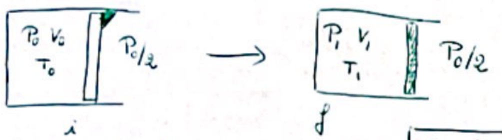
Detente d'un GP

1.



Pas de loi de Laplace ici car transformation brutale (= irreversible)

A l'état final, équilibre mécanique $\Rightarrow \boxed{P_1 = \frac{1}{2}P_0}$

Conservation de la quantité : $n = \frac{P_0V_0}{RT_0} = \frac{P_1V_1}{RT_1} \Leftrightarrow \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_0V_1}{2T_1}$

$\Leftrightarrow \frac{V_1}{T_1} = \frac{2V_0}{T_0}$ (il y a 2 inconnues $\Rightarrow$ il faut une equation de plus)

1er principe : $\Delta U = W + Q$ avec $Q = 0$ (calorifugé)

Pour un GP : $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = \frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma-1}$

La transformation est ici monobare avec $P_{ext} = \frac{P_0}{2}$ d'où $\delta W = -\frac{P_0}{2}dV$

et $W = \int_{V_0}^{V_1} -\frac{P_0}{2}dV = \frac{P_0}{2}(V_0 - V_1)$

On a donc $\frac{P_1V_1 - P_0V_0}{\gamma-1} = \frac{P_0}{2}(V_0 - V_1) \Leftrightarrow \frac{\frac{P_0}{2}V_1 - P_0V_0}{\gamma-1} = \frac{P_0}{2}(V_0 - V_1)$

$\Leftrightarrow \frac{V_1 - 2V_0}{2(\gamma-1)} = \frac{V_0 - V_1}{2} \Leftrightarrow V_1 - 2V_0 = (\gamma-1)(V_0 - V_1)$ On isole V_1

$\Leftrightarrow \boxed{V_1 = \frac{\gamma+1}{\gamma}V_0}$

et enfin $T_1 = \frac{V_1}{2V_0}T_0 \Leftrightarrow \boxed{T_1 = \frac{\gamma+1}{2\gamma}T_0}$ Le gaz s'est refroidi, $\frac{\gamma+1}{2\gamma} < 1$

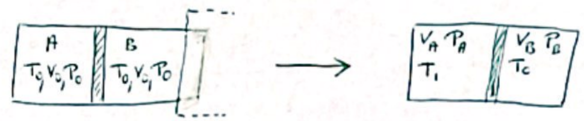
2. Là on peut utiliser la loi de Laplace. On a toujours $P_f = P_1' = \frac{P_0}{2}$

On a $P_0V_0^\gamma = P_1'V_1'^\gamma \Leftrightarrow V_1' = V_0\underbrace{\left(\frac{P_0}{P_1}\right)}_{=2}^{1/\gamma} \Leftrightarrow \boxed{V_1' = 2^{1/\gamma} \cdot V_0}$

puis T_1' par $P_1'V_1' = \underbrace{nR}_{\frac{P_0V_0}{T_0}}T_1' = \frac{P_0V_0}{T_0}T_1'$

$\Leftrightarrow \frac{P_0}{2} \cdot 2^{1/\gamma}V_0 = \frac{P_0V_0}{T_0}T_1' \Leftrightarrow \boxed{T_1' = T_0 \cdot 2^{(1/\gamma - 1)}}$

Deplacement d'un piston par chauffage



1. A l'état final $P_A = P_B$ par equilibre du piston (1)

De plus $V_{total} = V_0 + V_0 = V_A + V_B = 2V_0$ (2)

La quantité de gaz est la même en A et B : $n = \frac{P_0V_0}{RT_0} \overset{(3)}{=} \frac{P_AV_A}{RT_1} \overset{(4)}{=} \frac{P_BV_B}{RT_0}$

On a bien 4 equations pour 4 inconnues. On résoud :

(2) $\Leftrightarrow V_B = 2V_0 - V_A$

(3) $\Leftrightarrow \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_AV_A}{T_1}$ et (4) $\Leftrightarrow P_0V_0 = P_BV_B = P_A(2V_0 - V_A)$

On va déduire P_A et V_A. Par ex (3) $\Rightarrow V_A = \frac{P_0T_1}{P_AT_0}V_0$ qu'on reporte dans (4)

$P_0V_0 = P_A\left(2V_0 - \frac{P_0T_1}{P_AT_0}V_0\right) \Leftrightarrow P_0\cancel{V_0} = 2P_A\cancel{V_0} - P_0\cancel{V_0}\frac{T_1}{T_0} \Leftrightarrow 2P_A = P_0 + P_0\frac{T_1}{T_0}$

d'où $\boxed{P_A = P_0\frac{T_0 + T_1}{2T_0} = P_B}$ puis $V_A = \frac{P_0T_1V_0}{P_AT_0}$ donne $\boxed{V_A = \frac{2T_1}{T_0 + T_1}V_0}$

et enfin $V_B = 2V_0 - V_A$ donne $\boxed{V_B = \frac{2T_0}{T_0 + T_1}V_0}$

2. Pour un GP : $\Delta U = \frac{nR}{\gamma-1}(T_f - T_i)$

Ici $\boxed{\Delta U_A = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = \frac{P_0V_0}{(\gamma-1)T_0}(T_1 - T_0)}$ et $\boxed{\Delta U_B = 0}$

3. Dans B, transformation isotherme à T_0 donc $\delta W_B = -PdV = -nRT_0\frac{dV}{V}$

$\boxed{W_B = \int_{V_0}^{V_B} -nRT_0\frac{dV}{V} = -nRT_0\ln\frac{V_B}{V_0} = P_0V_0\ln\frac{V_0}{V_B} = P_0V_0\ln\left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0}\right)}$

Par le 1e principe : $\underbrace{\Delta U_B}_{0} = W_B + Q_B \Leftrightarrow Q_B = -W_B$

4. 1er principe appliqué au piston : $\Delta U_{piston} = -W_A - W_B + \overset{\text{piston calorifugé}}{0} \Leftrightarrow W_A = -W_B$

(autre meth : pour l'ensemble $\{A + B\}$ $W_{total} = W_A + W_B = 0$ car volume global constant)

1er principe appliqué à A : $\Delta U_A = W_A + Q_A$ On cherche Q_A

$Q_A = \Delta U_A - W_A = \Delta U_A + W_B = \frac{P_0V_0}{(\gamma-1)T_0}(T_1 - T_0) + P_0V_0\ln\left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0}\right)$

A noter : $T_1 > T_0 \Leftrightarrow \frac{T_0 + T_1}{2T_0} > 1$; On a donc $W_B > 0$, le gaz B reçoit du travail et fournit de la chaleur.