Chapitre M-3- Oscillateur harmonique

***** *La proximité d'un équilibre stable peut engendrer des oscillations*********

Cadre : référentiel galiléen

A- Observation des systèmes oscillants
Oscillations autour d'une position d'équilibre, justification,
oscillations amorties ou non amorties
Cadre du programme, hypothèse de frottements négligeables
B- Oscillations harmoniques d'un point élastiquement lié à un ressort horizontal
Système : point matériel lié à un ressort, sans frottement
Equation différentielle, pulsation propre ω_0 ,période propre, position x(t), vitesse v_x (t)
Portrait de phase de l'oscillateur oscillateur harmonique
Système dissipatif : aspect du portrait sans calcul
C- Cas d'un ressort vertical
Condition d'équilibre, choix de l'origine
Equation du mouvement

A- Observation des systèmes oscillants

1- Exemples de système oscillant

- *Pendule pesant*
- *Système masse-ressort*
- *Vibration d'une corde*
- *Echelle microscopique : vibration de liaison*

2- Oscillations au voisinage d'un équilibre stable

Rappel : l'énergie mécanique d'un système conservatif est constante : $\mathbf{E_m = E_c + E_p = cste}$
Qualitatif : Un point modérément éloigné d'un équilibre stable tend spontanément à y revenir. **En se rapprochant de l'équilibre, E_p diminue donc E_c augmente**, sa vitesse augmente. Quand il passe par la position d'équilibre, il est animé d'une certaine vitesse qui le fait dépasser cette position (il passe à l'équilibre mais avec de l'élan, il ne s'y arrête pas). Il s'éloigne ensuite de l'équilibre ce qui fait augmenter $\mathbf{E_p}$ donc diminuer $\mathbf{E_c}$, sa vitesse diminue. Quand sa vitesse est nulle, la force (qui tend à faire diminuer $\mathbf{E_p}$) le ramène à nouveau vers l'équilibre, le mouvement s'inverse, $\mathbf{E_p}$ diminue alors que $\mathbf{E_c}$ augmente, il repasse par l'équilibre avec de l'élan, etc…
On peut donc observer un mouvement oscillant d'aller-retour autour d'un équilibre stable. La vitesse est maximale à chaque passage à l'équilibre, quand la vitesse s'annule, le point fait demi tour.

Que se passe-t-il si le système est soumis à des forces de frottements? Pourquoi?

Pour entretenir des oscillations dans ce cas, que faut-il faire?

Que se passe-t-il si à chaque aller retour du système on lui communique
- *Moins d'énergie que ce qu'il a perdu?*

- *Plus d'énergie que ce qu'il a perdu?*

3- Cadre du programme, hypothèse des frottements négligeables

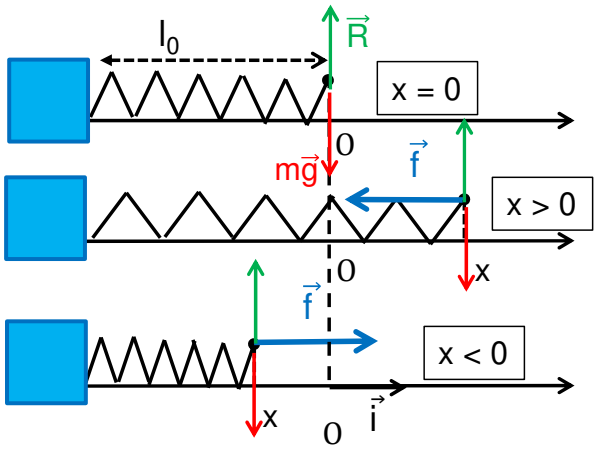
Dans la suite du cours, on va **négliger les forces de frottements**. Par ailleurs, on se limite aux oscillations d'une masse accrochée à un ressort (système masse-ressort).
Dans ce cas, les oscillations sont périodiques et on va chercher les caractéristiques du mouvement.
On appelle fréquence propre $\mathbf{f_0}$ et période propre $\mathbf{T_0}$ la fréquence et la période des **oscillations spontanées**.

Relation :

Un système peut-il osciller à une fréquence non propre?

B- Oscillations harmoniques, ressort horizontal

1- Système lié à un ressort horizontal, équation harmonique



Référentiel terrestre, système = masse m lié à un ressort **horizontal**, de raideur k et de longueur à vide l_o , sur un support. **On néglige les frottements**
Forces exercées :

- poids $m\vec{g}$
- réaction $\vec{R}$, orthogonale au support
- force élastique $\vec{f}$ =

2e loi de Newton:
On projette selon Ox :

(à noter : $m\vec{g} + \vec{R} = \vec{0}$, $m\vec{g}$ et $\vec{R}$ se compensent)

C'est une équation différentielle du 2e degré , qu'on met sous la **forme harmonique** suivante :

$\ddot{x} + \omega_0^2 . x = 0$ avec ω_0 =
ω_0 est la pulsation propre, homogène à l'inverse d'un temps

C'est une **forme d'équation à connaitre**, qui caractérise un **oscillateur harmonique**

2- Position **x(t)** et vitesse v_x **(t)** du système

La solution de cette équations différentielle peut se mettre sous trois formes équivalentes:

(a) $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ avec A et ϕ des constantes

(b) $x(t) = B\sin(\omega_0 t + \phi')$ avec B et ϕ' des constantes

(c) $x(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$ avec C et D des constantes

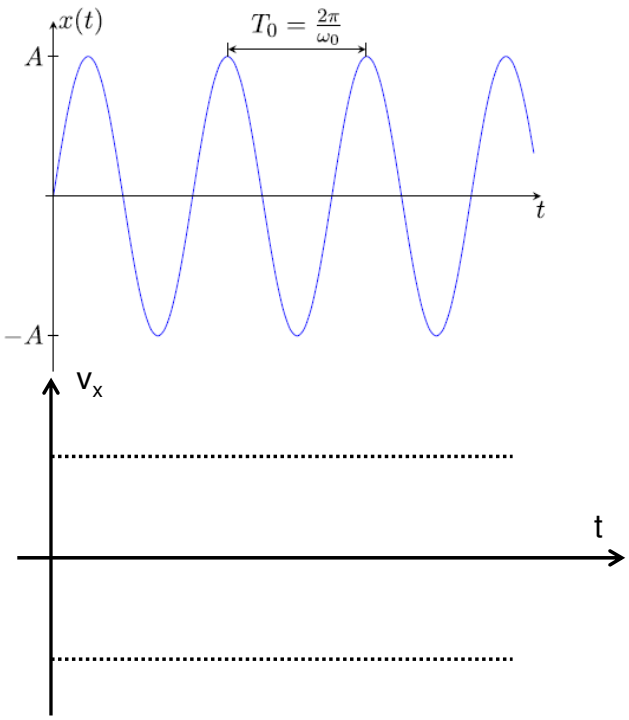
1) *Vérifier que ces 3 formes sont solutions de l'équation différentielle.*
2) *Déterminer les relations entre les constantes C et D et les constantes A et ϕ*
3) *Relier de même les constantes B et ϕ' et les constantes A et ϕ. Conclure*

On choisit généralement la première forme, soit **$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$** avec **$A > 0$**

Comment peut-on se ramener à A > 0 ?
Donner la dimension et l'USI de la constante A. A quoi correspond A?
Donner la dimension et l'USI de la constante ϕ :
Comment déterminer ces constantes?
Quelle est l'USI de ω_0 ?

On dérive /t pour la vitesse : **$v_x(t) =$**

x(t) et **v_x(t)** sont des **fonctions périodiques**, de période **$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ = période propre** de l'oscillateur



Ci-contre : exemple de courbe x(t)

a) Quelles sont ici les conditions initiales x_0 et v_0?
b) Quelle(s) valeur(s) de ϕ correspondent?
c) Donner l'allure de la courbe $v_x(t)$
d) Les conditions initiales changent-elles la période?
e) Comment varie les courbes si on change les conditions initiales?

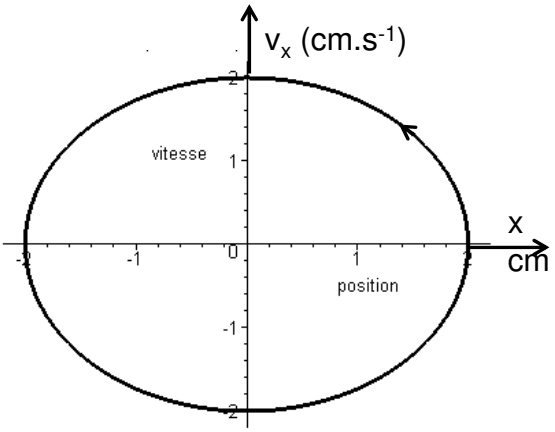
Donner les valeurs particulières de A et ϕ dans le cas d'un système initialement étiré depuis la position X_m et lâché sans vitesse initiale

Outils :

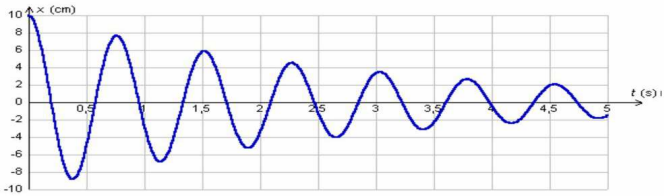
Solution :

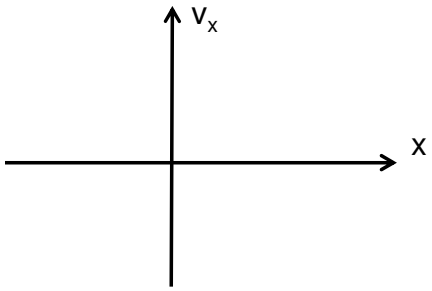
4- Portrait de phase de l'oscillateur

Définition : On appelle **portrait de phase** la courbe représentative de $\dot{x}$ en fonction de x. Cette courbe est orientée selon le sens du mouvement.
Les deux axes de **l'espace des phases** sont donc x en abscisse et $\dot{x}$ en ordonnée
Pour un système conservatif, le mouvement est périodique et la **courbe est fermée**. C'est une ellipse.
Exemple ci-contre : déterminer l'amplitude du mouvement, la vitesse maximale et la période
Comment déterminer l'équation du portrait de phase?



Dans le cas d'oscillations amorties ci-contre, donner qualitativement l'allure du portrait de phase





C- Oscillations harmoniques, ressort vertical

1- Position d'équilibre

On considère une masse m suspendue à l'extrémité d'un ressort vertical
Schéma :

Forces exercées :

Condition d'équilibre :

Position d'équilibre :

2- Mouvement vertical