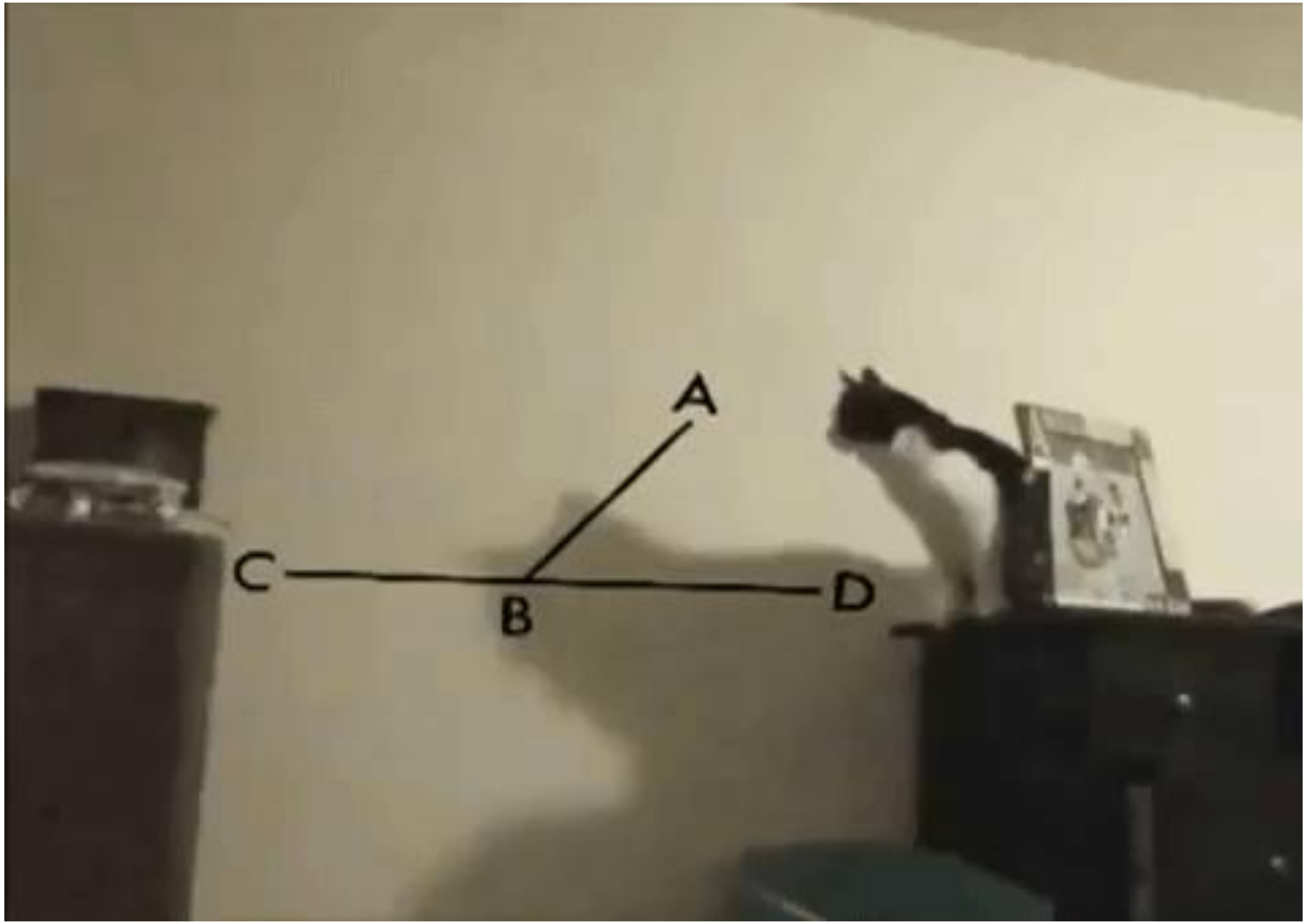
Dynamique du point matériel



M.2 Lois de Newton Cette partie permet d'abord de renforcer les compétences des étudiants relatives à la modélisation du mouvement d'un système dans le cadre de la mécanique classique, qu'il s'agisse des étapes de bilan des actions mécaniques, de projection de la deuxième loi de Newton dans la base des coordonnées cartésiennes ou de résolution des équations du mouvement. L'étude du mouvement d'un système matériel dans le champ de pesanteur uniforme constitue le cadre privilégié pour consolider les compétences précitées. D'autres situations peuvent être proposées, dès lors qu'aucune connaissance préalable n'est nécessaire quant aux caractéristiques des forces mobilisées autres que le poids. Dans un second temps, l'introduction du modèle de force de frottement linéaire en vitesse permet d'enrichir l'étude du mouvement d'un point ou d'un système matériel et de confronter les étudiants aux limites de validité de ce modèle, et ainsi de donner toute leur importance aux étapes de modélisation et de validation d'un modèle. En seconde année, la prise en compte d'un modèle non linéaire en vitesse pour la force de frottement fluide vient compléter cette étude. Cette partie donne aussi l'occasion d'une première rencontre avec le modèle de l'oscillateur harmonique, qui joue un rôle majeur en physique et dont l'étude est approfondie en seconde année. L'étude de la déformation élastique d'un matériau comme la modélisation des frottements de glissement sont une première excursion dans la science des matériaux qui peut être illustrée dans le contexte de la géologie. On cherche également, grâce à quelques exemples pertinents, à renforcer les compétences d'analyse qualitative d'une équation différentielle : écriture sous forme adimensionnée, comportement asymptotique de la solution, positions d'équilibre, type d'évolution, durée ou période d'évolution, etc.

M.2.1 Quantité de mouvement d'un système matériel

Notions et contenus	Capacités exigibles
Masse d'un système matériel. Conservation de la masse d'un système matériel fermé. Centre de masse d'un système matériel.	Justifier qualitativement la position du centre de masse d'un système matériel, cette position étant donnée.
Quantité de mouvement d'un système matériel.	Utiliser la relation entre la quantité de mouvement d'un système matériel et la vitesse de son centre de masse.

M.2.2 Lois de Newton

Notions et contenus	Capacités exigibles
Première loi de Newton, principe d'inertie. Référentiel galiléen.	Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. Discuter qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
Modélisation d'une action mécanique par une force. Troisième loi de Newton.	Établir un bilan des actions mécaniques s'exerçant sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte en représentant les forces associées sur une figure.
Deuxième loi de Newton. Équilibre d'un système.	Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées. **Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force à l'aide d'un microcontrôleur ou d'analyser un mouvement enregistré.**

Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme.	 Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
Modèle d'une force de frottement fluide linéaire en vitesse. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Exploiter une équation différentielle sans la résoudre analytiquement, par exemple : écriture sous forme adimensionnée, analyse en ordres de grandeur, existence d'une vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par résolution numérique, etc.
Modèle du frottement de glissement : lois de Coulomb.	Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.
Modèle linéaire de l'élasticité d'un matériau.	Caractériser une déformation élastique linéaire par sa réversibilité et son amplitude proportionnelle à la force appliquée. Extraire une constante de raideur et une longueur à vide à partir de mesures expérimentales ou de données. Analyser la limite d'une modélisation linéaire à partir de documents expérimentaux.
Exemple d'oscillateur harmonique : système masse-ressort en régime libre. Pulsation et période propres.	Déterminer et résoudre l'équation différentielle du mouvement. Déterminer les expressions de la pulsation et de la période propres du mouvement.

Objet de la dynamique :

déterminer les causes des mouvements (contrairement à la cinématique) à savoir les forces extérieures appliquées sur ce corps.

- Galilée (physicien italien, 1564 – 1642)
- Kepler (astronome allemand, 1571 – 1630)
- Newton (physicien anglais, 1642 – 1727)
- Einstein (physicien américain, 1879 – 1955)
- Schrödinger (physicien autrichien, 1887 – 1961)

Un point matériel :

Un point matériel est un point de l'espace physique auquel on associe une masse. Cette masse caractérise la quantité de matière que "contient" le point matériel. Le point matériel est un modèle car au sens mathématique, le volume d’un point est nul et pourtant on lui associe une quantité de matière.

Système matériel :

Un système matériel est ensemble de points matériels M_i . La masse du système est la somme des masses des points matériels qui le constituent : La masse d’un système matériel fermé ne varie pas au cours du temps : elle se conserve. (cadre du programme) Un solide est un système matériel indéformable, si les distances entre les points qui le constituent, ne varient pas au cours du temps. Dans le cas contraire, le système est dit déformable.

On se limitera à l’étude du mouvement d’un solide assimilable à un point matériel.

Modèle du point matériel

Un système matériel peut être assimilé à un point matériel si :

- ❑ l’orientation de l’objet constituant le système réel n’intervient pas dans l’étude du mouvement (on n’a donc besoin que de trois coordonnées d’espace pour le repérer)
- ❑ les dimensions du système sont négligeables par rapport à la distance d’observation

Dans ce cas le système pourra être assimilé à un point (son centre d’inertie) sur lequel on concentre toute la masse m du corps (et sa charge q si le système est chargé).

Centre d’inertie

Lorsqu’un solide est en mouvement, il existe un point particulier de ce solide, appelé **centre d’inertie** qui décrit un mouvement plus simple que les autres. C’est aussi le **centre de masse**.

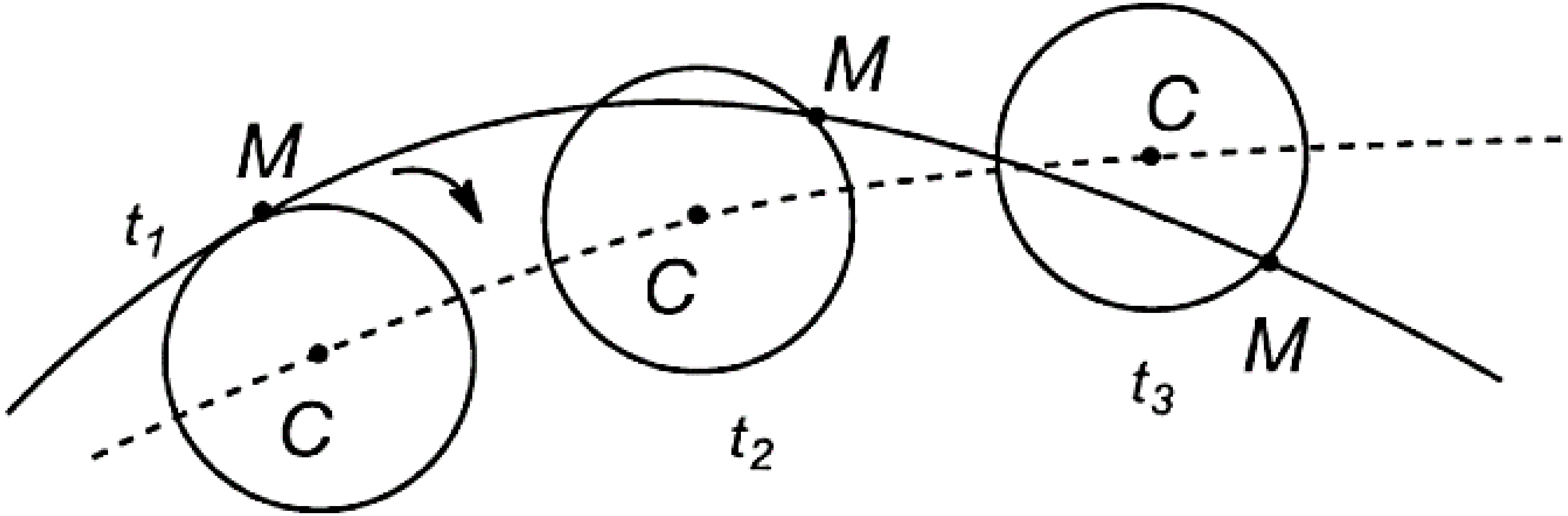
Le centre d'inertie ou centre de masse d'un système matériel correspond au point noté **barycentre** des positions des points matériels affectés de leur masse.

Par définition du barycentre, le point G barycentre vérifie : $\sum_i \ m_i\overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$

Aucun calcul de barycentre n’est au programme, il faut juste être capable de justifier sa position par analyse de la géométrie d’un système matériel.

Le centre de masse ou d’inertie d’un solide de composition homogène est situé, dans les cas où les éléments suivant de symétrie existent au centre de symétrie ou sur le plan de symétrie ou axe de symétrie : Par exemple : le centre de masse ou d’inertie d’une boule homogène est situé en son centre.

Ballon en vol

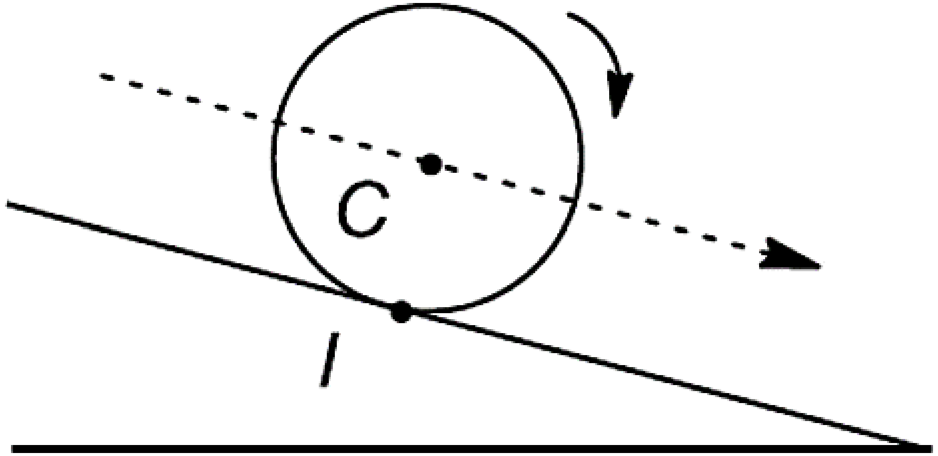


Soit un ballon en vol. Si l'influence de l'air est négligée, le mouvement de son centre C est indépendant de son orientation. le ballon peut être considéré comme un point matériel si nous le réduisons à son centre.

Cette modélisation, qui permet d'étudier la trajectoire du centre du ballon, ne permet pas de connaître le mouvement de chacun de ses points. Si le ballon est en rotation, la vitesse d'un point M de l'enveloppe du ballon sera différente de celle du point C.

L'étude du solide dans son ensemble fait appel à un autre domaine de la mécanique :

la mécanique du solide.



Le ballon précédent roule à présent sur un plan incliné. La nature du contact en I entre le plan incliné et le ballon aura une influence essentielle sur son mouvement.

La vitesse du centre d'inertie d'un ballon qui roule ne sera pas identique à celle d'un objet en translation qui glisserait sans rouler sur le plan incliné.
On devra donc obligatoirement tenir compte de la rotation du ballon. La mécanique du point matériel n'est donc pas adaptée à une telle étude, cette dernière relève du domaine de la mécanique des solides, hors programme en BCPST.

Forces, **Modélisation des actions mécaniques par des vecteurs forces**

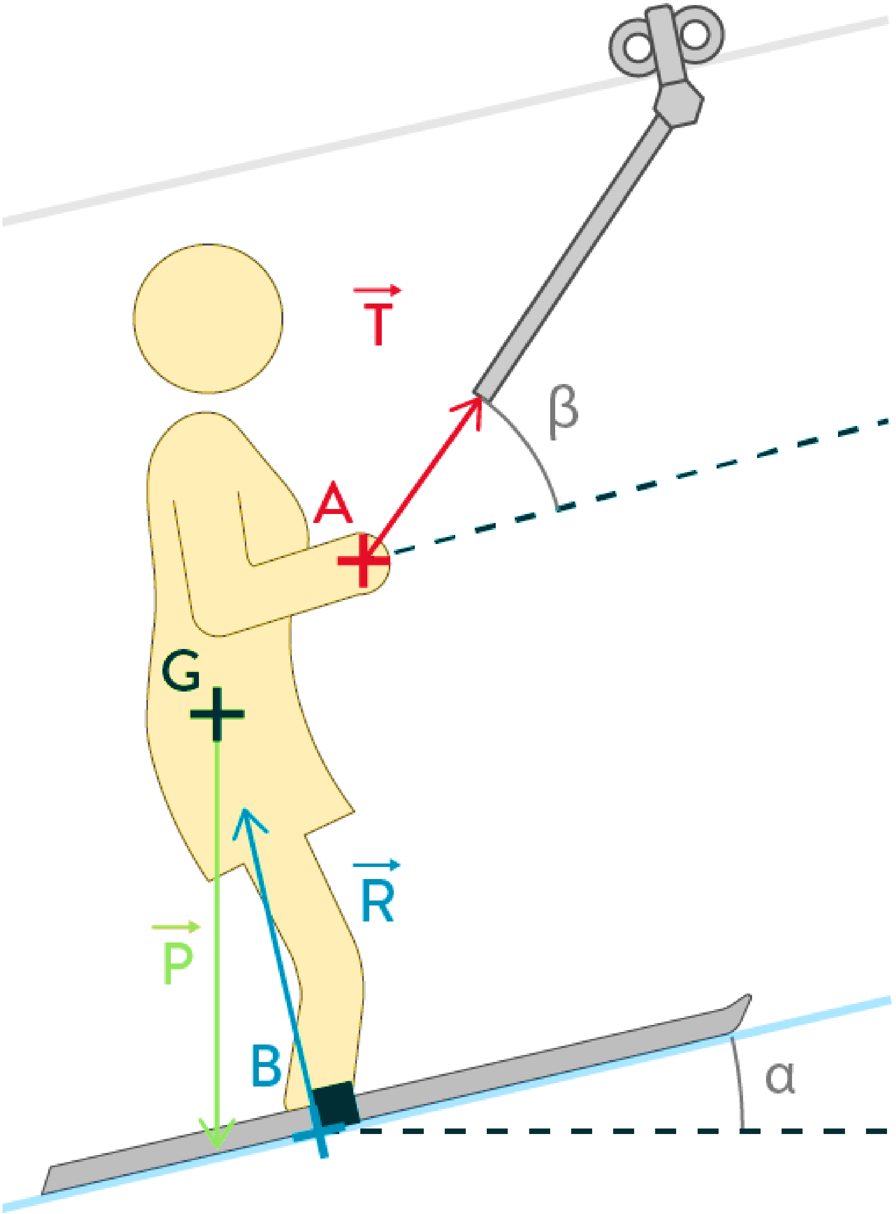
Une action mécanique est une action capable de provoquer ou de modifier le mouvement d'un corps. On la modélise par un vecteur force.

Propriétés : Un vecteur force a trois caractéristiques mathématiques, plus une quatrième d'origine physique :

- **sa direction** (la droite qui le porte),
- **son sens** (donnée par une orientation de la droite qui le porte),
- **sa valeur**, aussi appelée **norme** en mathématiques, elle s'exprime en Newton dans le système international,
- **son point d'application** (point du système qui subit l'action extérieure).

Deux vecteurs dont les trois premières caractéristiques sont identiques sont égaux. Deux vecteurs égaux peuvent avoir des points d'application différents.

Bilan des forces sur une skieuse tractée par un téléski



Système étudié : **skieuse**
Référentiel : **terrestre**

Bilan des forces :

1. $\vec{P}$ Terre/skieuse
- point d'application : centre de gravité G de la skieuse
- direction : verticale
- sens : vers le bas
- valeur : $P = m \times g$ avec P en newtons N, m est la masse de la skieuse et g l'intensité de la pesanteur 9,81 $N.kg^{-1}$

2. $\vec{T}$ perche/skieuse
- point d'application : A
- direction : angle β par rapport à l'horizontale
- sens : vers le haut
- valeur : T (en newtons)

3. $\vec{R}$ piste/skieuse
- point d'application : B
- direction : perpendiculaire à la pente
- sens : vers le haut
- valeur de $R = P = m \times g$.

Interactions à distance

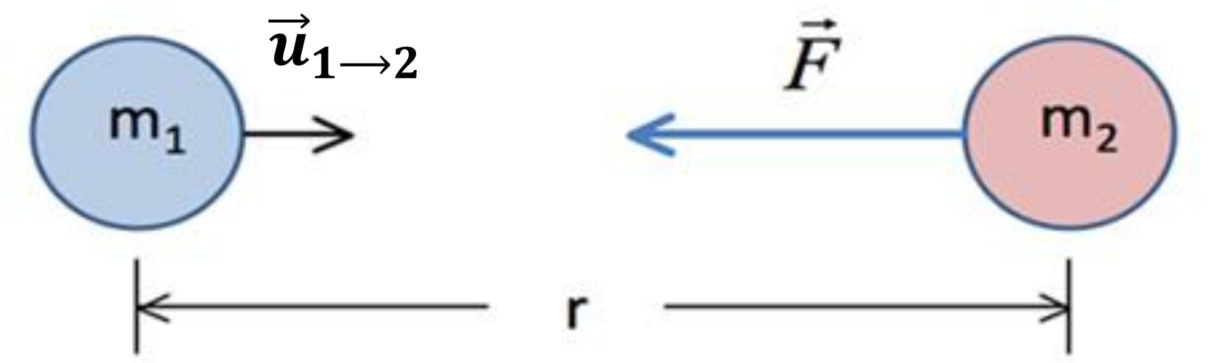
Il existe différentes types d’interactions à distance :

- Interactions gravitationnelles entre masses

- Interaction électromagnétiques entre charges

- Interactions nucléaires entre protons et neutrons d’un noyau atomique (interaction faible et interaction forte).

Interaction fondamentale gravitationnelle de Newton



$$\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\,\vec{u}_{1\to 2}$$

Les astres à symétrie sphérique de masse se comportent vu de l'extérieur comme une masse ponctuelle située en son centre.

Exemple : en assimilant le Soleil et la Terre à des masses ponctuelles, on peut définir leurs forces d'interaction gravitationnelle par :

$$\overrightarrow{F}_{S\to T} = -G\,\frac{m_S m_T}{r^2}\,\overrightarrow{u}_{S\to T}$$

Avec r la distance du centre du soleil au centre de la terre (≈ 150 millions de km)


cui cui
cui cui
$\vec{F}_{12} = -G.\frac{m_1 m_2}{d2}\vec{u}_{12}$
IL DÉLIRE !
Coin ?
C'EST L'ÂGE...
Gib 2010

Interaction avec le champ de pesanteur terrestre : poids

Le poids est une force qui s'exerce sur tout point matériel (de masse m) au voisinage d'un astre.
Il est noté : $\vec{P} = m\vec{g}$ avec $\vec{g}$ le champ de pesanteur de l'astre.

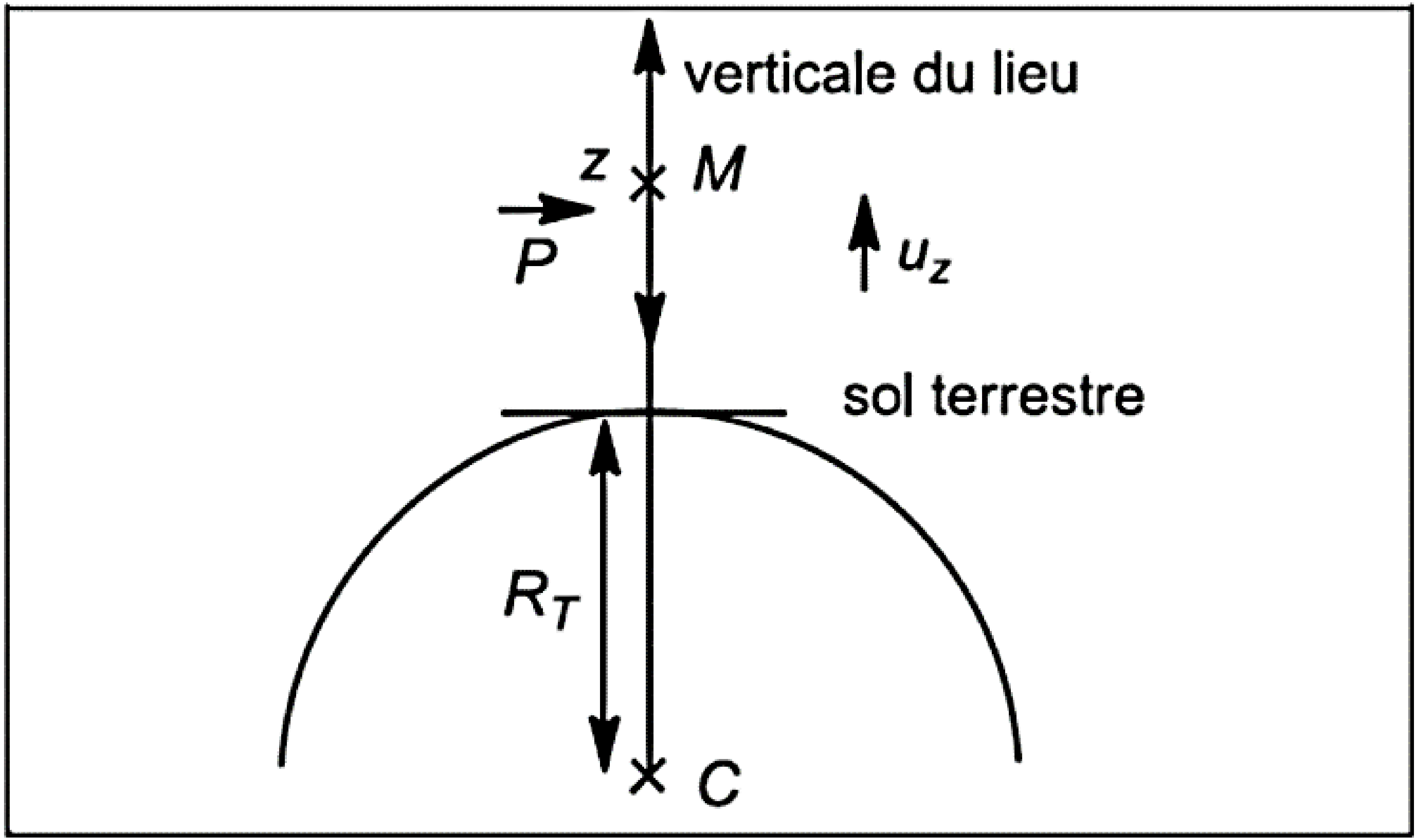
Pour nous **l'astre étant la Terre**, cette force est due :

- ❑ **A la force d'attraction gravitationnelle de la Terre**, on négligera donc les autres forces à notre niveau (pour des études plus précises il faut tenir compte de l'attraction des autres astres, en particulier celle de la Lune, on ajoute dans ce cas un terme appelé terme de marée).
- ❑ **A la force d'inertie d'entraînement due à la rotation de la Terre sur elle-même**. *Force que l'on négligera à notre niveau*.

Le poids d'un objet ponctuel en M de masse m, située à l'altitude z du sol terrestre, s'identifie à la force gravitationnelle exercée par la Terre (centre C, rayon R_T, masse m_T) sur ce point :

$$\vec{P} = -G\,\frac{m_T m}{(R_T + z)^2}\,\vec{u}_z$$

$$\vec{P} = \mathrm{m}\vec{g}$$



$$\vec{P} = -G\frac{m_T m}{(R_T+z)^2}\vec{u}_z = \mathrm{m}\vec{g}$$

Par identification :

$$\boldsymbol{\vec{g} = -\frac{G m_T}{(R_T+z)^2}\vec{u}_z}$$

Pour des points matériels au voisinage du sol :

$z \ll R_T \approx 6400$ km.

On prendra donc :

$$\|\vec{g}\| = \frac{G m_T}{(R_T)^2} \approx 9{,}8\ m.s^{-2}$$

Le champ de pesanteur sera donc généralement supposé **uniforme**.

Notion de champ (deuxième année mais déjà indispensable)

- **Un champ est associé à une propriété physique qui se manifeste en tout point d'un espace**. Cette propriété est définie par une grandeur mesurable qui dépend de la position du point.

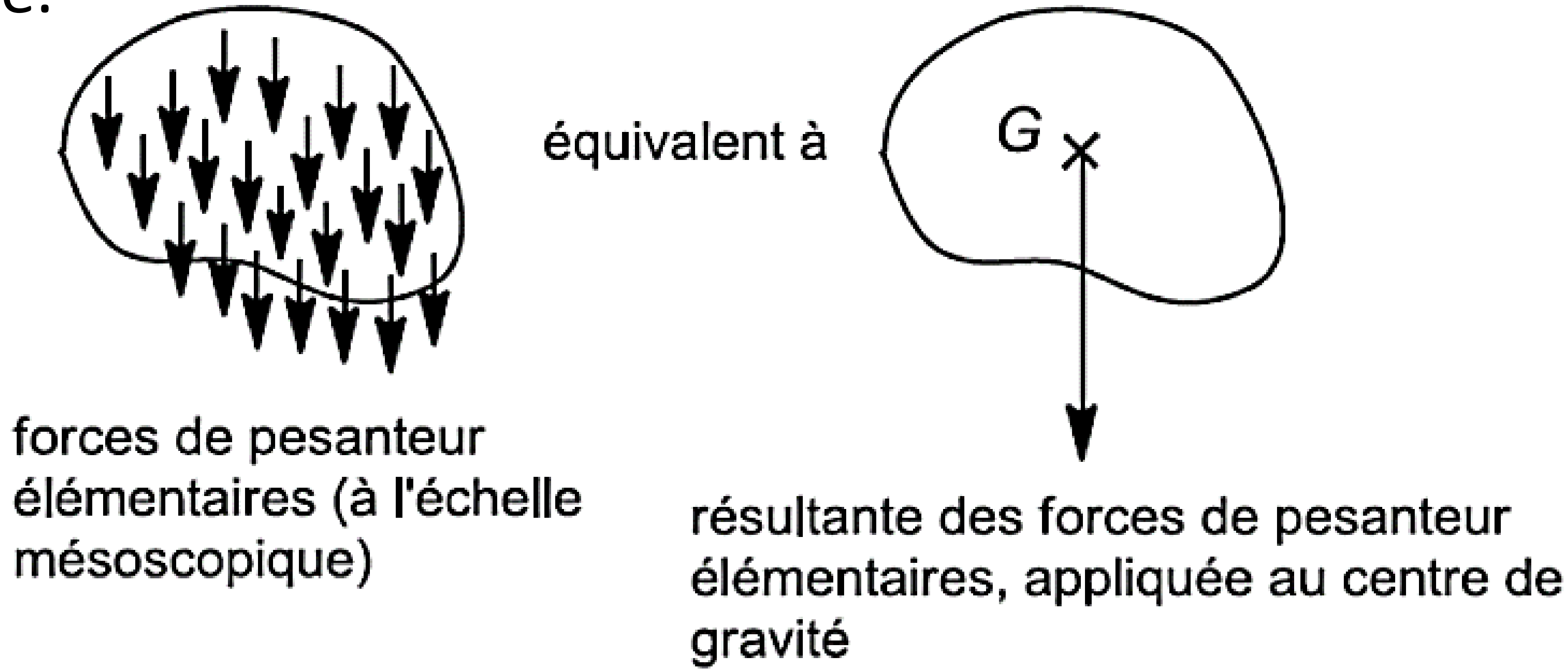
- On parle de champ vectoriel lorsque la grandeur physique mesurable le caractérisant a les propriétés d'un vecteur.

- Dans une région de l'espace, un champ est uniforme si la grandeur physique le définissant a les mêmes caractéristiques en tout point.

Si le système subissant le champ de pesanteur terrestre n'est pas ponctuel, on pourra l'assimiler à un objet ponctuel en concentrant toute sa masse en un point appelé centre de gravité, noté G de l'objet.

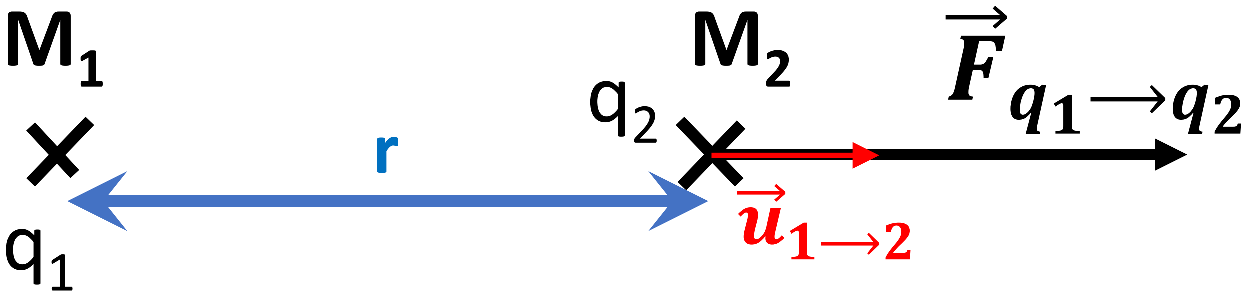
<u>Le centre de gravité</u> est le point d'application de la résultante des forces de pesanteur (somme des forces de pesanteur appliqué en chaque point du solide).

Si le champ de pesanteur est uniforme sur l'ensemble du système, alors le centre de gravité est confondu avec le centre de masse qui est aussi le centre d'inertie.



Interaction fondamentale électrostatique de Coulomb

Une charge ponctuelle q_1, située au point M_1, attire une charge ponctuelle q_2, située au point M_2 selon une force électrostatique dite coulombienne :



$$\vec{F}_{q_1 \to q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1 \to 2}$$

ε_0 : permittivité du vide

$\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1} = m^{-3} kg^{-1} s^4 A^2

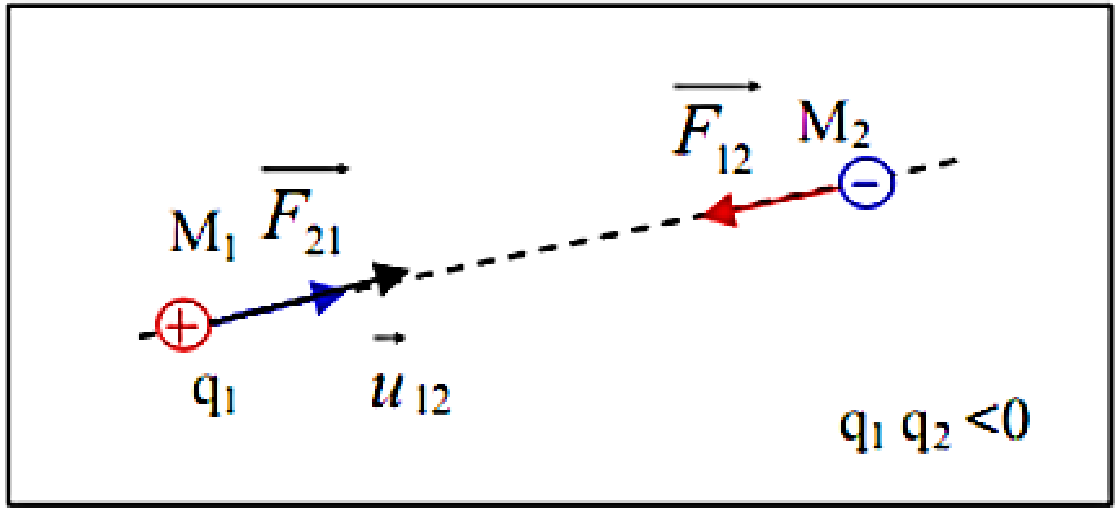
Charles-Augustin Coulomb (1736-1806) officier, ingénieur et physicien français.

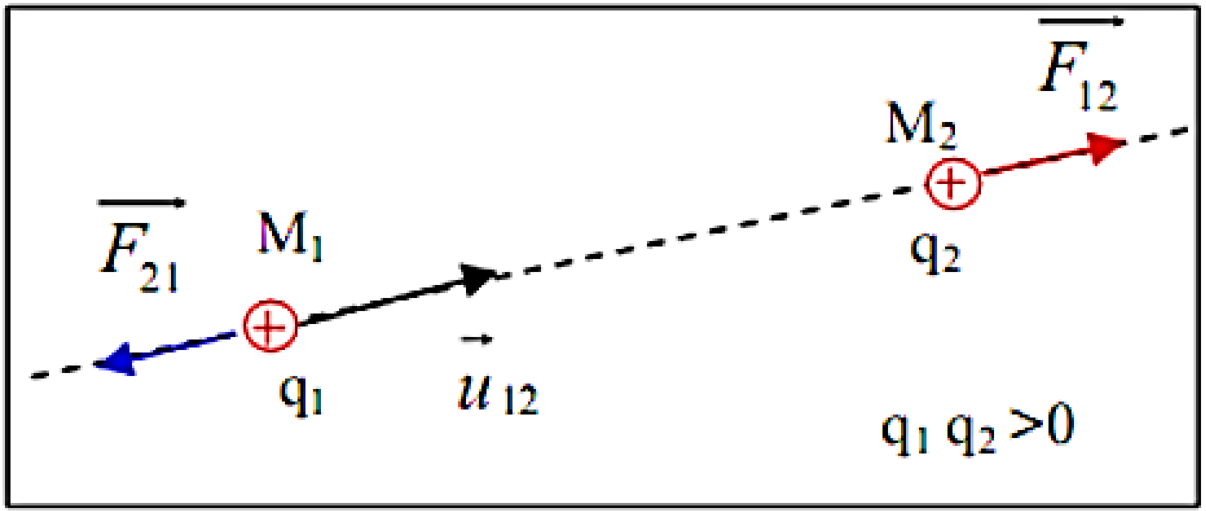
- Si q_1 et q_2 de même signe alors $q_1 q_2 > 0$:

$$\vec{F}_{q_1 \longrightarrow q_2} \text{dans le sens de } \vec{u}_{1 \longrightarrow 2}$$

- Si q_1 et q_2 de même opposé alors $q_1 q_2 < 0$:

$$\vec{F}_{q_1 \longrightarrow q_2} \text{dans le sens de } -\vec{u}_{1 \longrightarrow 2}$$





Interaction avec un champ électrostatique

Comme pour l'interaction gravitationnelle on peut définir un champ électrique en tout point de l'espace aux alentours d'une ou de plusieurs charges.

Un point matériel de charge q, placé dans ce champ électrique $\vec{E}$, est soumis à la force électrique : $\boldsymbol{\vec{F} = q\vec{E}}$.

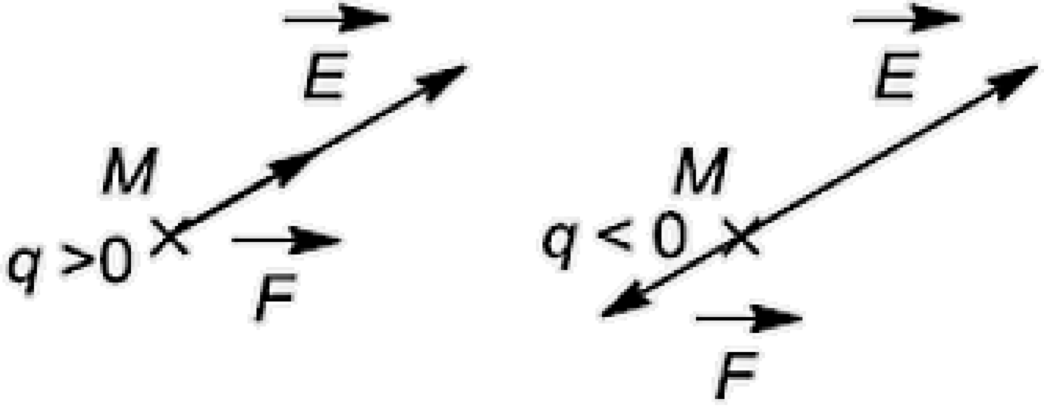
Le champ électrique dépendra de sa source : charge ponctuelle, dipôle, ensemble de charges.

L'équation aux dimensions : **[$\|\vec{E}\|$] = M L I^{-1} T^{-3}**

$\|\vec{E}\|$en **V.m^{-1}** ou en **N.C^{-1}** dans le Système international d'unités.

Le sens $\vec{F}$ de dépend du signe de la charge q.

Au programme, nous n'étudierons que des champs $\vec{E}$ uniformes.



Analogie avec l'interaction de gravitation

A part **le caractère exclusivement attractif de la force gravitationnelle**, on peut souligner l'analogie entre force d'interaction de Newton et de Coulomb.

$$\vec{F}_{q_1 \longrightarrow q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_O} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_{1\longrightarrow 2} \qquad \text{et} \qquad \vec{F}_{1\longrightarrow 2} = -\frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u}_{1\longrightarrow 2}$$

Un corps à symétrie sphérique de charge se comporte vu de l'extérieur comme une charge ponctuelle située en son centre.
Exemple : deux ions Na^+ (noyau : 11 protons et cortège électronique : 10 électrons) et Cl^- (17 protons et 18 électrons) s'attirent comme deux charges ponctuelles +e et –e.

On laisse de côté l'effet d'un champ magnétique cette année…

Interactions de contact

Les interactions de contact sont des interactions à l'échelle macroscopique qui modélisent la somme des interactions fondamentales qui s'exercent sur chaque atome à l'échelle microscopique.

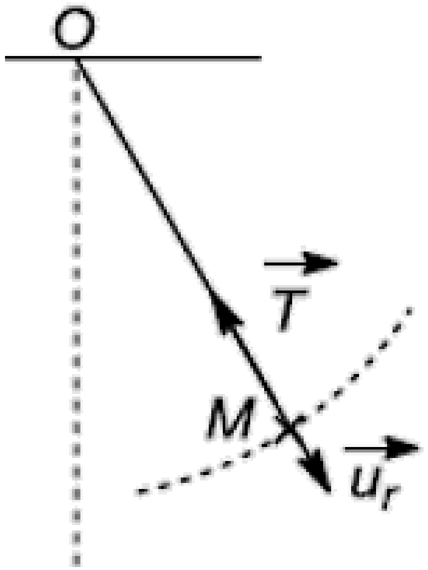
Tension d'un fil

Considérons un point matériel M de masse m accroché à l'extrémité d'un fil souple, de masse négligeable et inextensible. Ce fil « retient » alors le point M, cette action mécanique est modélisée par une force appelée tension du fil, notée $\vec{T}$.

Direction : donnée par le fil

Sens : du point matériel vers le point d'attache du fil

Norme : toujours inconnue, elle dépend des autres forces appliquées au système

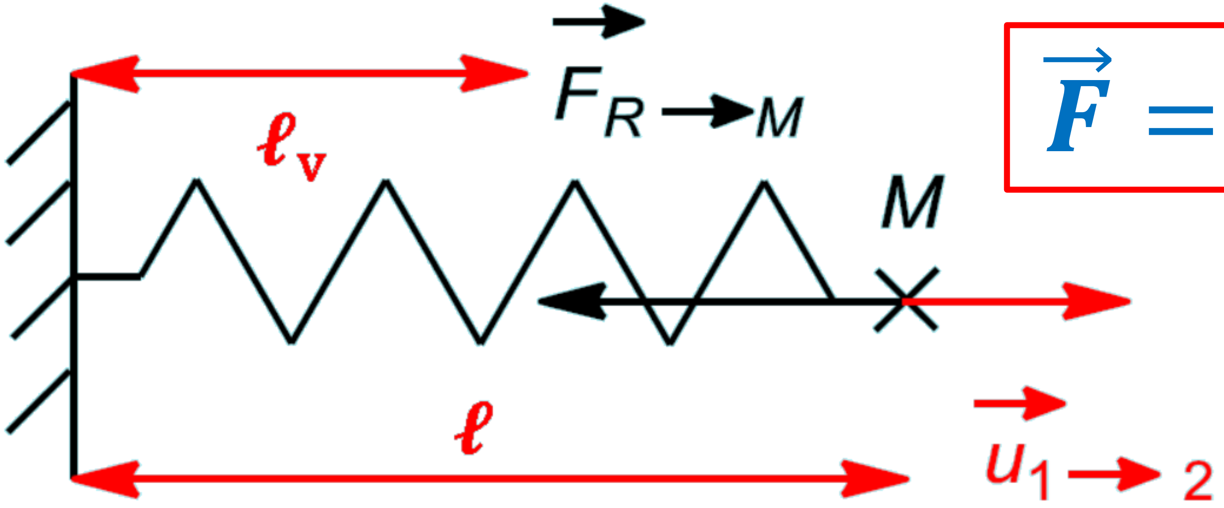


$$\vec{T} = -\|\vec{T}\|\vec{u}_r$$

Force de rappel d'un ressort

Soit un ressort idéal (de masse négligeable) de constante de raideur k ($N.m^{-1}$).

Le ressort exerce sur son extrémité M la force de rappel élastique $\vec{F}_{R\rightarrow M}$.



$$\boxed{\vec{F} = -k(\ell - \ell_v)\vec{u}_{R\rightarrow M}}$$

ℓ_v : longueur à vide

ℓ : longueur à l'instant t

Le ressort a tendance à ramener son extrémité vers sa position à vide :

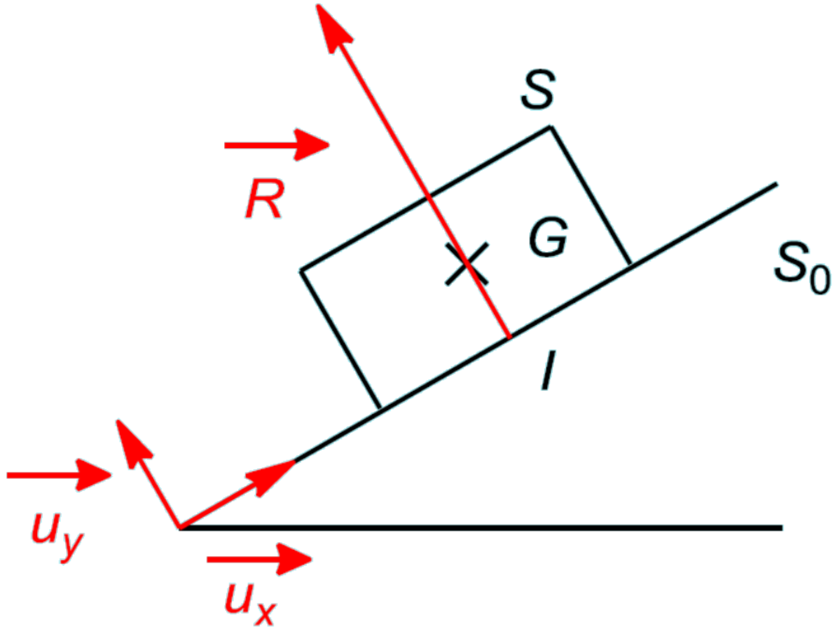
Ressort étiré : $\ell - \ell_v > 0 \implies \vec{F}$ *dans le sens* $-\vec{u}_{R\rightarrow M}$

Ressort comprimé : $\ell - \ell_v < 0 \implies \vec{F}$ *dans le sens* $+\vec{u}_{R\rightarrow M}$

Réaction d'un support

On considère un contact entre un solide (S) et un support (S_0) . On admet que les forces réparties sur toute la surface de contact peuvent être modélisées par une force unique appelée réaction du support et notée $\vec{R}$, s'appliquant en un point I de la surface de contact. Si (S) est immobile ou animé d'un mouvement de translation, la droite d'action de $\vec{R}$ passe par le centre d'inertie (assimilé au centre de gravité G).

<u>En l'absence de frottement :</u>



$\vec{R}$ $\perp$ à la surface

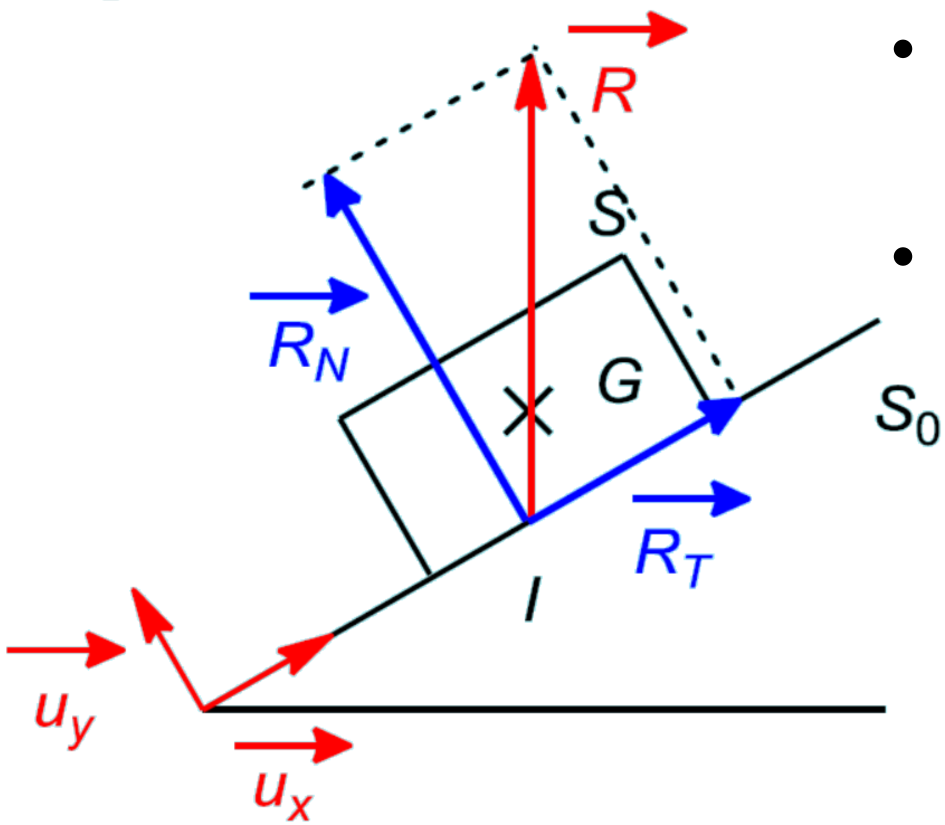
$\vec{R} = R\,\vec{u}_y$

R ≥ 0 (le support retient le solide)

L'analyse du bilan des forces selon $\vec{u}_y$ peut permettre de déterminer R.

En présence de frottement :

$$\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$



- $\vec{R}_N = R_N\,\vec{u}_y$: composante normale au support de $\vec{R}$, $R_N \geq 0$ (le support retient le solide)
- $\vec{R}_T = R_T\,\vec{u}_x$: composante tangentielle au support de $\vec{R}$, aussi appelée force de frottement solide $\vec{f}$ ($R_T > 0$ ou $R_T < 0$ car la force de frottement est opposée au mouvement, si le solide glisse vers le bas ou reste fixe $R_T > 0$, si on pousse le solide vers le haut, $R_T < 0$)

La norme de $\vec{R}_T$ et celle de $\vec{R}_N$ sont liées de manière différente selon qu'il y ait glissement ou non du solide sur son support.
On notera la condition de contact ou de nom contact entre un solide et son support :

- Condition de contact $R_N > 0$

- Suppression du contact quand $R_N = 0$

Modèle du frottement de glissement : lois de Coulomb

Considérons un solide soumis à la réaction $\vec{\boldsymbol{R}}$ d'un support avec $\vec{\boldsymbol{R}} = \vec{\boldsymbol{R}}_N + \vec{\boldsymbol{R}}_T$

- **Si le solide est en équilibre (situation d'adhérence) alors**

$\|\vec{\boldsymbol{R}}_T\| \leq \mu_S \|\vec{\boldsymbol{R}}_N\|$ **avec μ_s le coefficient de frottement statique (sans dimension).**

Remarque :

L'égalité $\|\vec{R}_T\| = \mu_S \|\vec{R}_N\|$ correspond à la limite de l'équilibre.

Mise en mouvement grâce à une force $\vec{F}$ qui va permettre de contrer $\vec{R}_T$:

$$\|\vec{F}\| \geq \|\vec{R}_T\| = \mu_S \|\vec{R}_N\|$$

- **Si le solide glisse alors $\|\vec{\boldsymbol{R}}_T\| = \mu \|\vec{\boldsymbol{R}}_N\|$ avec μ le coefficient de frottement dynamique (sans dimension et indépendant de la vitesse).**

Remarque : les valeurs des coefficients de frottement statique et dynamique dépendent de la nature des surfaces en contact et $\mu_S > \mu$.

Comportement élastique et plastique d'un matériau – Modèle du ressort – Force de rappel

La propagation des ondes sismiques, dont nous avons parlé précédemment dans l'année, entraîne une déformation de la matière et cette propagation ne peut se faire que si les roches possèdent une certaine élasticité.

Propriétés élastique que l'on peut modéliser de manière analogique par un ressort.

Un corps est dit parfaitement élastique s'il retrouve sa forme initiale après la suppression de l'action mécanique qui l'a déformé.

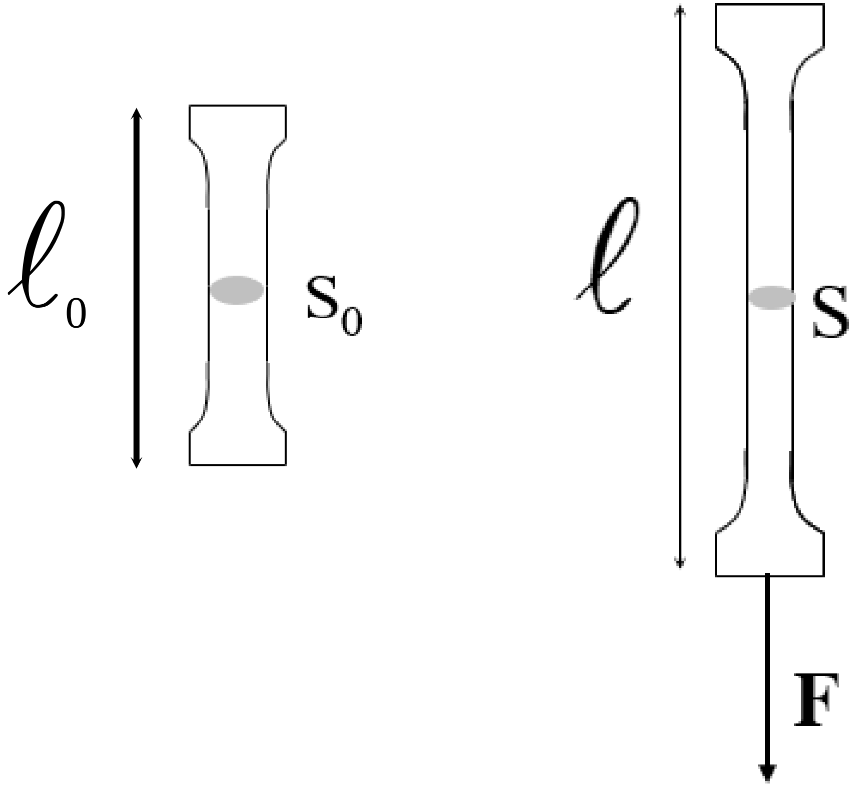
Résistance à la traction. Module d'Young.

L'effet de contraintes longitudinales (étirements)

Considérons une « éprouvette » du matériau à étudier

-Longueur

-section S_0



contrainte imposée σ = $\dfrac{F}{S_0}$

- section $S < S_0$.

-**allongement relatif**

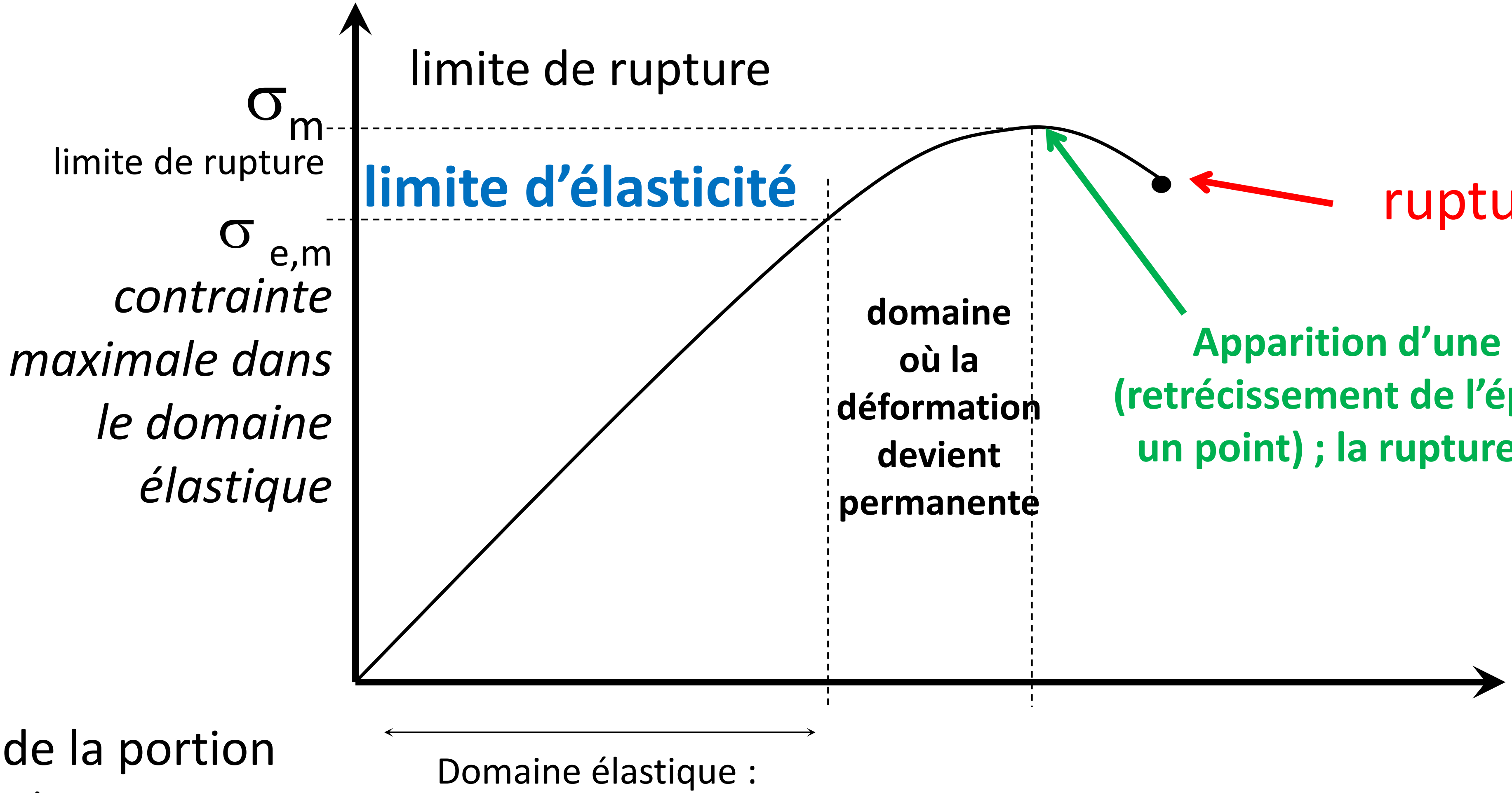
$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

Le diagramme de traction est le graphe :

<u>contrainte imposée σ en fonction de l'allongement relatif ε</u>

>

$$\sigma = \frac{F}{S_0}$$

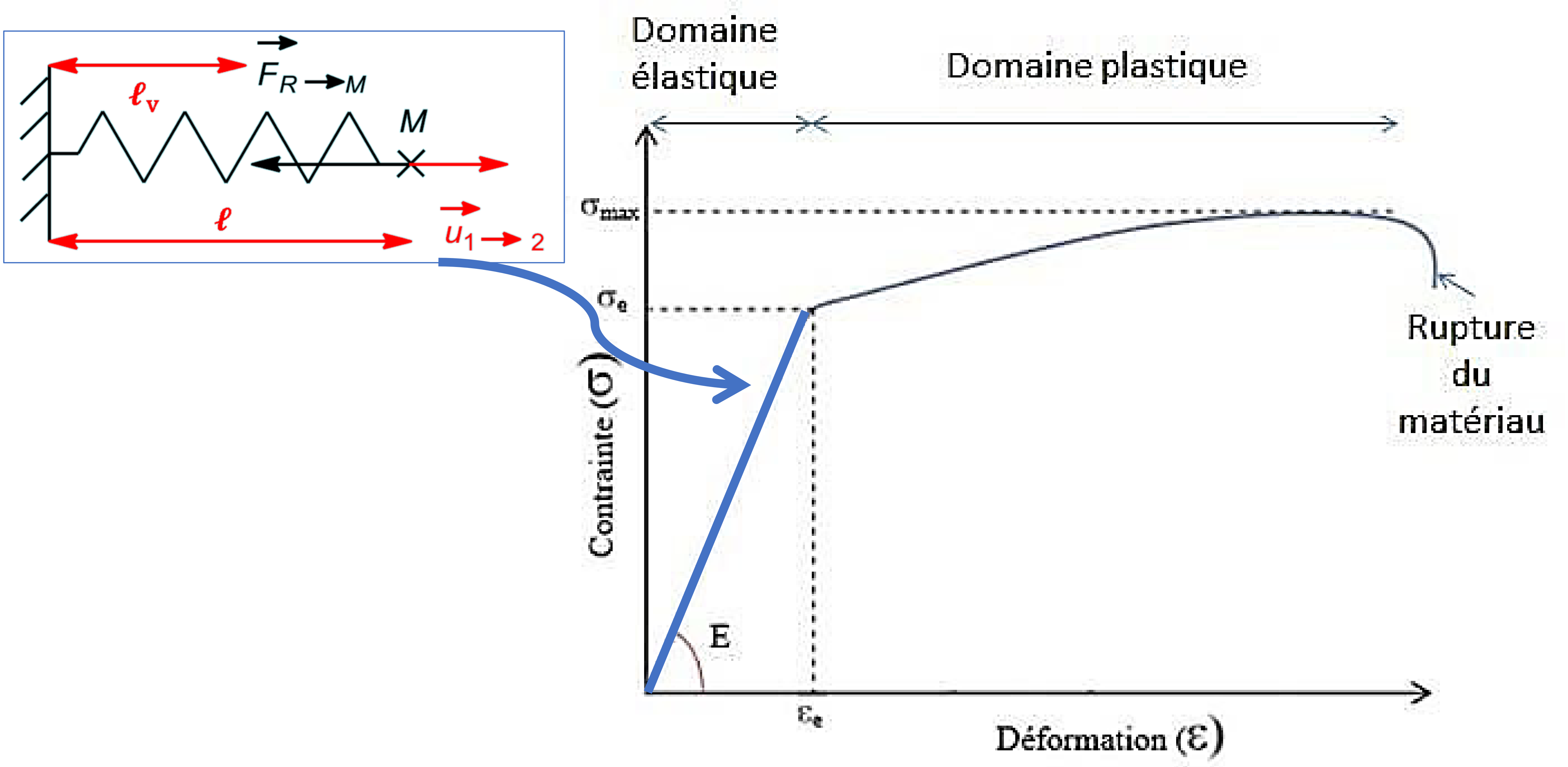


$$\varepsilon = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0}$$

(pente de la portion de droite) ;
USI : Pa ;
usuel : MPa = 10^6Pa.

Linéaire dans le cas des métaux.

$$\boxed{\frac{\sigma}{\varepsilon} = \text{E module d'Young}}$$

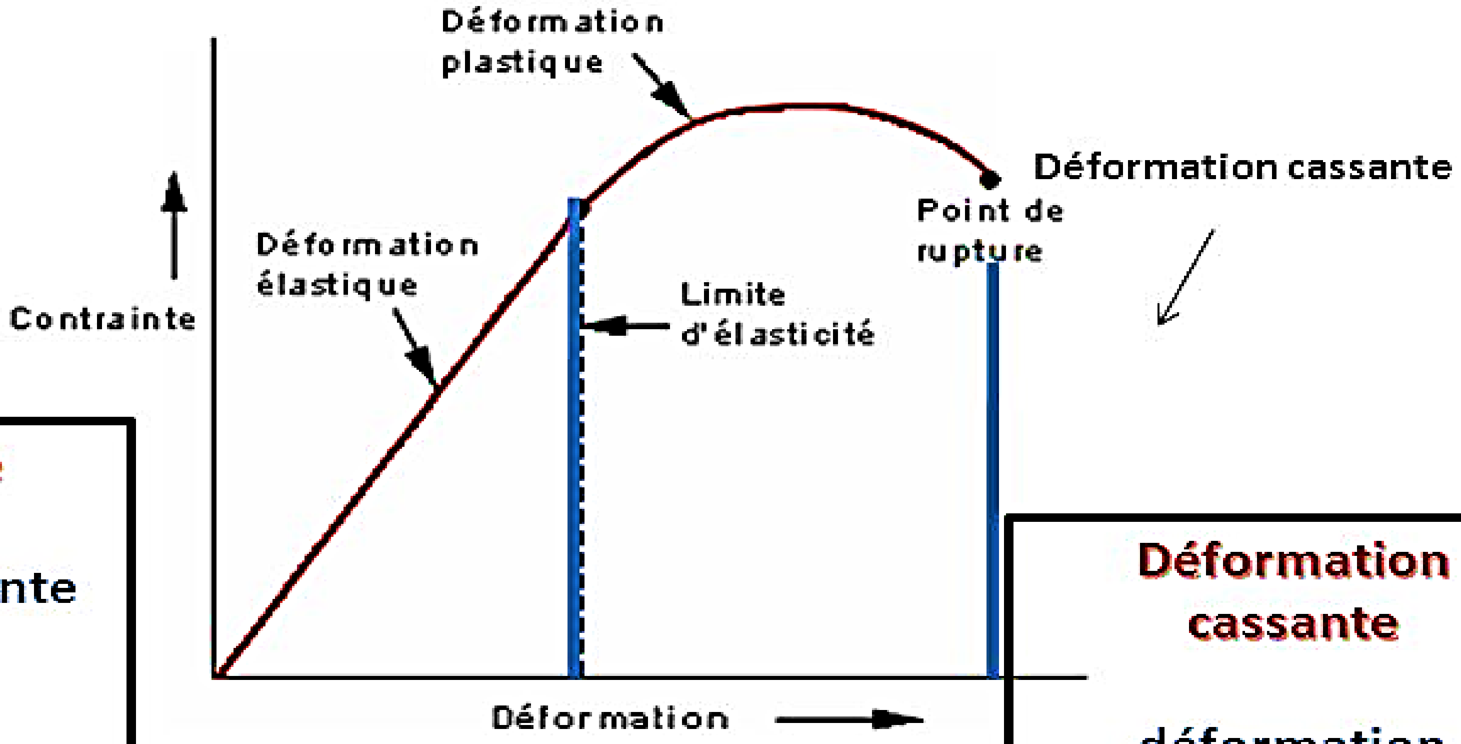


$\vec{F}_{R \to M}$
ℓ_v
M
ℓ
$\vec{u}_{1 \to 2}$
Domaine élastique
Domaine plastique
σ_{max}
σ_e
Contrainte (σ)
E
ε_e
Déformation (ε)
Rupture du matériau

Application aux roches

- Les roches peuvent subir une déformation élastique sous l’influence d’une force de traction.
- L’étude montre tout comme pour le ressort, un premier domaine d’élasticité où la roche peut reprendre, après arrêt de la force, son état initial et un domaine de plasticité où on observe des déformations irréversibles.
- Au-delà d’une valeur maximale de la norme de la force appliquée, il y a rupture.

DEFORMATION DES ROCHES



Déformation élastique

déformation non permanente

-La première réponse d'un matériau à la contrainte

-L'énergie emmagasinée par le matériau durant la déformation est dissipée lorsque la contrainte est relâchée

-La relation entre la contrainte et déformation est linéaire

Déformation plastique

déformation permanente

-Toute l'énergie est utilisée pour déformer le matériau

Les matériaux se déforment

Déformation cassante

déformation permanente

-Toute l'énergie est utilisée pour déformer le matériau

-Les matériaux se cassent

-La résistance à la traction est donnée par la valeur maximale de la contrainte avant striction σ_m.

-Une grande rigidité correspond à une faible déformation élastique (E élevé ; ε reste faible pour σ élevée).

-Dans le cas des matériaux polymères, le module d'Young est une fonction de la température mais aussi du temps d'application de la contrainte.

Module d'Young MPa

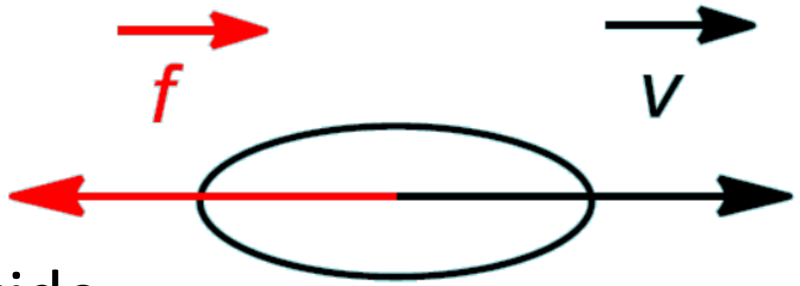
Fer 196 000 Ir 528 000 Cs 1700
diamant 1000 000
béton 27 000 chêne 12 000
soie d'araignée 60 000
fémur 17 200 Cheveux 10 000

Forces de frottement fluide

Un solide en mouvement dans un fluide (gaz ou liquide) est freiné par des interactions entre les particules du fluide et les éléments de surface de ce solide, modélisées par une force de frottement fluide.

Dans le cas général, les forces de frottement du fluide dépendent :

- ❑ Viscosité du fluide
- ❑ Masse volumique du fluide
- ❑ Forme du solide
- ❑ Vitesse du déplacement du solide dans le fluide



Dans le cas d'une translation du solide à faible vitesse (modèle laminaire), la loi de force est linéaire :

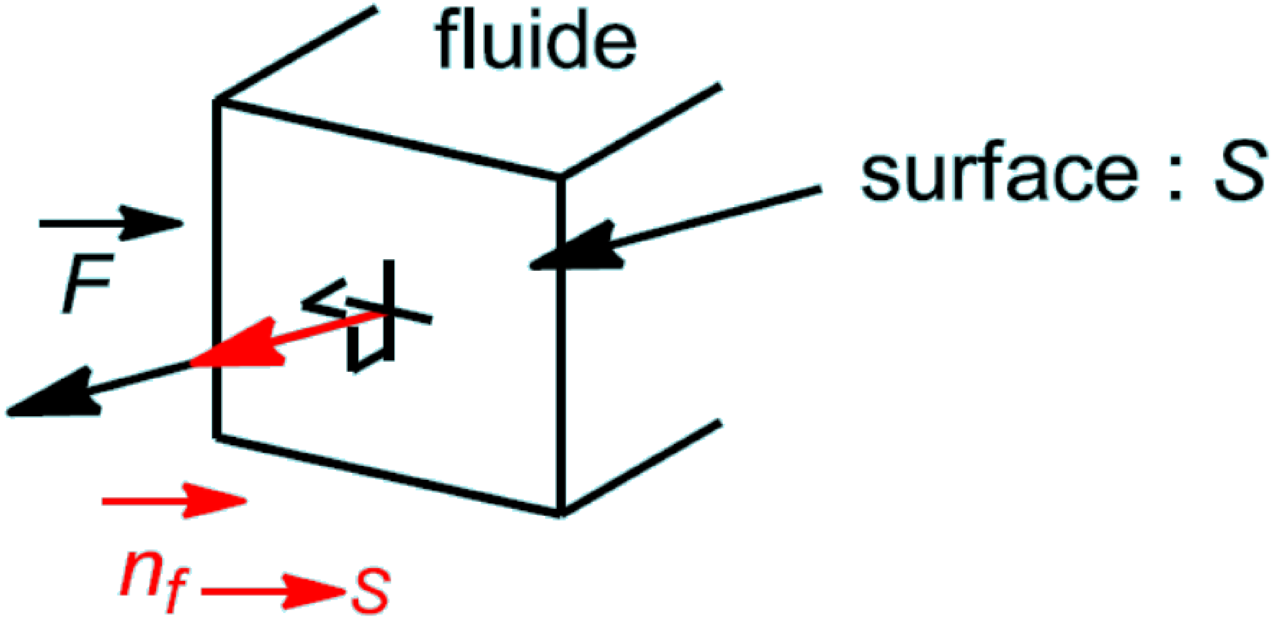
$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$$, **α > 0, coefficient de frottement fluide**

Cette force est la même que le corps se déplace dans le fluide ou que le fluide s'écoule autour du corps.

Force pressante

La force qu'exerce un fluide sur une surface est une force de contact. Dans le cas d'une pression uniforme du fluide au niveau de la surface et d'une surface plane :

$$\vec{F} = S.p.\vec{n}_{fluide \to surf}$$



Avec $\vec{n}_{fluide \to surf}$, un vecteur unitaire normal à la surface et orienté du fluide vers la surface.

Poussée d'Archimède (cf statique des fluides)

Principe : tout corps plongé dans un fluide en équilibre est soumis à une poussée

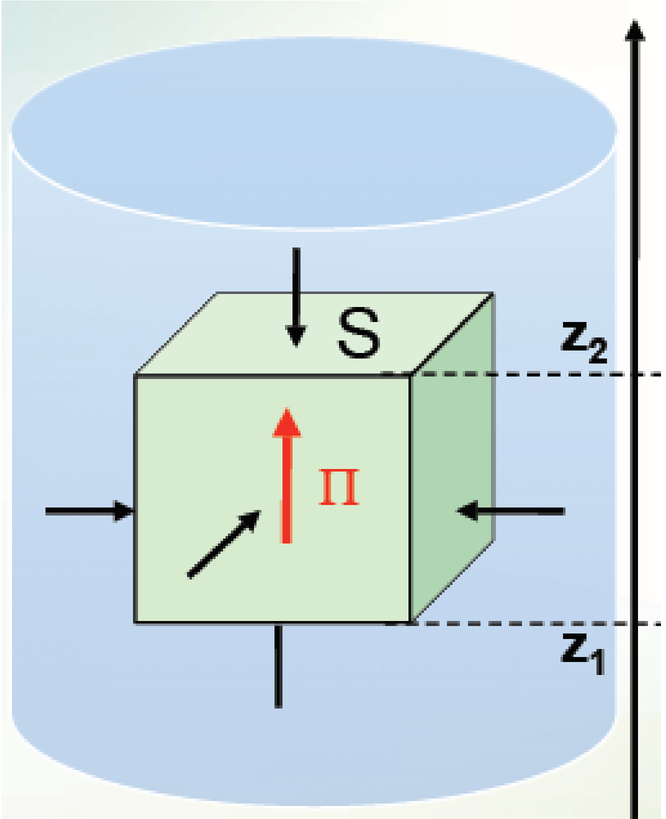
- **verticale, de bas en haut**
- égale au **poids du fluide déplacé**
- **appliquée au centre de gravité du fluide déplacé**

Archimède (-287; -212)

$$\sum \overrightarrow{F}_{lat} = \vec{0}$$

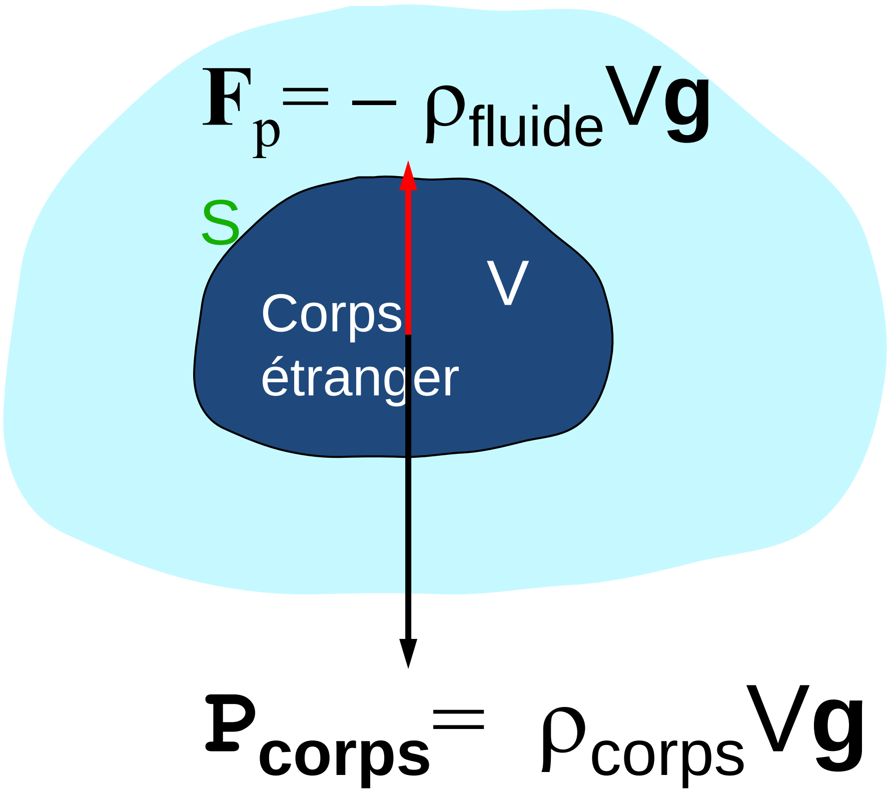
$$P_1 - P_2 = \rho_{liq.} g.(z_2 - z_1)$$

$$\vec{\pi} = -\rho_{liq}.V.\vec{g}$$



Un objet flotte-t-il?

$$\mathbf{P}_{corps} + \mathbf{F}_p = (\rho_{corps} - \rho_{fluide})V\mathbf{g} \neq \mathbf{0}$$



Le corps n'est pas en équilibre :

- $\rho_{corps} > \rho_{fluide}$: il descend
- $\rho_{corps} < \rho_{fluide}$: il monte

La densité permet de prévoir si un corps peut flotter

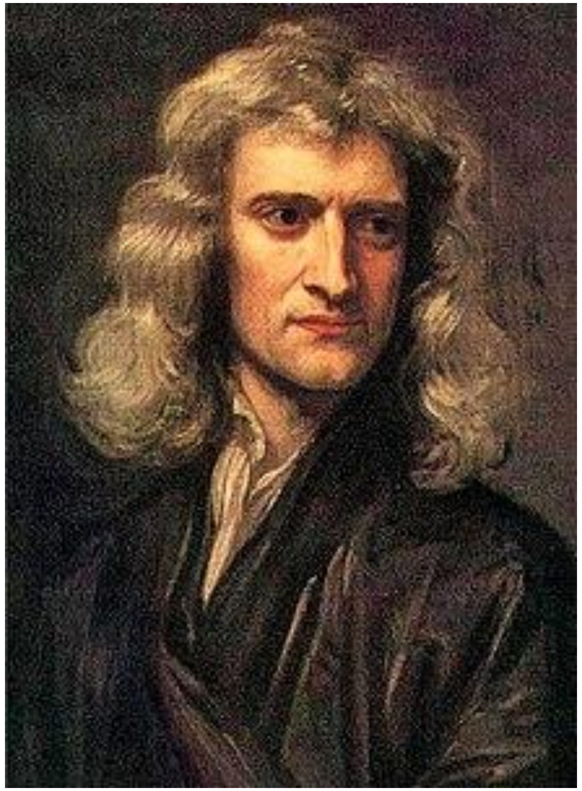
On définit la densité d'un corps par :

$d = \rho_{corps} / \rho_{eau}$ si solide ou liquide

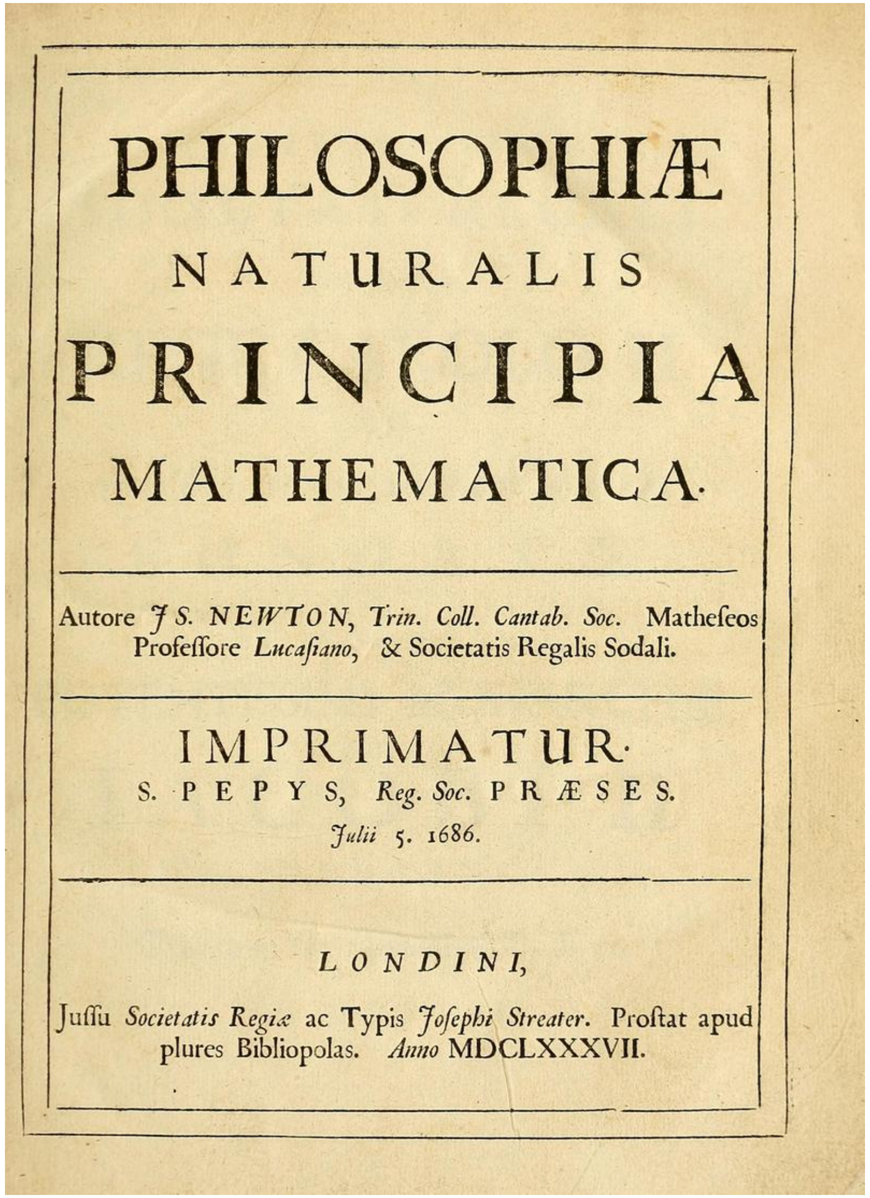
$d = \rho_{corps} / \rho_{air\ (20°C,1\ atm)}$ si gaz

Les lois de Newton

Les lois du mouvement de Newton ont été énoncées dans son ouvrage Philosophiae naturalis principia mathematica en 1687.



Isaac Newton (1643– 1727) est un philosophe, mathématicien, physicien, alchimiste, astronome et théologien anglais.



PHILOSOPHIÆ
NATURALIS
PRINCIPIA
MATHEMATICA.

Autore *J S.* NEWTON, *Trin. Coll. Cantab. Soc.* Matheſeos Profeſſore *Lucaſiano*, & Societatis Regalis Sodali.

IMPRIMATUR.
S. PEPYS, *Reg. Soc.* PRÆSES.
Julii 5. 1686.

LONDINI,

Juſſu *Societatis Regiæ* ac Typis *Joſephi Streater.* Proſtat apud plures Bibliopolas. *Anno* MDCLXXXVII.

Première loi de Newton de la dynamique ou principe d'inertie

«La force inhérente à la matière est le pouvoir qu'elle a de résister. C'est par cette force que tout corps persévère de lui-même dans son état actuel de repos ou de mouvement rectiligne uniforme à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état...»

- **Système isolé :** libre de toute action mécanique

- **Système pseudo-isolé :** tel que la somme des forces modélisant les actions mécaniques auxquelles ce système est soumis soit égale à vecteur nul :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

Les référentiels galiléens

Il existe une famille de référentiels, appelés galiléens ou inertiels, tels que, par rapport à l'un de ces référentiels, tout point matériel isolé ou pseudo-isolé est soit au repos, soit animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Autrement dit, **un référentiel galiléen est un référentiel où s’applique le principe d’inertie.**

Propriété : les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Les trois référentiels définis dans le chapitre précédent sont galiléens ou pseudo galiléen :

Exemples de référentiels Galiléens (cf chapitre précédent) :

- **référentiel héliocentrique** (ou référentiel de Kepler) $\mathfrak{R}_o$: c'est le référentiel galiléen de référence.
- **référentiel géocentrique $\mathfrak{R}_{Géo}$** : en translation elliptique par rapport à $\mathfrak{R}_o$, il n'est donc pas galiléen. Lorsque l'échelle de temps des mouvements étudiés sera beaucoup plus faible que la période de révolution de la Terre autour du Soleil (≈ 365 jours), alors on fera l'approximation d'un référentiel galiléen
- **référentiel terrestre $\mathfrak{R}_{ter}$**, en rotation par rapport à $\mathfrak{R}_{Géo}$, il n'est donc pas galiléen. Lorsque l'échelle de temps des mouvements étudiés sera beaucoup plus faible que la période de rotation de la Terre autour d'elle-même (24h), alors on fera l'approximation d'un référentiel galiléen.

Démonstration : Supposons un point matériel M de masse m, mécaniquement isolé, en mouvement dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$, et $\mathcal{R}'$ un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathcal{R}_g$. Exprimons la vitesse de M dans $\mathcal{R}'$ grâce au la loi de composition des vitesses :

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{M/\mathcal{R}'}} = \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{M/\mathcal{R}}} + \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}}$$

D'après le principe d'inertie dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$:

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{cste}}$$

De plus, puisque les deux référentiels sont en translation rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre :

$$\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\mathcal{R}/\mathcal{R}'}} = \overrightarrow{\boldsymbol{cste}} \text{ donc } \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{M/\mathcal{R}}} = \overrightarrow{\boldsymbol{cste}}$$

Le point M est en translation rectiligne uniforme dans le référentiel $\mathcal{R}'$, qui vérifie donc la propriété des référentiels galiléens.

Pourquoi référentiels galiléens?

Newton attribue à **Galilée** la découverte de la première loi (le principe d'inertie), sans mentionner **Descartes**.
il est pourtant reconnu que c'est Descartes qui aurait formulé le mieux l'inertie, dans ses « Principes de la philosophie, 2e partie», et qui «pour la première fois, en a entièrement compris la portée et le sens».

Mais **le principe cartésien**, a davantage à l'époque le statut d'une affirmation philosophique générale que d'une proposition scientifique. Par son association avec le concept d'une matière en soi indifférente au repos et au mouvement, **Galilée** est le précurseur direct du principe classique d'inertie, ouvrant la voie à une première théorie mathématisée du mouvement dont les résultats passeront intégralement dans la synthèse newtonienne.

First Law

of Cartoon Physics :

"GRAVITY DOESN'T WORK UNTIL YOU LOOK DOWN."

Quantité de mouvement d'un système

Le vecteur quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un point matériel de masse animé de la vitesse $\vec{v}$ est :

$$\boldsymbol{\vec{p} = m\vec{v}}$$

$$\boldsymbol{||\vec{p}||\ en\ kg.m.s^{-1}, m\ en\ kg, ||\vec{v}||\ \mathbf{en\ m.}s^{-1}}$$

Propriétés :

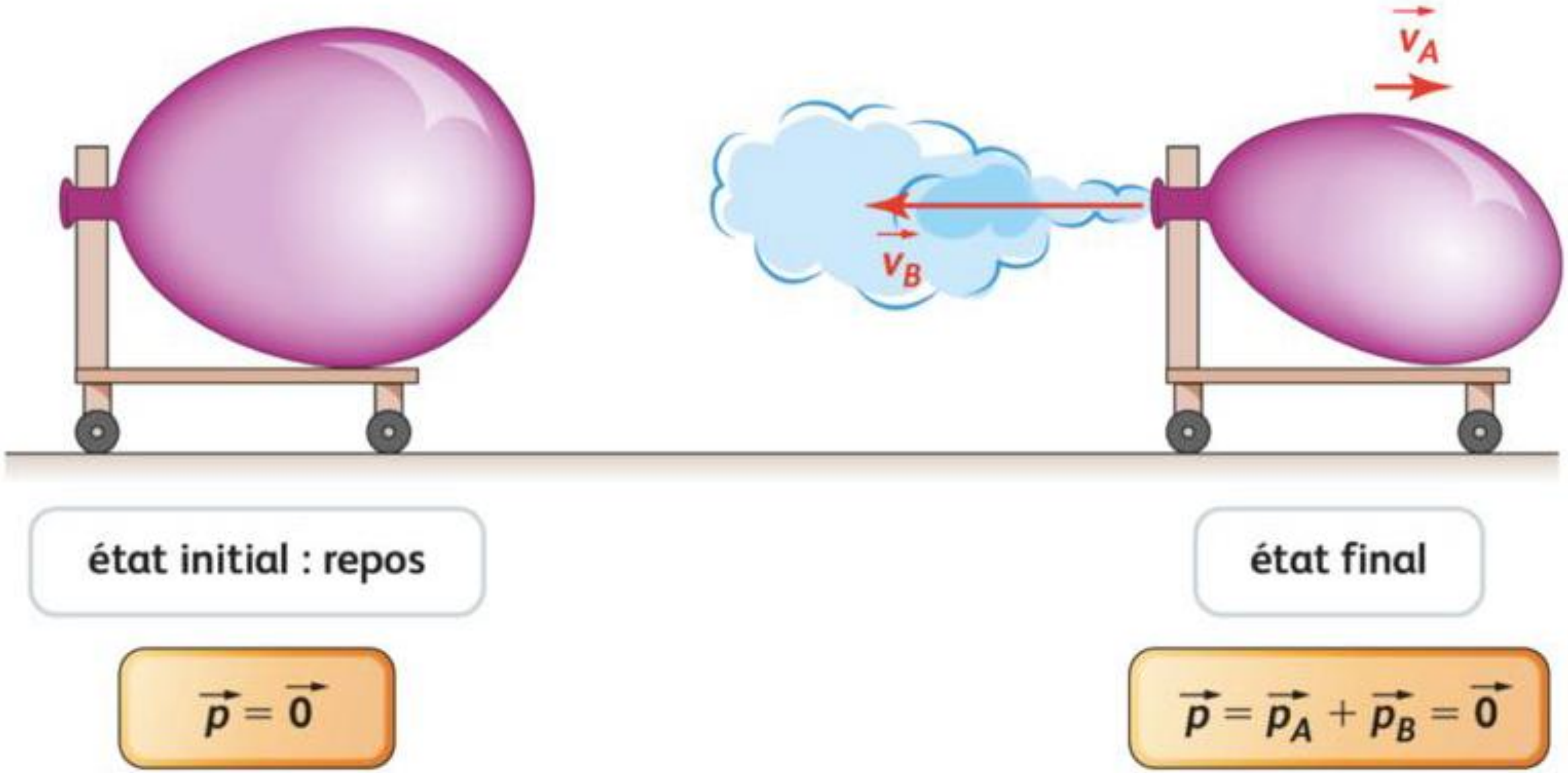
- La quantité de mouvement dépend du référentiel, puisque la vitesse en dépend.
- La quantité de mouvement est une grandeur vectorielle extensive, c'est-à-dire additive : soit $\vec{p}_1$ et $\vec{p}_2$ la quantité de mouvement de deux sous-systèmes S_1 et S_2 , alors la quantité de mouvement $\vec{p}$ du système global $S = \{S_1; S_2\}$ est :

$$\boldsymbol{\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2}$$

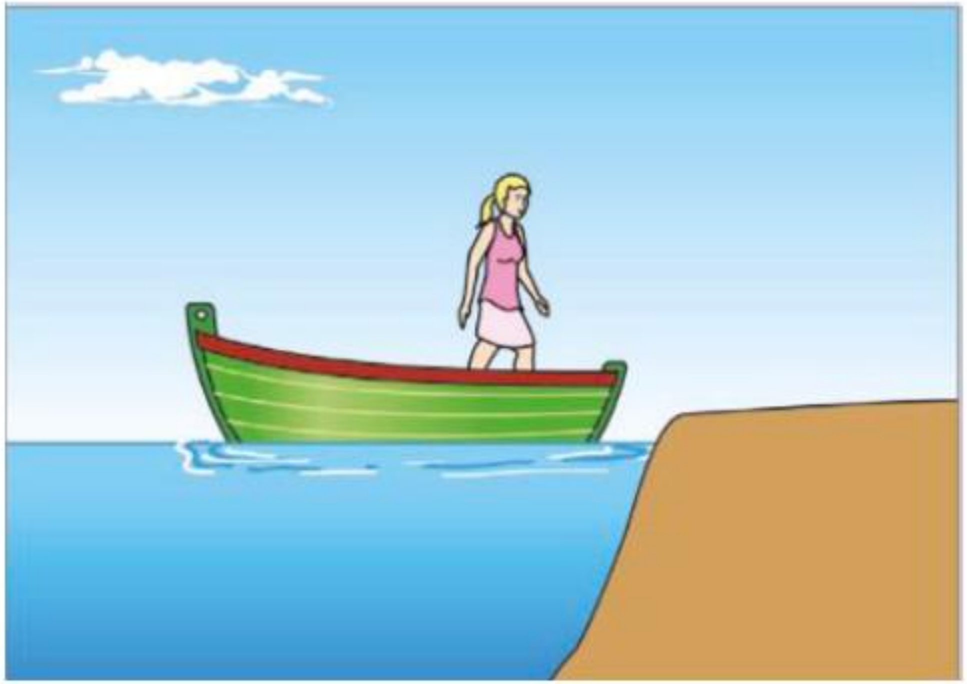
Autre forme du principe d'inertie : conservation de la quantité de mouvement pour un système fermé isolé ou pseudo-isolé.

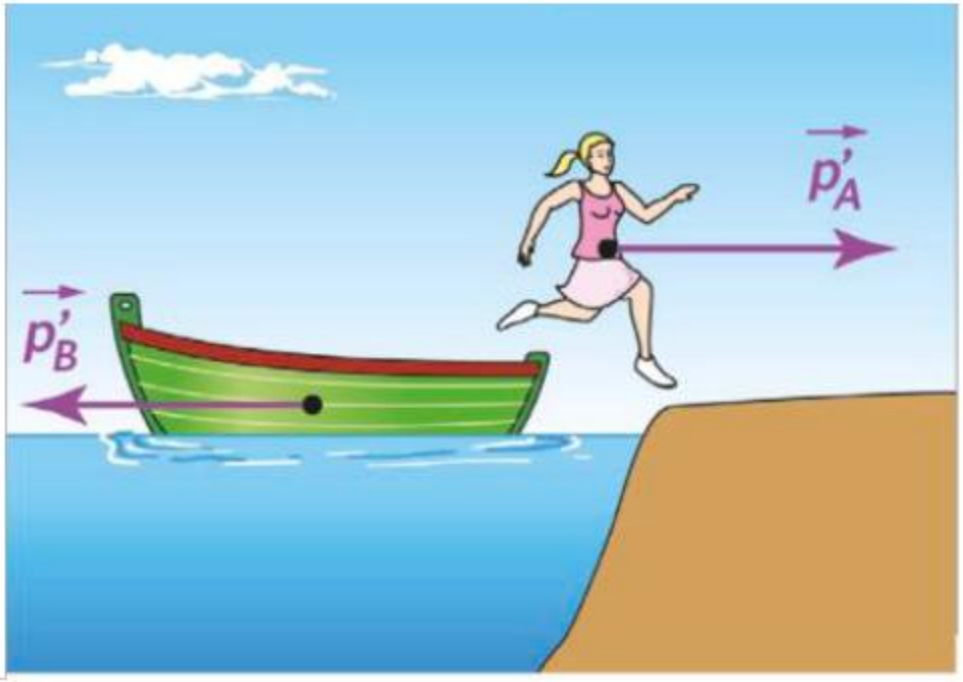
Si le système est fermé, par définition, sa masse est constante, ainsi **la première loi de Newton** devient :

Dans un référentiel galiléen un système matériel isolé ou pseudo-isolé possède un vecteur quantité de mouvement constant : $\vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{constante}$

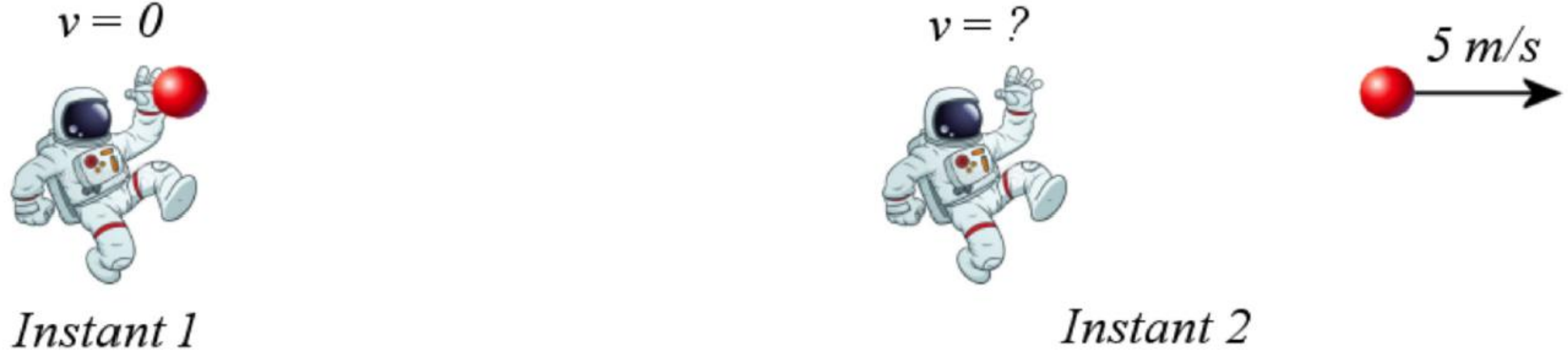


Conservation de la quantité de mouvement lors de la propulsion par réaction d'une barque





Une astronaute de 80 kg dans l’espace tient dans ses mains une boule de bowling de 4 kg. Ils sont initialement immobiles dans l’espace. L’astronaute lance alors la boule de bowling de sorte que celle-ci se déplace maintenant avec une vitesse de 5 m/s. Quelle est la vitesse de l’astronaute après le lancement de la boule?



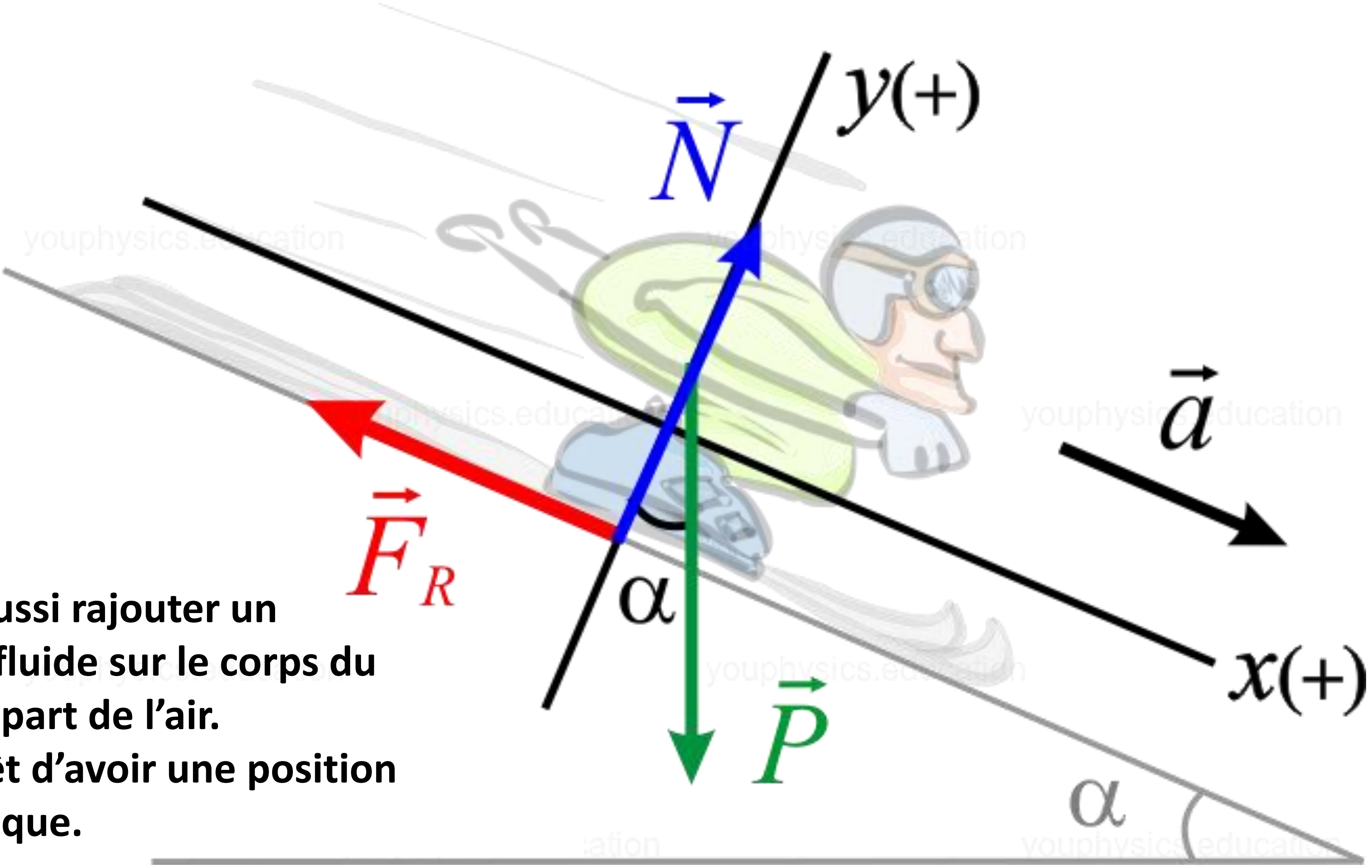
Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Pour un point matériel M de masse m, qui subit n forces extérieures $\vec{F}_{ext,i}$ alors si le référentiel d'étude est galiléen :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext,i} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Si la masse du système est constante alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_{ext,i} = m\vec{a}$$

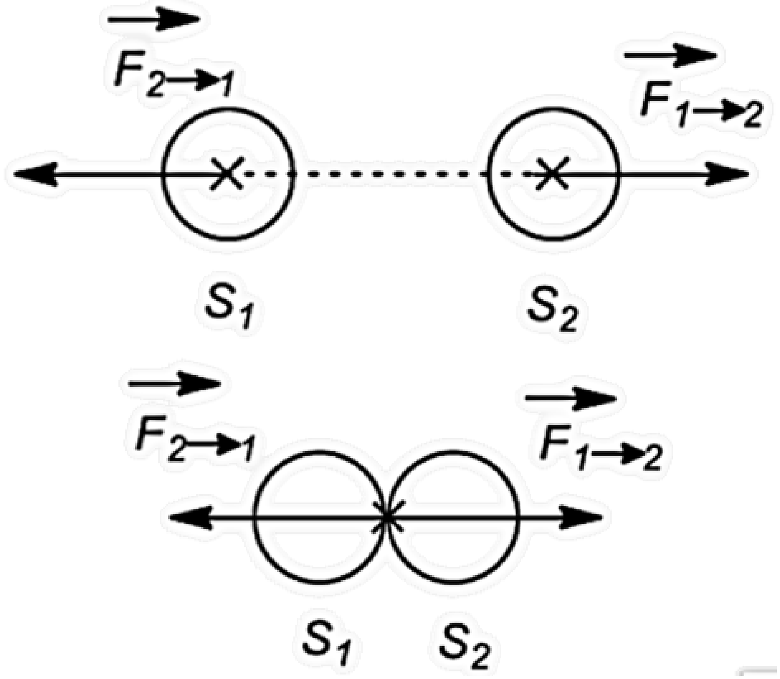


Il faudrait aussi rajouter un frottement fluide sur le corps du skieur de la part de l'air.
D'où l'intérêt d'avoir une position aérodynamique.

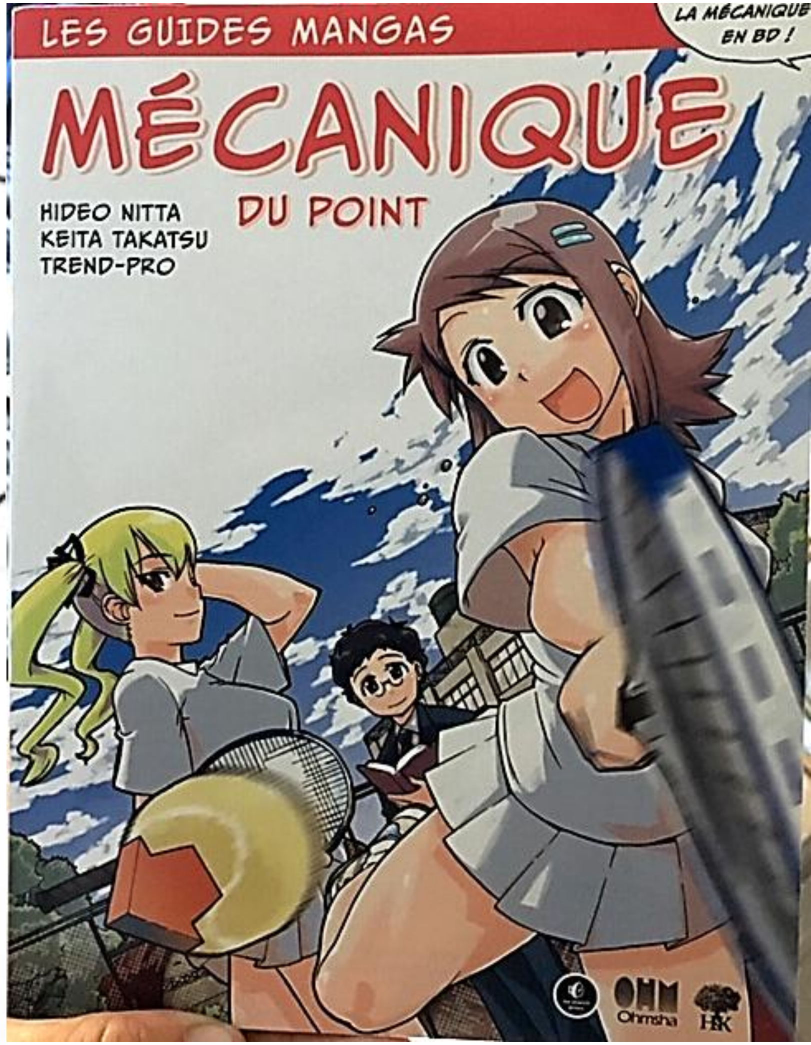
Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

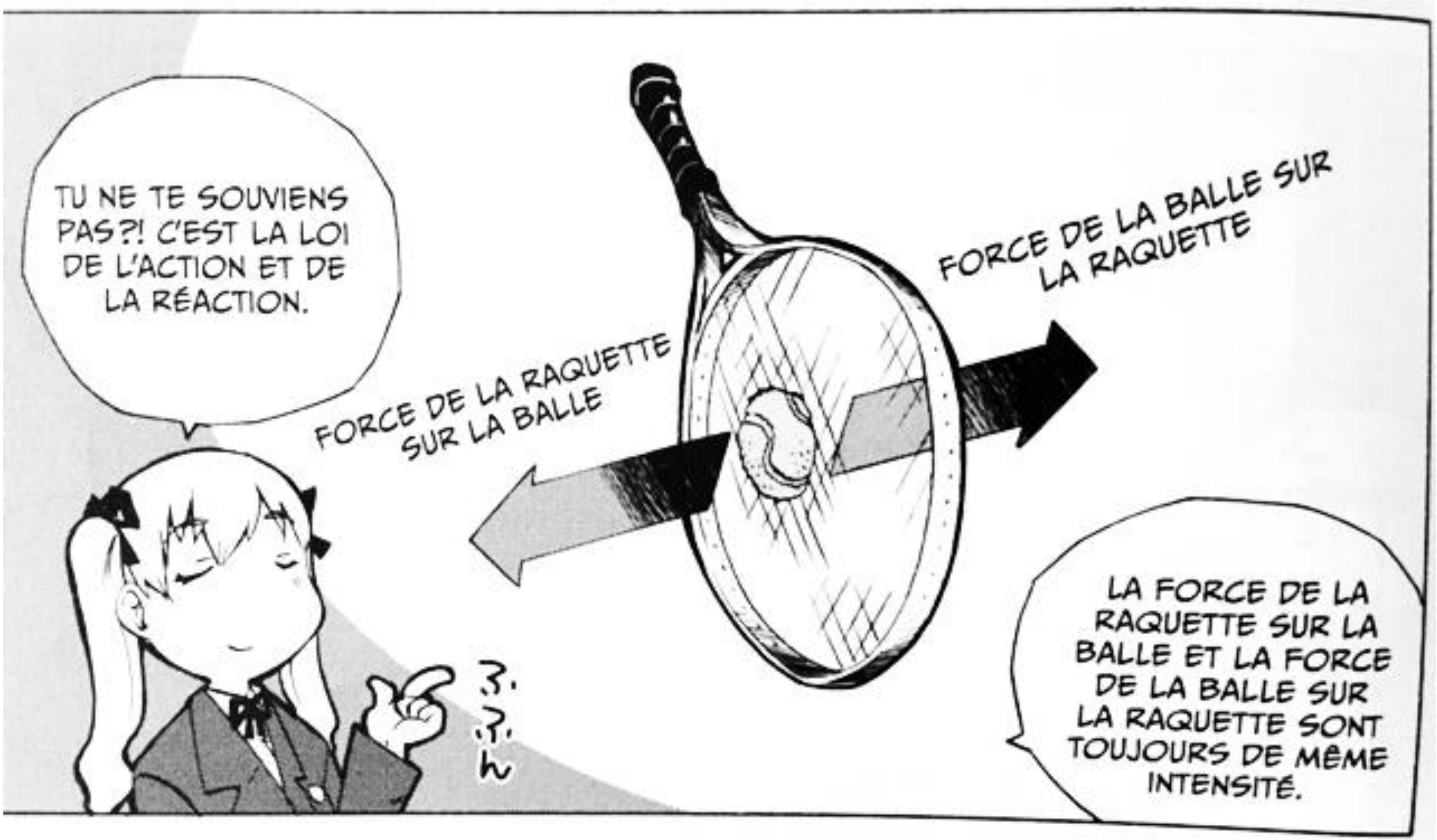
Soient deux corps S_1 et S_2 en interaction. On note la force exercée par $\vec{F}_{1\longrightarrow 2}$ la force exercée par S_1 sur S_2 et $\vec{F}_{2\longrightarrow 1}$ la force exercée par S_2 sur S_1. Alors :

- ❑ $\vec{F}_{1\longrightarrow 2} = -\vec{F}_{2\longrightarrow 1}$
- ❑ $\vec{F}_{1\longrightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2\longrightarrow 1}$ sont portés par la même droite d'action
- ❑ $\vec{F}_{1\longrightarrow 2}$ et $\vec{F}_{2\longrightarrow 1}$ ont le même point d'application s'il s'agit de forces de contact.

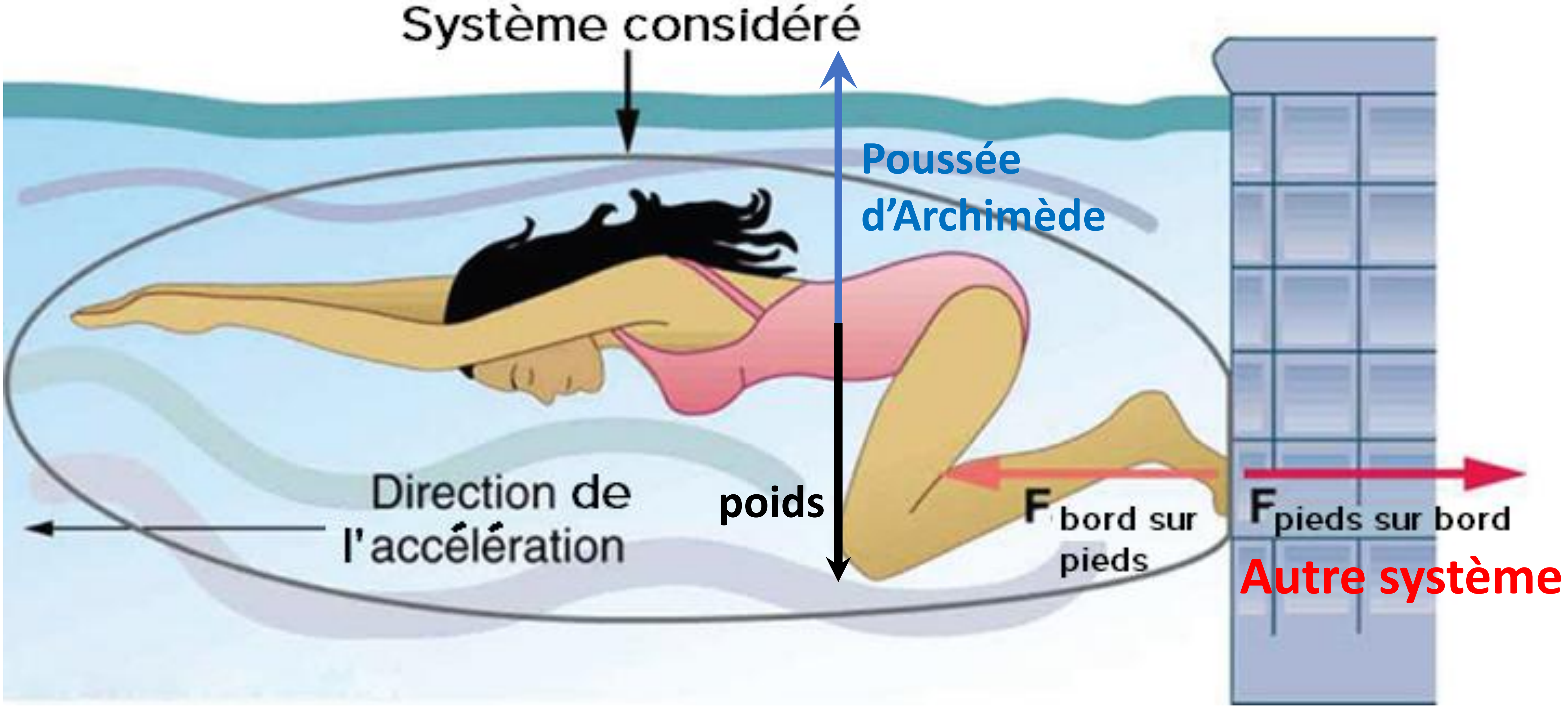



9) Supposons que vous frappiez une balle avec une raquette de tennis. Quelle force est la plus grande: celle exercée par la balle sur la raquette ou celle exercée par la raquette sur la balle? Sélectionnez la réponse exacte.
A. La force exercée par la raquette sur la balle est plus grande que celle exercée par la balle sur la raquette.
B. La force exercée par la balle est plus grande que celle exercée par la raquette.
C. La force exercée par la balle est de même intensité que celle exercée par la raquette.
D. La relation entre la force exercée par la balle et celle exercée par la raquette dépend du poids de la raquette et de la vitesse de la balle.
J'AI RÉPONDU C.
POURQUOI?
OH NON... J'AI COCHÉ A.

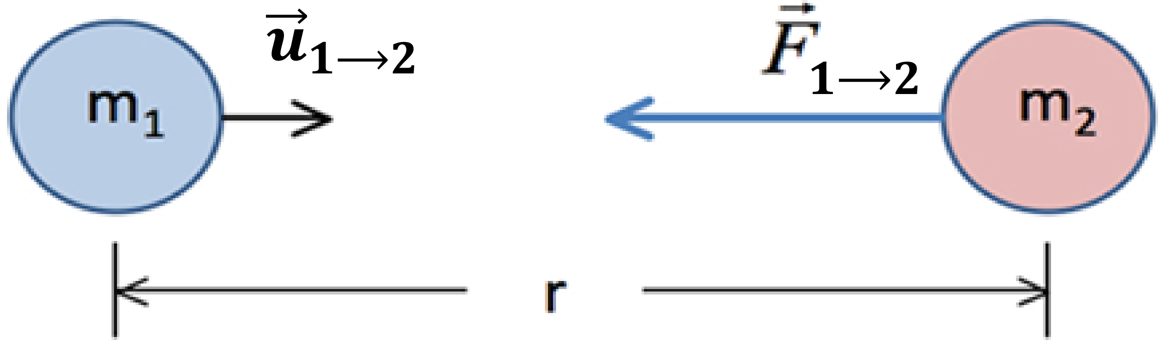

LES GUIDES MANGAS
LA MÉCANIQUE EN BD !
MÉCANIQUE
DU POINT
HIDEO NITTA
KEITA TAKATSU
TREND-PRO
Ohmsha


TU NE TE SOUVIENS PAS?! C'EST LA LOI DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION.
FORCE DE LA RAQUETTE SUR LA BALLE
FORCE DE LA BALLE SUR LA RAQUETTE
ふふふん
LA FORCE DE LA RAQUETTE SUR LA BALLE ET LA FORCE DE LA BALLE SUR LA RAQUETTE SONT TOUJOURS DE MÊME INTENSITÉ.

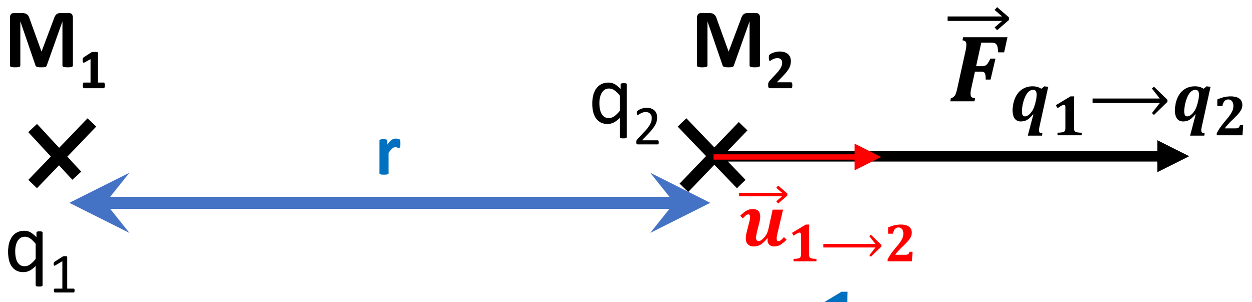

POUR ÉTUDIER L'ÉQUILIBRE DE LA BALLE, ON NE S'INTÉRESSE QU'AUX FORCES APPLIQUÉES À LA BALLE.
ALORS QUE POUR LA LOI DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION, ON DOIT CONSIDÉRER LA BALLE *ET* LA MAIN.
FORCE DE LA MAIN SUR LA BALLE
POIDS
ÉQUILIBRE
FORCE DE LA MAIN SUR LA BALLE
FORCE DE LA BALLE SUR LA MAIN (=POIDS)
LOI DE L'ACTION ET DE LA RÉACTION


Système considéré
Poussée d'Archimède
poids
Direction de l'accélération
F bord sur pieds
F pieds sur bord
Autre système

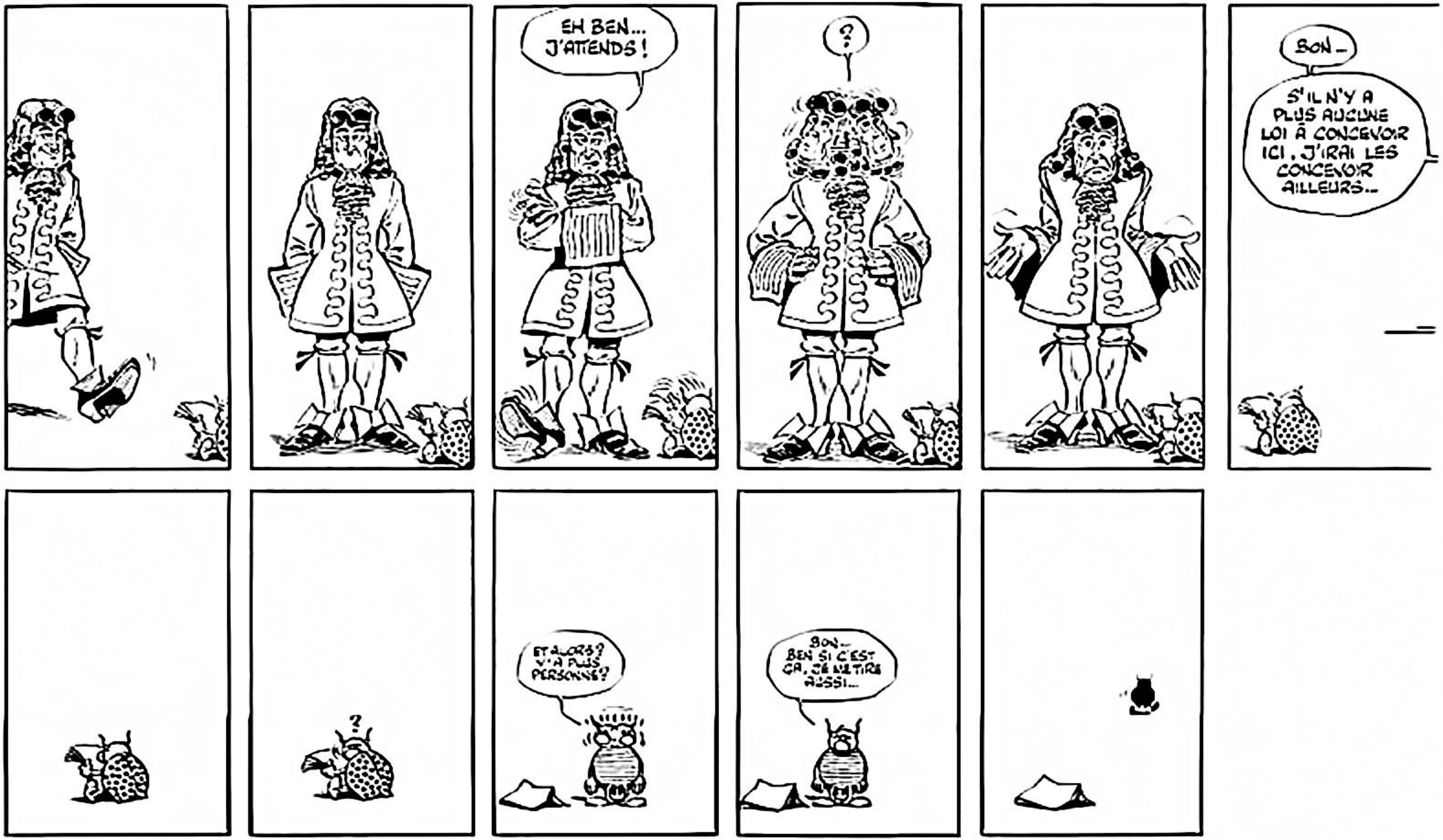
La force de gravitation et l'interaction coulombienne respectent le principe des actions réciproques



$$\vec{F}_{1\to2} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2} \qquad \vec{F}_{2\to1} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{u}_{2\to1}$$



$$\vec{F}_{q_1\to q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{1\to2} \qquad \vec{F}_{q_2\to q_1} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{u}_{2\to1}$$


EH BEN... J'ATTENDS !
?
BON...
S'IL N'Y A PLUS AUCUNE LOI À CONCEVOIR ICI, J'IRAI LES CONCEVOIR AILLEURS...
?
ET ALORS? Y'A PLUS PERSONNE?
BON... BEN SI C'EST ÇA, JE ME TIRE AUSSI...

Méthodologie classique en dynamique du point

(si cas particulier, on s'adapte!)

- ❑ Préciser le système étudié (obligatoire comme en thermo)
- ❑ Préciser le référentiel d'étude
- ❑ Faire l'inventaire des forces agissant sur le point matériel considéré
- ❑ Choisir une base de projection pertinente (adaptée à la symétrie du problème)
- ❑ **FAIRE UN SCHEMA GRAND ET CLAIR !**
- ❑ Prendre en compte les contraintes géométriques imposées (contact avec un plan, déplacement sur une portion de cercle). En déduire le mouvement possible et les conséquences sur les composantes de la vitesse et de l'accélération.
- ❑ Appliquer la seconde loi de Newton (PFD)
- ❑ PROJETER l'équation vectorielle sur les axes judicieusement choisis. Pour éliminer une force inconnue, on projette sur un axe perpendiculaire à cette force.
- ❑ INTEGRER les équations différentielles obtenues en faisant intervenir les conditions initiales (position, vitesse).

Saut de Felix Baumgartner (2012) (résolution numérique)

Après avoir dépassé, dans une nacelle attachée à un ballon sonde gonflé à l'hélium, une altitude de 39 000 m, Félix Baumgartner se lance dans une chute libre qui durera 4 min et 19 s. Il atteindra la vitesse maximale de 1343 km/h en 45,5 s, avant d'ouvrir son parachute à 2500 m d'altitude (sa vitesse d'équilibre est alors d'environ 200 km/h comme celle de tous les parachutistes à cette altitude habituelle).

Le site du projet a publié une estimation de 1 342,8 km/h soit Mach 1,24 à l'altitude considérée (la vitesse du son dépend de la température et pression de l'air, ces valeurs correspondant à une vitesse du son de 1 083 km/h, contre 1 248 km/h à 25 °C à la pression atmosphérique normale).

1)a) Estimer la variation relative de g entre le niveau de la mer et l'altitude maximale du vol. Prendrez-vous g constant pour vos calculs ? Justifiez ($R_{terrestre}$ = 6371 km).

1)b) Au niveau de la mer, on estime que le frottement de l'air est de la forme $\vec{f} = -\alpha v \vec{v}$

avec $\boldsymbol{\alpha = \frac{1}{2} S C_x \rho_{atmosphère} \simeq 0,29\ kg/m}$ **.** Cependant il est nécessaire de prendre en compte la variation de ρ avec l'altitude. Justifiez.

On prendra comme expression pour $\boldsymbol{\alpha(z) = \frac{1}{2} S C_x \rho(z)}$ avec $\boldsymbol{\rho(z) = \rho(0).e^{-kz}}$ avec

k = 1,39.$\mathbf{10^{-4}}$.$\mathbf{m^{-1}}$.

Cette variation est à prendre en compte dans les dénivelés couramment pratiqués par les parachutistes sportifs et, a fortiori, pour simuler le vol du 14 octobre 2012 de Félix Baumgartner.

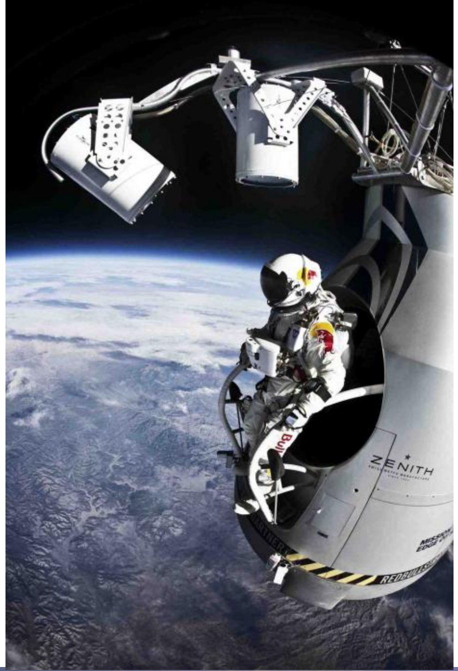
2) Ecrire avec soin le système différentiel d'ordre 1 vérifié par la fonction vectorielle Y(t) sous la forme Y'(t)=F(Y(t)).

3) Préparez un script dans lequel vous initialiserez vos paramètres et définirez la fonction F.

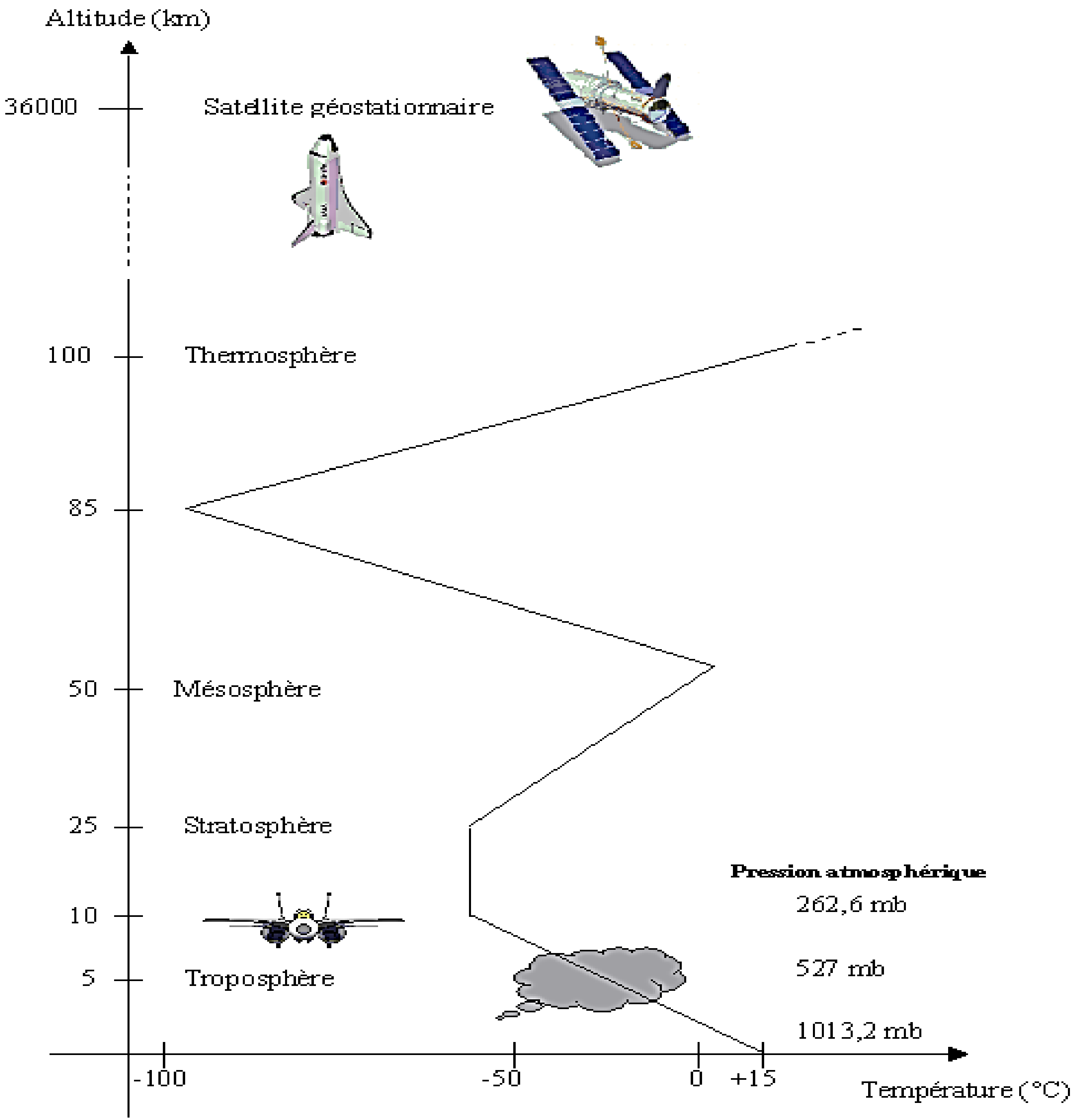
4) Implémentez la fonction EulerVectorielle (cours info) EulerVEctorielle(F,t0,y0,y1,T,N) qui retourne un tuple (X,Y) avec X = np.linspace(t0,T,N+1) et Y le tableau des altitudes et vitesses aux points t_k.

5) Tracer et vérifier.


ZENITH


ZENITH


Red Bull
STRATOS
ZENITH


Altitude (km)
36000
Satellite géostationnaire
100
Thermosphère
85
50
Mésosphère
25
Stratosphère
10
5
Troposphère
Pression atmosphérique
262,6 mb
527 mb
1013,2 mb
-100
-50
0
+15
Température (°C)

Question 1:

$g = \frac{GM}{(R+z)^2}$ d'où $\frac{g(z=0)}{g(z)} = \frac{(R_{terre}+z)^2}{(R_{terre})^2} = 1{,}01$

Question 2:

température, altitude, humidité, composition chimique etc influent sur la valeur de la masse volumique de l'air. Par exemple l'évolution de la température est très compliquée avec z.

Question 3:

L'équation différentielle est:

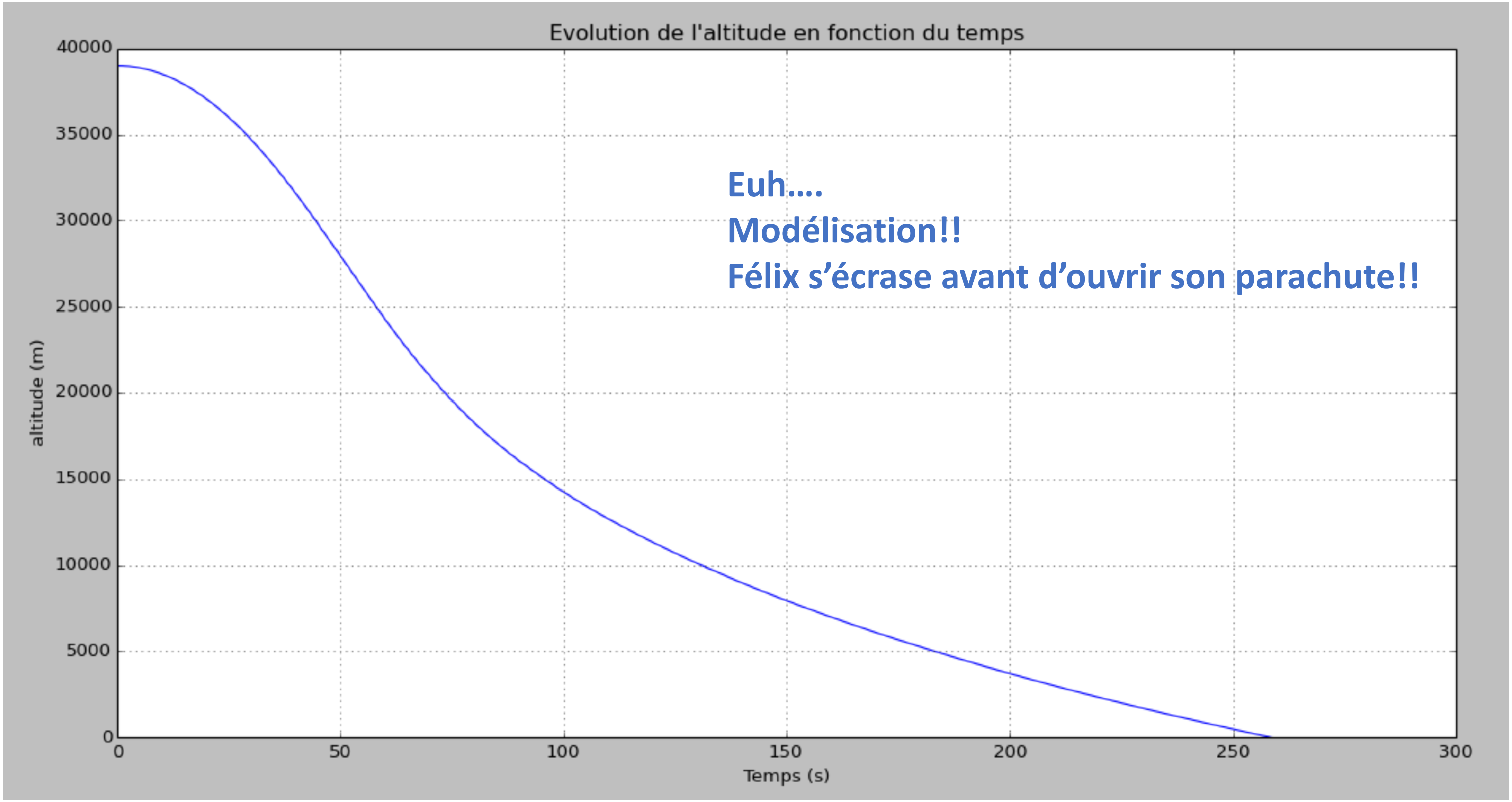
$$m\ddot{z} + mg - \beta\rho\big(z(t)\big)\dot{z}^2 = 0$$

Y(t)= $\begin{bmatrix} z(t) \\ z(\dot{t}) \end{bmatrix}$ vérifie donc $\dot{Y}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \ddot{z}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{z}(t) \\ \frac{\alpha}{m} e^{-kz(t)}\dot{z}^2(t) - g \end{bmatrix}$

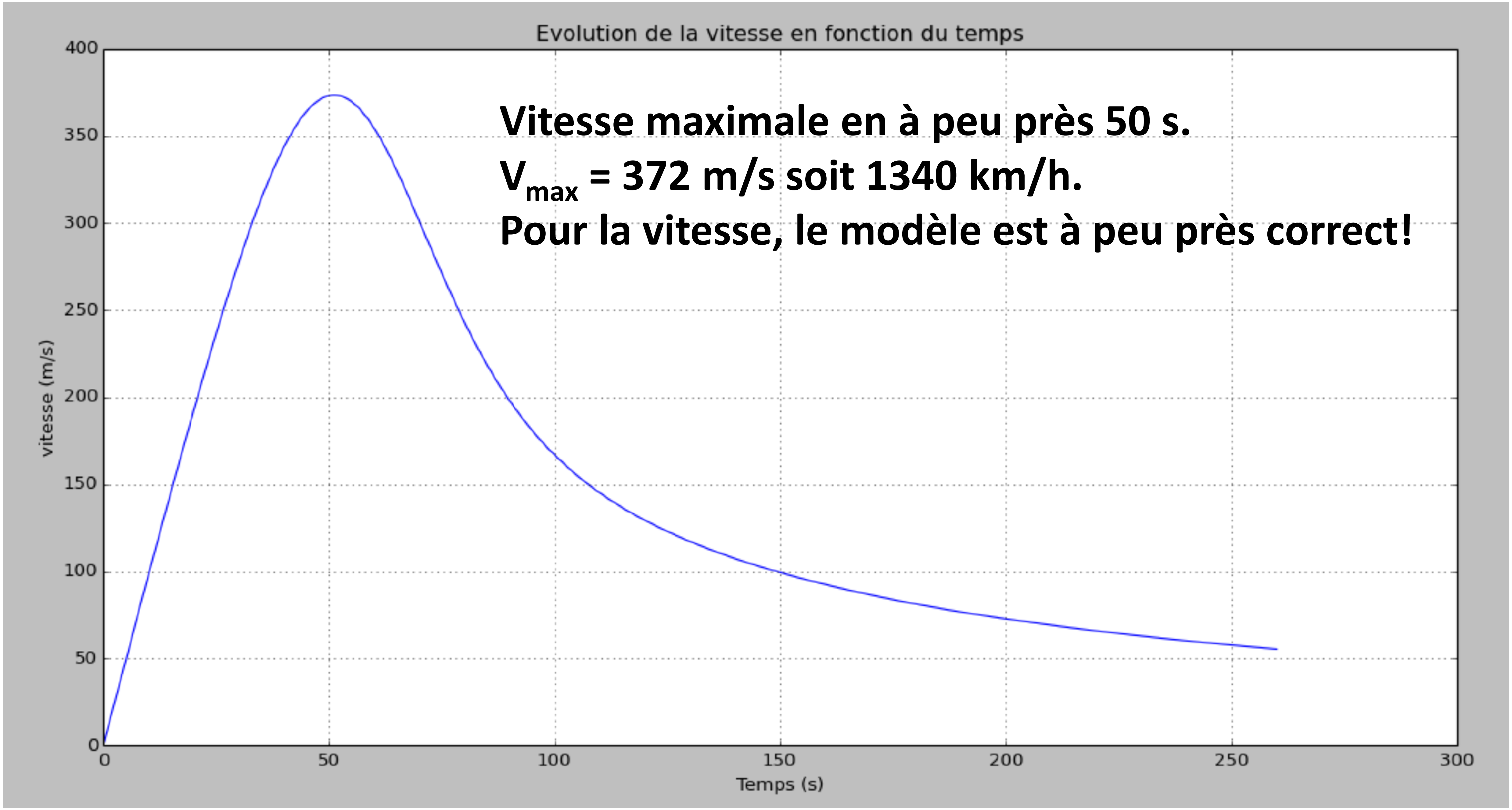
Soit Y'(t)=F(Y(t)) avec F($\begin{bmatrix} Y[0] \\ Y[1] \end{bmatrix}$)= $\begin{bmatrix} Y[1] \\ \frac{\alpha}{m} e^{-kY[0]} Y[1]^2 - g \end{bmatrix}$

```python
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

def EulerCauchyVect(F,y0,T,n):
    y = y0
    Temps = np.linspace(0,T,n+1)
    Y = []
    for t in Temps:
        Y.append(y)
        y = y + T/n * F(y,t)
    return (Temps, np.array(Y))
```

```python
# Le saut de Félix Baumgartner
alpha=0.29
m=90
k=1.39*10**(-4)
g = 9.8
y0 = np.array([39000,0])
T = 260
n = 10000
F = lambda Y,t: np.array([Y[1], alpha/m*np.exp(-
k*Y[0])*Y[1]**2-g])
X, Y = EulerCauchyVect(F,y0,T,n)

# tracé de la position en fonction du temps
plt.figure(1)
plt.ylim(0,40000)
plt.grid()
plt.title('Evolution de l\'altitude en fonction du temps')
plt.xlabel('Temps (s)')
plt.ylabel('altitude (m)')
plt.plot(X,Y[:,0])
plt.show()
```


Evolution de l'altitude en fonction du temps
altitude (m)
Temps (s)
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000
40000
0
50
100
150
200
250
300
Euh….
Modélisation!!
Félix s’écrase avant d’ouvrir son parachute!!

```
# tracé de la vitesse en fonction du temps
plt.figure(2)
plt.grid()
plt.title('Evolution de la vitesse en fonction du temps')
plt.xlabel('Temps (s)')
plt.ylabel('vitesse (m/s)')
plt.plot(X,Y[:,1]*-1)
plt.show()
```


Evolution de la vitesse en fonction du temps
Vitesse maximale en à peu près 50 s.
Vmax = 372 m/s soit 1340 km/h.
Pour la vitesse, le modèle est à peu près correct!
vitesse (m/s)
Temps (s)
0
50
100
150
200
250
300
350
400

Extraits rapports de jury Agro-Véto

En mécanique, le choix d'un repère et de son orientation est indispensable.

- Le système étudié doit être clairement défini. Celui-ci est souvent très simple en mécanique, mais une question à ce sujet conduit parfois à des réponses surprenantes : le ressort lui-même au lieu de la masse accrochée à son extrémité.
- La poussée d'Archimède est encore mal assimilée : les élèves ont du mal à comprendre qu'elle dépend de la masse volumique du fluide et du volume immergé du corps, mais pas de la masse du corps ou de celle du fluide, ni du volume du fluide. Peu de candidats réalisent que la poussée d'Archimède agit aussi sur un corps au fond d'un fluide.
- Les relations mélangeant des grandeurs scalaires et vectorielles ont été fréquentes. Tout développement mathématique devient alors impossible. On ne peut que conseiller aux candidats d'écrire le principe fondamental de la dynamique sous forme vectorielle, puis de le projeter sur les différents axes d'un repère judicieusement choisi (certains choisissent une base polaire pour étudier le mouvement d'un projectile dans le champ de pesanteur, ce qui n'est pas judicieux !). Cette procédure simple devrait permettre d'éviter des relations telles que $v = gt + v_0$ (avec $\vec{g}$ et $\vec{v}_0$non colinéaire....). Lorsque l'examinateur s'inquiète alors de la signification accordée à v, il apprend qu'il s'agit du module du vecteur vitesse !!

- La distinction entre un vecteur force, sa norme et sa composante sur un axe n'est pas toujours claire. Ainsi les projections de forces ont parfois été sources de difficultés. Déterminer les composantes du poids dans le repère associé à un plan incliné a pu relever du défi.
- Les intégrations doivent également être menées avec rigueur. Le jury conseille là aussi aux futurs admissibles de prendre le temps de poser soigneusement leur calcul, avec des règles simples : identification de la variable d'intégration, caractère variable ou constant des autres grandeurs, choix de bornes d'intégration cohérentes dans les deux membres. Trop de précipitation en ce domaine peut en effet conduire à intégrer $v_x = v_0 \cos(\alpha)$ en $x(t) = v_0 \sin(\alpha)$, alors que la variable d'intégration est x et que est α une constante.
- La balistique a été source de nombreuses erreurs, la plus grosse : la vitesse initiale participant au bilan des forces. Se munir d'un repère cartésien avec deux axes, horizontal et vertical, dont l'origine est la position initiale doit paraître naturel, ainsi que la projection de la deuxième loi de Newton sur ces axes.