tables statistiques donnent, selon la valeur de **n**, un facteur d'élargissement **k** (coefficients de Student, hors programme, seront fournis si besoin). L'idée générale est que **k** tend vers 2 si **n** est très grand et que **k** diminue si **n** augmente. L'incertitude élargie est alors obtenue en multipliant l'incertitude type précédente par **k**. On peut proposer une troisième version, associée à un **niveau de confiance en %** :

$$\text{Version 3 avec un niveau de confiance à 95% : } \quad \text{ou} \quad X = X_{\text{moyen}} \pm k \cdot \frac{\sigma_{\text{exp}}}{\sqrt{n}} \quad \text{avec incertitude élargie } k \cdot \frac{\sigma_{\text{exp}}}{\sqrt{n}}$$

Pour info, quelques exemples de facteur d'élargissement

n (mesures indépendantes)	4	5	6	7	8	9	10	15	20
k (niveau de confiance 95%)	3,18	2,78	2,57	2,45	2,37	2,31	2,26	2,14	2,09

Conclusion sur le type **A** : l'essentiel est d'indiquer clairement la version choisie, la version 3 est hors programme.

Important : **X** et σ_{exp} sont de même dimension, **ne pas oublier de mettre une unité à σ_{exp}** !!!

b) Evaluation de type B : incertitude type

Dans ce cas, pas besoin de traitement statistique. En revanche, il faut s'interroger sur chaque source d'incertitude et la **chiffrer** ou au moins la **majorer**. Voici quelques cas fréquents.

➤ Instruments gradués

Pour les valeurs repérées par des graduations, **l'erreur maximale de lecture est d'une demi-graduation**. L'incertitude type est inférieure à cette erreur, on montre qu'elle est :

$$u_{\text{lecture}} = \frac{\text{demi-graduation}}{\sqrt{3}} = \frac{\text{graduation}}{\sqrt{12}}$$

- *Une température repérée sur un thermomètre à alcool gradué tous les degrés, quelle est l'incertitude de lecture ?*
- *Une mesure à la règle graduée est de 15,3 cm. Quelle est l'incertitude de lecture ?*

➤ Instrument à affichage, sans indication particulière

Les valeurs affichées par les appareils (voltmètre, balance, conductimètre) ont au minimum une incertitude absolue sur l'arrondi du digit (= dernier chiffre affiché). La notice technique de l'appareil indique au besoin plus précisément les incertitudes.

- *On lit une tension $U_{\text{lue}} = 7,52 \text{ V}$. Alors $u(U)$ >*

Cas de la balance de précision en chimie : on fait en pratique une **double pesée** : on **tare** d'abord avec le récipient vide (affichage **0,00 g**) puis on **lit** la masse. Chacune de ces deux opérations a la même incertitude. On considérera que l'incertitude de la pesée est 1 **digit**.

- *si $m = 3,61 \text{ g}$, on estime $u_m =$*

L'incertitude absolue étant constante, l'incertitude relative diminue si m augmente. Quelles sont les masses pesées avec une incertitude relative inférieure à 1 % ?

➤ Verrerie jaugée en chimie

La précision dépend de la classe **A** ou **B** : la verrerie de classe **A** est plus précise que celle de classe **B**. Le fabricant indique la **tolérance** (ex $\pm 0,02 \text{ mL}$ pour une pipette jaugée de classe B de 10 mL). Il faut encore que le manipulateur utilise correctement la pipette (cf TP).

➤ Que faire s'il y a plusieurs sources d'incertitude sur une même mesure ?

ATTENTION : sur une même mesure, il y a souvent plusieurs sources d'erreur ! Dans ce cas, soit on peut négliger certaines incertitudes devant d'autres, soit les incertitudes se cumulent. S'il y a plusieurs sources indépendantes, l'incertitude est la somme quadratique. Ainsi, si **X** est mesuré avec deux sources d'incertitudes **u1** et **u2**, alors $u(X) = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$

- *Ex 1 : Un volume V_{eq} équivalent mesuré avec une burette. On estime que l'équivalence est atteinte avec une incertitude de 1 goutte (au mieux, parfois c'est 3 ou 4) soit 0,05 mL. Si la burette est bien utilisée (super manipulateur ???) on peut prendre la tolérance indiquée par le fabricant pour le volume indiqué par la burette. Ces deux sources (estimation de l'équivalence à une ou plusieurs gouttes puis lecture de V_{eq}) sont bien indépendantes.*

Au total, l'incertitude sur V_{eq} est donc :

Si la tolérance est de 0,03 mL et l'équivalence à 1 goutte près :

On arrondit à :

La précision est meilleure que 1% si

- *Ex 2 : On détermine une longueur **l** sur un banc d'optique. On fait d'abord un réglage (mise au point) à 0,5 mm près et on lit ensuite la longueur sur le banc gradué tous les 1mm. L'incertitude sur **l** est :*

Partie 4. Les chiffres significatifs (Important : quels chiffres garder ?)

1) Notation scientifique

On doit veiller à donner les valeurs numériques avec des chiffres qui ont un sens et **éviter à tout prix de recopier sans réfléchir l'écran de la calculatrice**. Utiliser de préférence la notation scientifique des nombres, sauf pour des nombres simples (*ex : $1,4 \cdot 10^1$ s'écrit plus simplement 14*)
Exemples :

Valeur affichée par la calculatrice	Résultat : à 3 chiffres	à 2 chiffres	à 1 chiffre	Ordre de grandeur
135,796				
2014				
0,03245				
0,9726				
7006,26				

2) Ecriture d'une valeur expérimentale

Règles d'écriture d'une valeur:

- Pour u_x : **on arrondit généralement à un seul chiffre**. Si l'évaluation de u_x a été particulièrement précise on peut garder deux chiffres au maximum.

Rem : un usage ancien assez répandu est d'arrondir à la valeur supérieure, pour avoir une « marge ». Toutefois, la norme en vigueur préconise un simple arrondi. Ainsi, une incertitude de 0,5413 est arrondie à 0,5 (et pas 0,6) à un chiffre (ou 0,54 à deux chiffres).

- Pour X : **le dernier chiffre significatif** (à indiquer) **est à la même position décimale que le chiffre de l'incertitude**.

- *Exemple : X est une tension, on obtient en « brut » : $X_{\text{mesuré}} = 15,6428 \text{ V}$ et $u_x = 0,0436 \text{ V}$.
On n'écrit pas $X = 15,6428 \pm 0,0436 \text{ V}$, ce serait ridicule... On doit écrire :*

$X = \quad \pm \quad$ ou simplement $X = \quad$ (avec incertitude à deux chiffres : $X = \quad$)

ATTENTION : le nombre de chiffres à garder dépend aussi du premier : $1,24 \cdot 10^2$ est relativement aussi précis que $0,96 \cdot 10^2$ (précision relative à 1% environ)

A noter : quand on a une série de valeurs à calculer (dans un tableau) on doit donner le même nombre de chiffres après la virgule pour toutes.

Partie 5. Propagation dans un calcul, incertitudes-types composées

Dans un calcul, le résultat R est souvent fonction de plusieurs grandeurs mesurées ($X, Y, Z, \dots$), chacune assortie d'une incertitude. L'ensemble de ces incertitudes a évidemment un effet sur l'incertitude du résultat final R . Il est possible de calculer l'incertitude u_R à partir de $u_x, u_y, u_z, \dots$. On voit ici quelques cas simples où X, Y, Z sont des **grandeurs indépendantes (non corrélées)** et où il n'y a **pas d'erreur systématique**.

Des logiciels sont conçus pour fournir l'incertitude sur une grandeur calculée à partir des incertitudes de mesure. On peut citer les logiciels libres **GUM** (Guide of Uncertainty in Measurement de **J.M. Biansan** très complet) et **Regressi** (en TP).

Principe : on entre la formule mathématique de R et les valeurs mesurées pour $X, Y, Z, \dots$, on choisit sur chaque mesure le type A ou B de l'incertitude, le type de loi de distribution ou directement la valeur et le logiciel calcule l'incertitude sur R .

On se contente d'exposer ci-après comment évaluer l'incertitude sur R quand la fonction mathématique est simplement une somme, une différence, un produit ou un quotient.

1) Dans une somme ou une différence : les incertitudes absolues se cumulent

Si R est de la forme $R = X + Y$ ou $R = X - Y$

On suppose que X et Y sont **indépendants**, on a évalué leurs incertitudes par une méthode de type A ou de type B. A noter X et Y sont nécessairement de même dimension !

L'incertitude absolue sur le résultat d'une somme ou d'une différence est la somme quadratique des incertitudes absolues. Avec deux termes, on obtient :

$$\text{Somme ou différence : si } R = X + Y \text{ ou } R = X - Y \text{ alors } u(R) = \sqrt{(uX)^2 + (uY)^2}$$

*Exemple : on calcule une tension U par $U = U_1 + U_2$ avec $U_1 = 3,21 \pm 0,05 \text{ V}$ et $U_2 = 15,0 \pm 0,5 \text{ V}$
Calculer l'incertitude absolue et relative sur U :*

2) Dans un produit ou un quotient : les incertitudes relatives se cumulent

Si R est de la forme $R = X \cdot Y$ ou $R = X / Y$ avec X indépendant de Y

Ici, X et Y n'ont pas forcément la même dimension, peut-on comparer les incertitudes absolues ?

L'incertitude relative sur le résultat d'un produit ou quotient est la somme quadratique des incertitudes relatives. Avec deux termes, on obtient :

$$\text{Produit ou quotient : si } R = X \cdot Y \text{ ou } R = X / Y \text{ alors } \frac{u_R}{|R|} = \sqrt{\left(\frac{u_X}{|X|}\right)^2 + \left(\frac{u_Y}{|Y|}\right)^2}$$

- On calcule une résistance électrique R par la formule $R = U/I$.
 U est une tension : $U = 1,25 \text{ V}$ à 2% près ; I est une intensité : $I = 84 \text{ mA}$ à 1% près
 Le calcul donne $R =$

Incertitude relative:

On peut donner le résultat : $R =$

Incertitude absolue :

On peut donner le résultat : $R =$

3) Multiplication par un facteur constant (***)

Si Y est de la forme $Y = a \cdot X$ avec a une constante alors $u_Y = a \cdot u_X$

On suppose qu'il n'y a pas d'incertitude sur la constante a . Les incertitudes relatives sur X et Y sont alors identiques.

Exemple : si $Y = 2X$, $u_Y = 2u_X$. Ne pas appliquer la formule du 1) avec $Y = X + X$, ce n'est pas une somme de deux termes indépendants !

- On calcule le volume V d'un échantillon de fer à partir de la mesure de la masse $m = 15,56 \text{ g}$ à 0,01g près et de sa masse volumique $\rho = 7,874 \text{ g.cm}^{-3}$
 Le calcul donne $V =$

Incertitude :

On peut donner le résultat :

- On souhaite mesurer la période T d'oscillation d'un pendule. On mesure au chronomètre, à 0,02 s près un temps t qui correspond à 10T. Quelle est l'incertitude sur T ?

4) Règles générales pour un calcul

Ne pas oublier : un résultat calculé ne peut pas être plus précis que les valeurs qui ont servi à le calculer ! On devrait donc *a priori* donner le résultat avec la même précision que la grandeur la moins précise qui apparaît dans le calcul (Règle 1).

Attention, beaucoup d'énoncés ne jouent pas vraiment le jeu sur les valeurs « rondes » : si le dernier chiffre significatif est un zéro, il est parfois « oublié ». La règle 1 ci-dessus ne peut pas s'appliquer dans ce cas...

Exemple : pour un dosage en chimie

- une solution à « $c = 0,2 \text{ mol/l}$ à 1% près » devrait s'écrire $c =$
- un volume « $V_0 = 10 \text{ ml}$ », prélevé avec une pipette à $\pm 0,02 \text{ ml}$ devrait s'écrire : $V_0 =$

On se contente souvent d'appliquer la Règle 2 suivante : un résultat calculé ne doit pas être plus précis que la valeur la plus précise de l'énoncé.

Ne jamais inventer de formules sur les calculs d'incertitudes ! Elles seront très probablement fausses... Seules les trois formules précédentes sont à retenir.

Ex : si $X = \tan Y$ alors u_X n'est pas $\tan(u_Y)$!
 si $X = 1/Y$ alors u_X n'est pas $1/u_Y$... !

Partie 6. Comparaison de deux valeurs, validation d'un résultat

a) Comparaison avec une valeur de référence

Pour comparer le résultat obtenu X_{mes} avec une référence X_{ref} fournie par un énoncé, on a plusieurs choix :

➤ Utiliser l'intervalle d'incertitudes :

➤ Calculer l'écart ou l'écart relatif :

➤ Calculer le coefficient appelé « z score » :

$Z_{\text{score}} =$

Dans ce cas, on estimera que le résultat est compatible avec la référence si $Z_{\text{score}} < 2$. Schéma :

Intérêt du Z_{score} ?

Exemple : on mesure la distance focale d'une lentille et on trouve $f' = 12,3 \pm 0,3 \text{ cm}$. La valeur indiquée par le fabricant est de 12,5 cm.
 Conclure

Avec les barres d'incertitudes :

Avec les écarts :

Avec Z_{score} :

b) Comparaison entre deux valeurs de façon plus générale

Supposons qu'on souhaite comparer deux grandeurs, X et Y , chacune associée à une incertitude-type notées u_x et u_y . Condition nécessaire pour comparer ?

➤ Comparaison en utilisant les barres d'incertitudes :

➤ Ecart normalisé

Pour comparer directement X et Y , on peut aussi calculer leur écart normalisé E_N . On obtient E_N en divisant l'écart $|X - Y|$ par la somme quadratique des incertitudes-types, soit :

$$E_N =$$

Si on veut comparer X à une valeur de référence X_{ref} déjà connue, l'incertitude sur la référence est supposée nulle donc

$$E_N =$$

Si $E_N < 2$: on considère que l'écart n'est pas significatif.

Si $E_N > 2$: on considère que l'écart est significatif

- Un élève détermine par dosage la concentration c d'une solution. Il trouve $c = 10,73 \pm 0,12$ mmol/L. Le laboratoire qui a préparé la solution indique $c = 10,62 \pm 0,4$ mmol/L. Ces valeurs sont-elles compatibles ?

➤ Valeur aberrante

Suite à une erreur de manipulation ou à la simple malchance, il arrive en TP d'obtenir une valeur « manifestement » très différentes des autres.

Critère d'élimination : si cette valeur est à « plus de 2 incertitude-type de la valeur attendue », mieux vaut éliminer

Ex : en TP, on peut évaluer X_{moyen} et σ . Si une valeur individuelle X vérifie : $|X_{moyen} - X| > 2\sigma$, on élimine ce X !

Pour conclure

- Exercice écrit ou oral

Sauf indication explicite, on demande seulement une valeur numérique et pas l'incertitude. Il suffit de donner le bon nombre de chiffres significatifs. **La précision du résultat doit toujours être compatible avec les valeurs de l'énoncé**

La majorité des résultats seront ainsi donnés avec 2 ou 3 chiffres significatifs (précision de l'ordre de 1%). Le 4^{ème} chiffre est souvent incertain, sa présence est justifiée si les données sont très précises. Le 5^{ème} chiffre signifie le plus souvent qu'on a bêtement copié l'écran de la calculatrice. **Donner trop de chiffres** (et donc des chiffres faux !) **est une erreur qui fait perdre des points**. Éviter aussi de trop arrondir.

Attention dans un calcul : **arrondir seulement la valeur finale, ne jamais utiliser les arrondis qui précèdent**. Le mieux est de donner une formule littérale puis faire une seule application numérique en utilisant les valeurs numériques de l'énoncé d'un seul coup

- Travaux pratiques

Les TP sont l'occasion idéale d'estimer les incertitudes sur chaque mesure. Vous devrez dans l'ordre :

- **Identifier chaque source d'incertitude** dans une manipulation. Il est important de le faire, même si on n'a pas les moyens d'aller au bout du chiffrage : ça montre que vous avez conscience du problème même si vous ne savez pas forcément le résoudre correctement
- **Chiffrer si possible l'incertitude ou la majorer** sur chaque mesure, en indiquant si c'est une évaluation de type **A** ou de type **B**, si vous proposez une incertitude type ou une incertitude élargie.
- Quand il y a plusieurs sources d'incertitudes, les comparer : on peut comparer des incertitudes absolues si elles sont de même dimension et des incertitudes relatives dans tous les cas. **Négliger sans hésitation toute incertitude beaucoup plus faible qu'une autre** mais en n'oubliant pas de le justifier ! Un facteur 10 est ce qui correspond classiquement à « beaucoup plus faible ».
 - ex : si on prépare une solution en dissolvant une masse connue à 0,1 % près dans un volume connu à 2% près, comment évaluer l'incertitude sur la concentration massique ?

- Si ce n'est pas possible, faire au moins une estimation grossière : l'incertitude est-elle de l'ordre de 1% ? De 10% ? L'ordre de grandeur en TP est souvent 1 %.
- Si un calcul est mené à partir de grandeurs mesurées et si c'est un calcul simple : évaluer l'incertitude sur le résultat par les formules de propagation. Dans ce cas, arrondir seulement le résultat final, ne pas utiliser les valeurs arrondies de chaque incertitude.
- **Valider** si possible en comparant avec un résultat attendu. Il doit alors être dans l'intervalle d'incertitude proposé. C'est aussi l'occasion de déceler une erreur systématique (ex : si tous les élèves d'un groupe trouvent un résultat inférieur à une valeur connue)

A ne pas faire :

- Prétendre qu'un résultat est « précis » ou « imprécis » tout court, ça ne veut rien dire ! Idem pour « juste », « faux » ou même « juste aux incertitudes près ». **Il faut être quantitatif**.
- Rester dans le vague : « j'ai pu faire des erreurs de manipulation ». Certes, mais lesquelles ??
- Partir battu en prétendant « ne rien comprendre aux incertitudes », les notions ne sont pas si compliquées.

Conseil : relire ce poly de temps en temps pour bien s'approprier les notions. L'avoir à portée de main en TP.

Annexe : mesure et étalonnage

Très souvent, la grandeur physique effectivement mesurée par un instrument n'est pas directement celle recherchée mais est liée à celle recherchée. La déduction de la grandeur cherchée, notée **X**, à partir de la mesure, notée **Y**, s'appelle un **étalonnage**. L'étalonnage est fait en mesurant **Y** pour des étalons dont on connaît **X** et en comparant les deux.

- Soit déjà fait en usine sur l'appareil ou l'instrument de mesure. L'instrument donne alors directement **X** (c'est plus pratique !)
- Soit à faire avant mesure par l'utilisateur

Quelques exemples :

Thermomètre à alcool : la mesure **Y** est la hauteur du liquide, elle-même liée à son volume qui augmente avec la température **X**. L'étalonnage peut se faire en mettant le thermomètre La réglette qui repère la hauteur est directement graduée en °C, à utiliser directement.

Sonde de température (thermomètre électrique). La mesure **Y** est une tension électrique qui est elle-même fonction de la température **X**. Si le thermomètre affiche directement la température, c'est qu'il est étalonné.

Balance : la grandeur mesurée **Y** est une force (le poids), elle-même proportionnelle à la masse **X**. L'étalonnage est en principe déjà fait, l'affichage est directement une masse. La balance doit être posée sur une surface bien horizontale, ne pas la poser de travers. Attention, sur la Lune, le champ de pesanteur est plus faible, le poids est plus faible, la balance afficherait une masse plus petite que sur Terre. De même, dans l'eau la force exercée diminue à cause de la poussée d'Archimède (vers le haut, compense en partie le poids), une balance immergée donne un résultat faux. Ne pas utiliser de balance dans son bain !

pH-mètre : la mesure **Y** est une tension, elle-même fonction affine du pH (= **X**). Il est nécessaire d'étalonner avec deux solutions de pH connus (solutions tampons) pour ajuster les deux paramètres de la droite et avoir un affichage direct en unités pH

Dosage par colorimétrie avec un spectrophotomètre : l'appareil mesure une absorbance **Y**, elle-même proportionnelle (sous conditions) à la concentration **X** d'une espèce colorée. Pour l'étalonner, on prépare une série de solutions de concentrations connues et on mesure leur absorbance **Y**. On reporte **Y** en fonction de la concentration et on obtient une droite. Cela permet ensuite de déduire la concentration d'une solution à doser en reportant son absorbance **Y** sur la droite.

Un mauvais étalonnage introduit une erreur systématique dans la mesure, il est donc indispensable de bien étalonner.

Pour conclure, une citation d'Emmanuel Kant : « On mesure l'intelligence d'un individu à la quantité d'incertitudes qu'il est capable de supporter. »