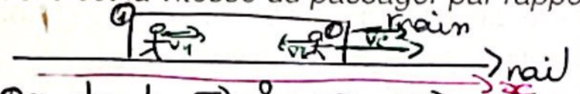
5- Exemples

- On considère un passager qui se déplace dans un train en marchant à 4 km/h. Le train avance en ligne droite à 160 km/h.

Quelle est la vitesse du passager par rapport aux arbres? Son accélération?



Ra = terrestre | $\vec{v_e}' = 160$ km
Rr = train | $\underbrace{\vec{v_1}' = \vec{v_2}'}_{\vec{v_r}} = 4$ km

On cherche $\vec{v_a}$? $\vec{v_a} = \vec{v_r} + \vec{v_e}$

passager n°1 $\vec{v_a} = 4 + 160 = 164$ km/h

passager n°2 $\vec{v_a} = -4 + 160 = 156$ km/h

$\vec{V_a} = \vec{V_r} + \vec{V_e} \Rightarrow$ selon Ox $V_{ax} = V_{rx} + V_{ex}$

pr 1 $V_{ax} = +V_r + V_e$

pr 2 $V_{ax} = -V_r + V_e$

- *On considère un point en mouvement à une vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel terrestre. Quelle est sa vitesse $\vec{v}_g$ dans le référentiel géocentrique?*

Ici , le référentiel absolu est le géocentrique, le relatif est le terrestre. La vitesse d'entraînement est la vitesse du sol dans le géocentrique, elle est orientée vers l'Est (sens inverse du mouvement apparent du Soleil dans le référentiel terrestre). Attention $\vec{v}_e$ n'est pas uniforme ici. Sa norme dépend de la latitude et de l'altitude. A voir selon le point.

On a : $\vec{v}_g = \vec{v}_e + \vec{v}$

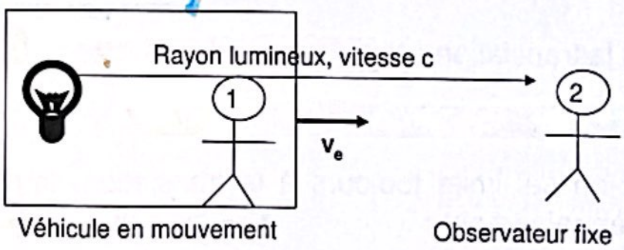
Dans ce cas, l'accélération n'est pas la même dans les deux référentiels, hors programme

6- Limites de la mécanique classique

La mesure de la vitesse **c** de la lumière dans des référentiels en mouvement a montré que cette vitesse ne dépend pas du référentiel *(mesures de c par Michelson, fin XIXème siècle)*. Sur le schéma ci-dessous, la source de lumière est simultanément fixe pour l'observateur ***1*** (référentiel $\mathcal{R}_r$.) mais en mouvement à la vitesse $\mathbf{v_e}$ pour l'observateur ***2*** (référentiel $\mathcal{R}_a$.).

D'après les lois précédentes, si ***1*** mesure C pour la vitesse de la lumière, ***2*** devrait mesurer ($\mathbf{v_e}$ + **c**). Or, ***1*** et ***2*** mesurent la même vitesse **c** !! C'est donc une vitesse absolue.

Le temps ne peut donc plus être absolu…



En mécanique relativiste, le temps devient ainsi relatif et lié au référentiel. On parle d'espace-temps pour un observateur.

Si on déclenche deux horloges identiques au même instant initial et si l'une reste fixe alors que l'autre est embarquée dans un véhicule qui va faire un tour à grande vitesse, on constatera au retour que l'horloge qui a voyagé est en retard par rapport à celle qui est restée fixe. Le temps s'est écoulé plus vite pour l'horloge fixe. De même, on constate que le temps s'écoule plus vite à proximité d'un corps massif (planète, étoile) qu'à grande distance.

Les lois de la mécanique classique ne sont valables en pratique que si les vitesses sont très inférieures à la vitesse de la lumière (**v < c/100**) exo 5

D- Changement de référentiel, composition des mouvements

1-Problème, cadre

On étudie le mouvement d'un point M simultanément dans deux référentiels $\mathcal{R}_a$ et $\mathcal{R}_r$ en mouvement l'un par rapport à l'autre. L'un des référentiel est considéré comme absolu (ou fixe), l'autre est relatif (ou mobile). Ce choix est tout à fait arbitraire, on peut échanger les rôles.
Le temps est le même dans les deux référentiels.

- Dans $\mathcal{R}_a$,repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, M a les coordonnées (x,y,z) et la vitesse $\vec{v}_a$.
- Dans $\mathcal{R}_r$ repère $(O', \vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$, M a les coordonnées (x',y',z') et la vitesse $\vec{v}_r$.

On se limite à deux référentiels en ***translation rectiligne*** l'un par rapport à l'autre. *par ex. $\mathcal{R}_r$ est lié à un train sur une ligne droite dans $\mathcal{R}_a$ terrestre.*

On peut alors prendre la même base dans les deux référentiels : $(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, Le point O' est immobile *(par déf. du repère)* dans $\mathcal{R}_r$ mais en mouvement dans $\mathcal{R}_a$:

On appelle **vitesse d'entrainement** $\vec{v}_e$ la vitesse du point **O'** dans $\mathcal{R}_a$. Si $\mathcal{R}_r$ est en translation par rapport à $\mathcal{R}_a$, tous les points immobiles dans sont « entrainés à la même vitesse $\vec{v}_e$ dans $\mathcal{R}_a$ ils ont la même vitesse d'entrainement :

O'=O ds Rr

$$\boxed{\vec{v}_e = \vec{v}_a(O')}$$ vitesse absolue de O'

2- Composition des vitesses, transformation de Galilée

relat° de Chasles

On a en décomposant : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$

On dérive /t $d(\overrightarrow{OM})/dt = d(\overrightarrow{OO'})/dt + d(\overrightarrow{O'M})/dt$

v o' par rapport O ⇒ ve

v de M par rapp a O'

Soit $$\boxed{\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r}$$

Si la translation est rectiligne **ET** uniforme : $\vec{v}_e = \overrightarrow{constante}$

3- Composition des accélérations

Si on se limite toujours à la translation, tous les points ont la même accélération d'entrainement : $\vec{a}_e = d\vec{v}_e / dt$ (= accélération de O' dans $\mathbf{R_a}$.)

En dérivant /t la loi de composition des vitesses on obtient : $\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r}$

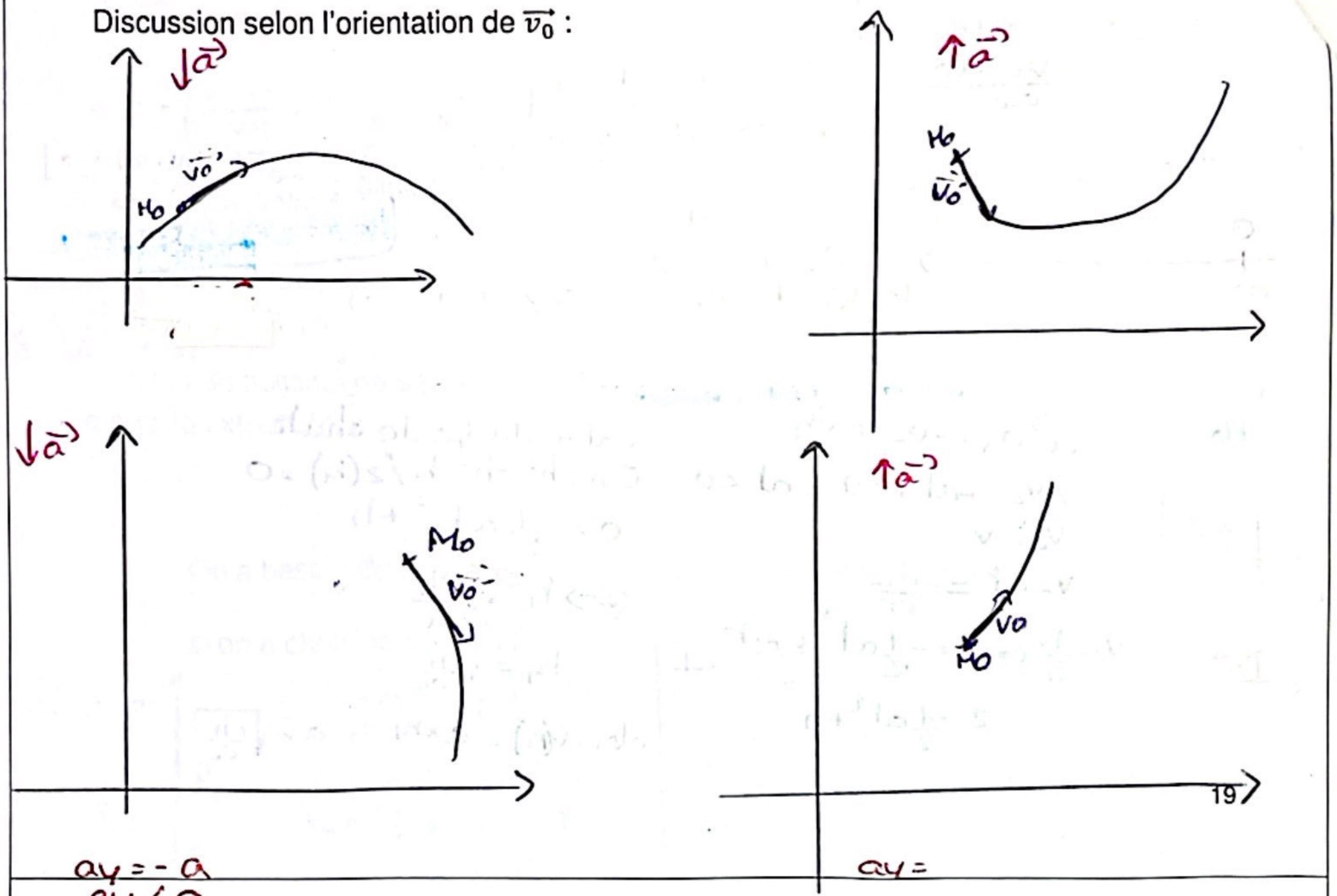
Attention, si les deux référentiels ne sont pas simplement en translation (et en particulier si l'un est en rotation par rapport à l'autre), il y a un terme de plus : l'accélération de Coriolis $\vec{a}_c$ $(\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c + \vec{a}_r)$ dont l'étude est hors programme.

Si la translation est **rectiligne uniforme** : $\boxed{\vec{a}_e = \vec{0}}$ donc $\boxed{\vec{a}_a = \vec{a}_r}$

L'accélération est donc invariante par changement de référentiels en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre.

coordonnée S
Intersect° avec abs

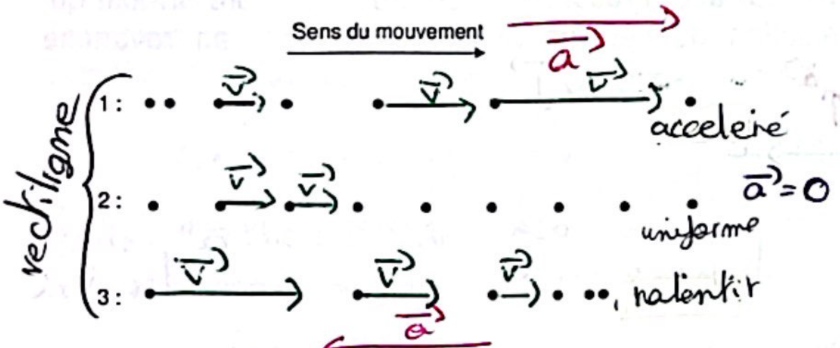
Discussion selon l'orientation de $\vec{v_0}$:

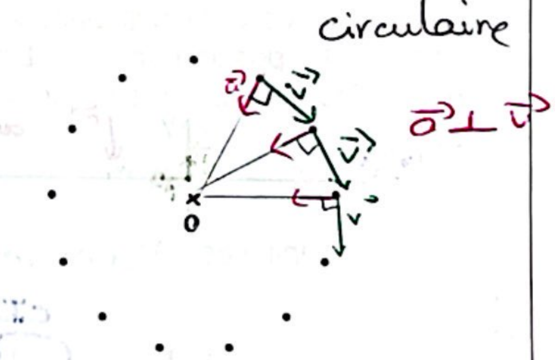


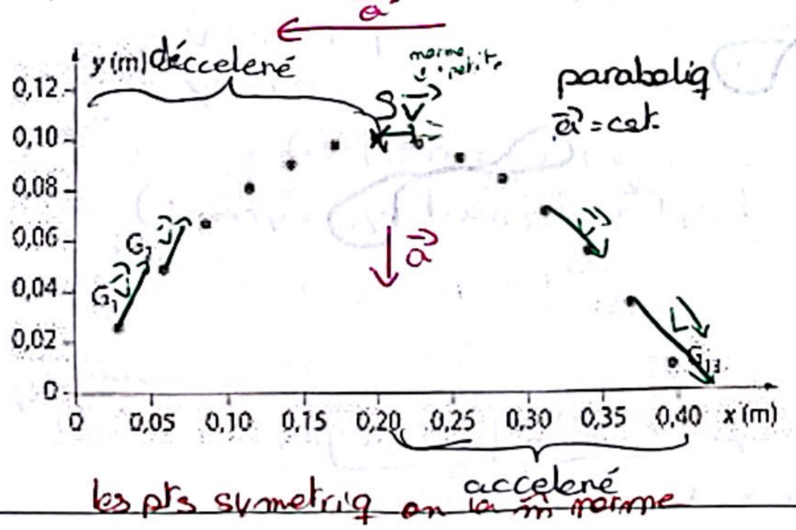
$a_y = -a$
$a_y < 0$

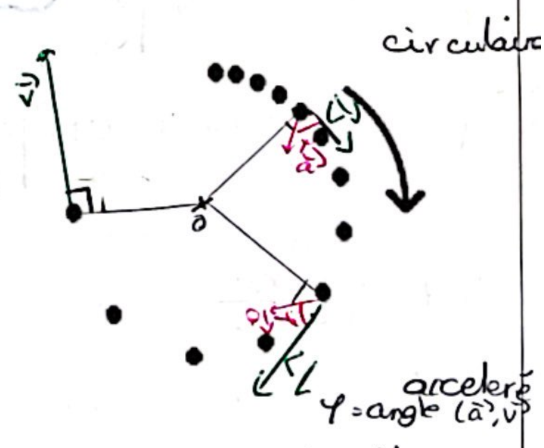
$a_y =$

Ci-dessous des exemples d'enregistrement de mouvement à partir de chronophotographie. L'intervalle de temps entre deux points successifs est constant. Donner les types de mouvements, tracer des vecteurs vitesse et accélération.









Relation entre position et vitesse :

On peut éliminer t de *(1)* et reporter dans *(2)* :

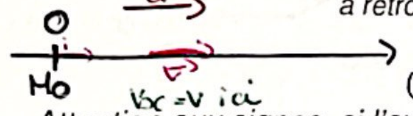
(1) $t = \frac{v_x - v_0}{a_x = cste}$ puis *(2)* $x = \frac{1}{2} a_x \left(\frac{v_x - v_0}{a_x}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_x - v_0}{a_x}\right) + x_0$

$x - x_0 = \frac{1}{2a_x}(v_x - v_0)^2 + \frac{v_0}{a_x}(v_x - v_0) = \frac{(v_x - v_0)}{a_x}\left[\frac{1}{2}(v_x - v_0) + v_0\right]$

$\frac{1}{2}v_x - v_0$

Si l'origine est la position initiale et que la vitesse initiale est nulle :

$$\boxed{x - x_0 = \frac{(v_x - v_0)(v_x + v_0)}{2a_x}}$$



à retrouver si besoin $at = 0$, $x_0 = 0$, $v_0 = 0$

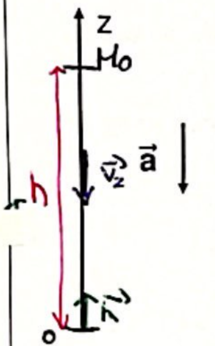
$\vec a = a\vec i$ $a = \frac{dv_x}{dt}$

(1) $\vec{v_x} = at\ (+0)$ (2) $x = \frac{1}{2}at^2\ (+0)$

(1) $t = \frac{v_x}{a}$

Attention aux signes, si l'axe est orienté en sens inverse de la vitesse. (2) $\Rightarrow x = \frac{1}{2}a\frac{v_x^2}{a^2} = \frac{v_x^2}{2a} = \frac{v^2}{2a}$

A t = 0, la vitesse est nulle et $z_0 = h$. Exprimer v_z, v et z en fonction de t et a



$\vec a$ $a_z = -a = \frac{dv_z}{dt}$

$\Rightarrow v_z = -at + \underset{0}{cst} = at < 0$

$v_z = -v$

$v = at = -\frac{dz}{dt}$

$v_z = \frac{dz}{dt} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}at^2 + \underset{\text{par CI}}{cst}$

$z = -\frac{1}{2}at^2 + h$

Calcul du tps de chute

On cherche $t_1 / z(t_1) = 0$

$0 = -\frac{1}{2}at_1^2 + h$

$\Leftrightarrow t_1^2 = \frac{2h}{a}$

$t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a}}$

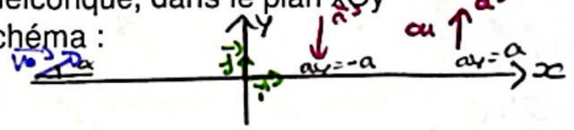
alors $v(t_1) = a \times t_1 = a \times \sqrt{\frac{2h}{a}}$

3- Mouvement de vecteur accélération constante

On considère un point de vitesse initiale $\vec{v_0}$ et d'accélération constante $\vec a$.

On doit d'abord choisir un repère. Le plan est muni d'un repère xOy. Il parait judicieux de choisir un des axes colinéaire au vecteur accélération. On peut aussi prendre un axe qui contient la position initiale. L'orientation du vecteur vitesse initiale est en revanche quelconque, dans le plan xOy $\vec a = a_y\vec j$

Schéma :



Conditions initiales : $M_0(x_0, y_0)$ $\vec{v_0}\begin{cases} v_{0x} = +v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_{0y} = +v_0 \cdot \sin\alpha \end{cases}$ Accélération : $\vec a\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = \pm a \end{cases}$

lois horaire x et y en fⁿ tps

CI

Vecteur vitesse : $\vec V\begin{cases} v_x = cst = v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y = a_y \cdot t + cste = a_y t + v_0 \sin\alpha \end{cases}$ par $a_x = \dot v_x$, $a_y = \dot v_y$

Position, lois horaires : $\vec{OM}\begin{cases} x = v_0\cos\alpha\, t + x_0 = x(t)\ (1) \\ y = \frac{1}{2}a_y t^2 + v_0 \sin\alpha \cdot t + y_0 = y(t)\ (2) \end{cases}$

Equation de la trajectoire :

(1) $t = \frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos\alpha}$

report ds 2 : $y = \frac{1}{2}a_y\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)^2 + \underbrace{v_0 \sin\alpha\left(\frac{x - x_0}{v_0 \cdot \cos\alpha}\right)}_{\tan\alpha(x - x_0)} + y_0$ à adapter et simplifier

Si $x_0 = 0$ $y = \frac{x^2 a_y}{2v_0^2 \ldots} + \tan\alpha\ x + x_0$ parabol

C- Mouvements particuliers (à savoir traiter)

1- Mouvement rectiligne uniforme

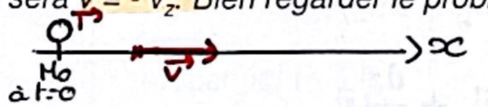
C'est le mouvement le plus simple, le vecteur vitesse est constant.

Meilleur choix de coordonnées : un axe, par exemple Ox, colinéaire à $\vec{v}$ et dans le même sens. La trajectoire est sur l'axe, le vecteur accélération est nul.

Alors $v_x = v > 0$

Attention, l'axe est parfois orienté en sens inverse. En particulier, l'axe Oz en mécanique est en général un axe vertical vers le haut. Pour un mouvement vertical de descente, on aura alors $v_z < 0$ et la norme v sera $v = -v_z$. Bien regarder le problème !!

La position x(t) s'obtient par



$\vec{v} = \underbrace{v\vec{i}}_{cst} = \frac{dx}{dt}\vec{i}$

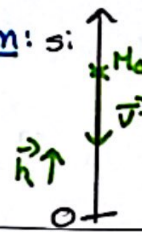
$x(t) = vt + \underbrace{cst}_{\text{par condit° initial posit°}}$

On a besoin de la position initiale x_0 à $t = 0$ $x(t) = v(t) + x_0$

si on a choisi la position initiale comme origine de l'axe : $x_0 = 0$

et $x(t) = v(t)$

Rem : si



$\vec{v} = \underbrace{v_z}_{<0}\vec{k} = -v\vec{k}$

$v_z = \frac{dz}{dt} \Rightarrow z = v_z t + \underbrace{z_0}_{\text{Par C.I}}$

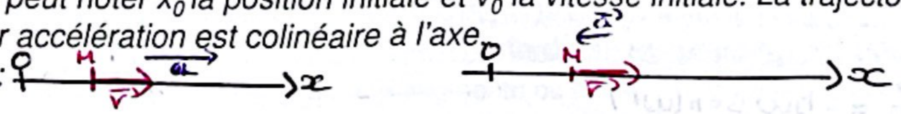
ou $z = -vt + z_0$

2- Mouvement rectiligne uniformément accéléré ou décéléré

Alors le vecteur accélération $\vec{a}$ est constant, de norme constante a.

Meilleur choix de coordonnées : un axe, par exemple Ox, colinéaire à $\vec{v}$ et dans le même sens. On peut noter x_0 la position initiale et v_0 la vitesse initiale. La trajectoire est sur l'axe, le vecteur accélération est colinéaire à l'axe.

Schéma :



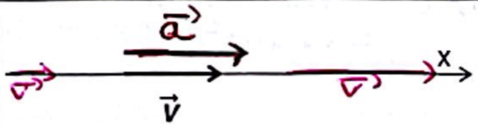
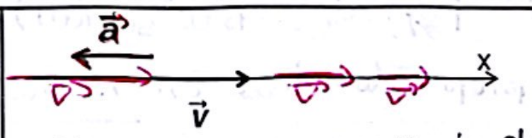
$a_x = +a$ si c'est accéléré   et   *$a_x = -a$ si décéléré* $a_x = \frac{dv_x}{dt}$

On obtient v_x en intégrant a_x : $v_x(t) = \overbrace{a(x)}^{cst}t + \underbrace{v_0}_{\text{par C.I}} = \frac{dx}{dt}$ *(1)*

Puis la position en intégrant v_x : $x(t) = \frac{1}{2}a_x t^2 + v_{0x}t +$ *(2)* $\underbrace{x_0}_{\text{Par C.I}}$ intégré

Si $a_x > 0$, v_x est croissante, v augmente, mouvement uniformément accéléré

Si $a_x < 0$, v_x est décroissante, v diminue, mouvement uniformément retardé

 *Mouvement rectiligne accéléré* a = + dv/dt (= **seul cas** où cette formule « marche »)	 *Mouvement rectiligne retardé* s'arrête à un mom^t a = - dv/dt $v_x = -at + v_{0x}$

$v_x = at + v_0$

$v_x = v = at + v_0$

$v = v_x = -at + v_{0x}$

5- Expressions en coordonnées cartésiennes

Le vecteur ~~déplacement~~ posit° s'écrit au choix :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z \text{ ou } \qquad \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On dérive / t pour obtenir le vecteur vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z)$$

peut ê sortie car fixe

$$= \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z$$

soit

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$$

$$\vec{v}\,\begin{vmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{vmatrix}$$

On dérive une fois de plus pour obtenir l'accélération

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z$$

⚠ pas m̂ dim

$$\vec{a}\,\begin{vmatrix} a_x = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{vmatrix}$$

Exemple. On considère un mouvement plan tel que les lois horaires sont : $b > 0$

$x(t) = b.\cos(\omega t)$ et $y(t) = b.\sin(\omega t)$ avec b et ω des constantes positives

1- Donner les dimensions et unités SI des constantes $[\cos] = [\sin] = 1$ $[b] = L$ (m) $[\omega t] = 1$ en rad. $[\omega] = \frac{1}{T}$ en rad.s^{-1}

2- Donner les coordonnées et la norme de la vitesse. Commenter

3- Donner les coordonnées et la norme de l'accélération. Commenter

4- Donner l'équation de la trajectoire (en éliminant t). Commenter

2) $\vec{v}\,\begin{vmatrix} \vec{v}_x = \dot{x} = -b\omega\sin(\omega t) \\ \vec{v}_y = \dot{y} = b\omega\cos(\omega t) \end{vmatrix}$

$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{b^2\omega^2\sin^2(\omega t) + b^2\omega^2\cos^2(\omega t)} = \sqrt{b^2\omega^2\underbrace{(\sin^2\omega t + \cos^2(\omega t))}_{1}}$

$v = b\omega = cste$ mvt uniforme

3) $\vec{a}\,\begin{vmatrix} a_x = \dot{v}_x = -b\omega^2\cos(\omega t) \\ a_y = \dot{v}_y = -b\omega^2\sin(\omega t) \end{vmatrix}$

$a = \sqrt{b^2\omega^4\cos^2\omega t + b^2\omega^4\sin^2(\omega t)}$
$= \sqrt{b^2\omega^4} = b\omega^2 = cst$
$= v_x \times \omega$

prop à la vitesse en norme

4) $\cos(\omega t) = \frac{x}{b}$ et $\sin(\omega t) = \frac{y}{b}$

$\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

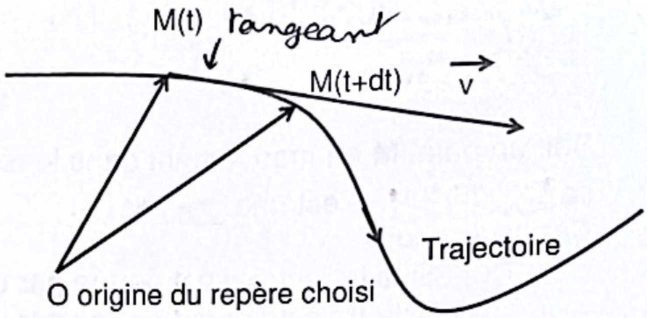
$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 + y^2}_{OM^2} = b^2 \Leftrightarrow OM = b$

cercle de centre O et de rayon b

$a_t = 0$
$\vec{a}\,\begin{vmatrix} a_x = -b\omega^2 \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$

❑ Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse est colinéaire à $\overrightarrow{d\ell}$ et dans le même sens.



$$\boxed{\vec{v} = \frac{\overrightarrow{d\ell}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dOM(t)}}{dt}}$$

Ce vecteur ne dépend pas du repère choisi mais seulement du référentiel. C'est **la dérivée par rapport à t du vecteur déplacement**. *(Eh oui, la dérivée d'un vecteur est un vecteur)*

3- Accélération (toujours dans un référentiel fixé !)

Le **vecteur accélération** $\vec{a}$ est la dérivée par rapport à t du **vecteur vitesse**. C'est donc la dérivée seconde du vecteur position

$\cancel{a = \frac{dv}{dt}}$ faux

$f(t) \xrightarrow{\text{dérivée}} \frac{df}{dt} = f'$ dérivée seconde $\frac{d^2f}{dt^2}$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\overrightarrow{v(t+dt)} - \overrightarrow{v(t)}}{dt} = \frac{\overrightarrow{dv}}{dt} = \frac{d^2\vec{l}}{dt^2} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}}$$

dimension $[f]$ $\left[\frac{f}{t}\right]$ $\frac{[f]}{[t]^2}$

Attention, **ne pas supprimer la flèche** !! La norme **a** n'est pas la dérivée de la norme **v**

La norme **a = || $\vec{a}$ ||** est homogène à une vitesse sur un temps *USI : a en m.s^{-2}*

4- Orientation des vecteurs vitesse et accélération selon le mouvement

$v_1 > v_2$ oui $\cancel{\vec{v_1} > \vec{v_2}}$

- Si **la norme de la vitesse est constante**, on parle de mouvement **uniforme.** *Ca ne veut pas dire que le vecteur vitesse est constant, il peut changer d'orientation.*
- Si **la norme de la vitesse augmente**, on parle de mouvement **accéléré**
- Si **la norme de la vitesse diminue**, on parle de mouvement **retardé ou décéléré**

Attention : ne jamais dire qu'un « vecteur augmente ou diminue », c'est un non sens !

Rappel sur les produits scalaires : $\vec{v} \cdot \vec{v} = || \vec{v} ||^2 = v^2$

$\vec{v} \begin{vmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{vmatrix}$ $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$\vec{v} \cdot \vec{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$

v et **v²** évoluent dans le même sens. Exprimons d'abord la dérivée de **v²**

regarde le signe → accéléré / décéléré

$$\frac{dv^2}{dt} = \frac{d(\vec{v} \cdot \vec{v})}{dt} = \frac{d(\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d(\vec{v})}{dt} = 2\frac{d(\vec{v})}{dt} \cdot \vec{v} = 2\,\vec{a} \cdot \vec{v}$$

Le signe de cette dérivée est donc le même que celui de $\vec{a} \cdot \vec{v}$. Si on note ϕ l'angle entre les deux vecteurs, on a $\vec{a} \cdot \vec{v} = a.\,v.\cos\phi$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a.b\cos\varphi$, >0

- Si mouvement **uniforme**, $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ donc $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ *(immobile)* ou $\vec{a} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \phi = 90°$
- Pour un mouvement **accéléré**, $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ donc $\phi \in [0, 90°[$
- Pour un mouvement **décéléré,** $\vec{a} \cdot \vec{v} < 0$ donc $\phi \in]90°, 180°[$

Donner le type de mouvement dans les cas suivants. La taille des vecteurs est-elle importante? non