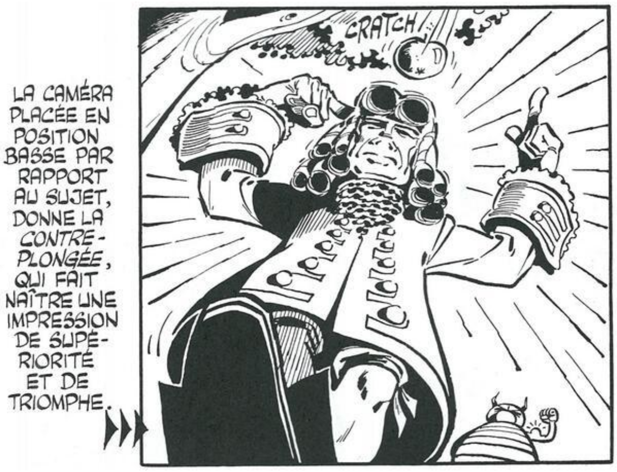
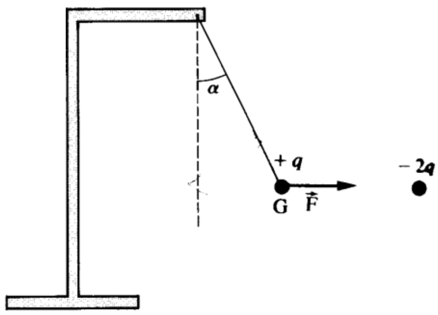
TD – Principe fondamental de la dynamique



Première partie : Système en équilibre

Exercice 1

La boule d'un pendule électrostatique, de poids 0,020 N, portant une charge +q, est attirée par une charge électrique -2q. Les forces électriques exercées sur la boule sont équivalentes à une force horizontale de droite d'action passant par G (centre d'inertie de la boule) et de norme 0,010 N.



Déterminer, lorsque la boule est à l'équilibre :

1°) l'angle α que fait le fil avec la verticale

2°) la tension $\vec{T}$ du fil.

3°) la force électrique exercée par la charge +q sur la charge -2q.

Exercice 2 : Piston en équilibre dans un cylindre

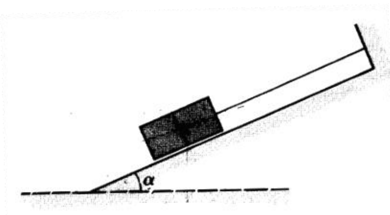
On dispose d'un tube cylindrique, placé verticalement, de diamètre D = 4,0 cm. On ferme celui-ci avec un piston étanche de masse m = 5,0 kg pouvant glisser sans aucun frottement sur les parois du cylindre. Au bout de quelques minutes, le piston est dans une position d'équilibre stable dans le tube. Calculer la pression de l'air à l'intérieur du tube.

Données : intensité du champ de pesanteur g = 9,81 m.s^{-2}

pression atmosphérique : P_0 = 1,0.10^5 Pa.

Exercice 3

Un solide de masse m = 2,0 kg peut glisser sans frottement le long de la plus grande pente d'un plan incliné faisant un angle α = 30° avec l'horizontale. Ce solide est retenu par un fil de masse négligeable, parallèle au plan comme l'indique la figure ci-contre.



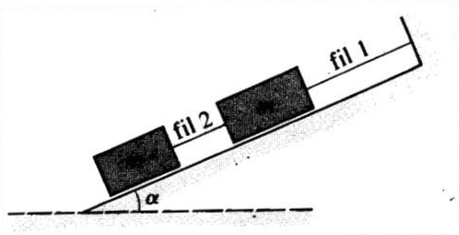
1°) Déterminer :

a) la tension du fil ;

b) la réaction du plan.

2°) A ce solide est accroché par un fil 2, et dans les mêmes conditions qu'à la 1° question, un deuxième solide, de masse m' = 1,0 kg, comme l'indique la figure.

Déterminer la tension de chacun des deux fils.



Exercice 4

Un corps A, de masse m = 10 kg, est posé sans frottement sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale.

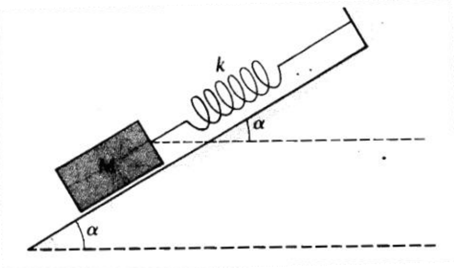
1°) Ce corps est retenu, comme l'indique la figure ci-contre, par un ressort de raideur k = 1000 $N.m^{-1}$.

Tracer le graphe de la fonction qui associe l'allongement du ressort à l'angle α.

On prendra g = 9,8 $N.kg^{-1}$, et on ne tiendra pas compte des frottements.

En déduire l'allongement pour α = 30°, puis α = 60°.

Si l'allongement est de 7,0 cm, que vaut α ?



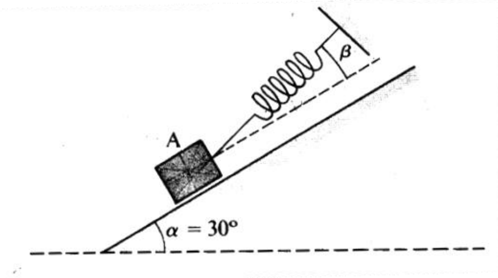
2°) Ce même corps A repose sans frottement sur le plan incliné d'un angle α = 30° avec l'horizontale.

Ce corps est maintenu sur le plan incliné par l'intermédiaire d'un autre ressort (figure ci-contre) faisant un angle β avec la ligne de plus grande pente du plan.

a) Déterminer l'intensité de la force $\vec{T}$ exercée par le ressort sur A en fonction de l'angle β.

b) Calculer $\|\vec{T}\|$ pour β = 0°, β = 30°, β = 60°.

c) En déduire dans chaque cas précédent l'allongement de ce ressort de raideur k = 50 $N.m^{-1}$.



Seconde partie : Mouvement d'un point matériel

Exercice 5 : Tir d'un projectile

On suppose que le champ de pesanteur est uniforme.

Partie 1 : mouvement vertical

A l'instant t = 0, on lance verticalement vers le bas avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, un projectile ponctuel de masse m situé à une hauteur h. L'axe vertical Oy est orienté vers le haut.

On se propose de déterminer son mouvement et son temps de chute. On néglige les frottements de type fluide par l'air ambiant.

1°) Déterminer l'équation horaire du mouvement du projectile. De quel type de mouvement s'agit-t-il ?

2°) En déduire l'expression du temps de chute.

Partie 2 : mouvement parabolique

A l'instant t = 0, on lance d'un point O, avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$, un projectile ponctuel de masse m ; v_0 fait avec l'axe horizontal Ox l'angle α, l'axe vertical Oy est orienté vers le haut.

1°) a) Déterminer les équations horaires du projectile et en déduire l'équation de sa trajectoire.

b) Exprimer la hauteur maximale atteinte et la portée du tir en fonction de v_0, α et g. Commenter l'expression obtenue pour la portée et déterminer pour quelle valeur α_m de α la portée est maximale.

c)* On suppose v_0 constante et α variable. A partir de l'équation de la trajectoire, établir l'équation du second degré en tan α. En déduire l'équation de la courbe (C) séparant les points du plan (Oxy) pouvant être atteints par le projectile, de ceux qui ne seront jamais atteints. Représenter sur un même graphe la trajectoire avec α quelconque, $\alpha = \alpha_m$ et (C).

2°) On tient maintenant compte de la résistance de l'air : on suppose que le projectile est soumis à une force de freinage (frottement fluide) $\vec{F} = -k\vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteur-vitesse à l'instant t. Les conditions initiales sont les mêmes qu'au 1°).

a) Ecrire les équations différentielles du mouvement.

b) En déduire les composantes v_x et v_y de la vitesse.

c) Déterminer les équations horaires du mouvement x(t) et y(t). Donner l'allure de la trajectoire.

Exercice 6 : Mouvement d'un pendule

Soit un point matériel M de masse m, suspendu par un fil inextensible de longueur l, à un axe horizontal Oz. La position du point M est repérée par l'angle $\theta(t)$ mesuré par rapport à la verticale. Le pendule est lâché d'un angle θ_0, sans vitesse initiale.

1°) Donner l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$.

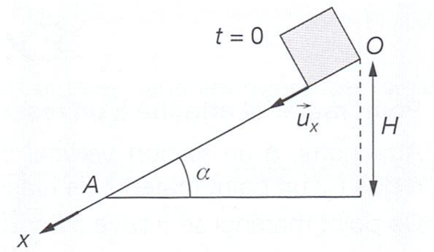
2°) Dans l'hypothèse de faibles déviations par rapport à la verticale, que devient l'équation différentielle précédente ?

En déduire la période du mouvement. Déterminer alors l'expression de $\theta(t)$ en fonction des paramètres du problème.

3°) Etablir l'expression de la tension du fil en fonction du temps.

Exercice 7 : Glissement avec ou sans frottement

Un solide M supposé ponctuel de masse m est déposé à l'extrémité supérieure de la ligne de plus grande pente Ox d'un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale, sans vitesse initiale.



I – Absence de frottement

1°) Déterminer l'accélération du mobile à l'instant t, lorsque les frottements de glissement sont négligés.
2°) En déduire la vitesse du mobile au point A.

II – Existence de frottement de glissement

L'expérience montre que, si α croît lentement à partir d'une valeur nulle, l'objet reste en contact avec le plan et immobile : on admet que ce plan exerce sur M une force égale et opposée à la direction vers laquelle M aura tendance ultérieurement à se déplacer. α croissant, on constate que pour une valeur critique α_c, l'objet se met en mouvement en glissant sur le plan.

1°) En supposant, en présence de mouvement, que la force de frottement puisse s'écrire $\|\overrightarrow{F_f}\| = f\|\overrightarrow{R_N}\|$, f étant le coefficient de frottement dynamique et $\|\overrightarrow{R_N}\|$ la norme de la réaction normale du plan sur M, quelle est la condition sur α_c pour que le solide commence à glisser ?
2°) On suppose $\alpha > \alpha_c$. Déterminer l'accélération du mobile à l'instant t. En déduire la vitesse du mobile au point A.
3°) On se propose maintenant de faire glisser l'objet vers le haut du plan et, pour cela, on lui applique une force horizontale $\overrightarrow{F_0}$ constante. En déduire la condition que doit vérifier $\|\overrightarrow{F_0}\|$ pour que la montée de M soit effectivement possible.
AN : m = 50 kg ; α = 30° ; f = 0,30 ; g = 9,8 m.s^{-2}.

Exercice 8 : Ressorts

I – Ressort horizontal

Une masse m, assimilée à un point matériel M, est accrochée à une des extrémités d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, l'autre extrémité étant reliée à un point fixe A. Ce point M est astreint à coulisser, sans frottement, le long d'une tige horizontale. La masse est déplacée de D de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.
1°) Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre.
2°) Etablir l'équation différentielle du mouvement, en posant $X(t) = \ell(t) - \ell_{éq}$ avec $\ell(t)$ la longueur du ressort à l'instant t et $\ell_{éq}$ sa longueur à l'équilibre
3°) Quel type de mouvement obtient-t-on ? En déduire sa période propre.
4°) En déduire l'équation horaire du mouvement X(t).
5°) Reprendre les questions 3°) et 4°) avec comme conditions initiales : la masse est lancée avec une vitesse v_0 à partir de sa position d'équilibre.

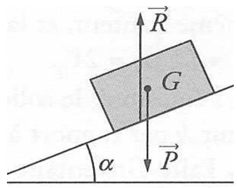
II – Ressort vertical

Un point matériel M est attaché à un ressort vertical de raideur k et de longueur au repos ℓ_0. L'extrémité supérieure du ressort est fixée en un point O, origine de l'axe vertical descendant Ox. A t = 0, M est déplacé de x_0 par rapport à sa position d'équilibre et est lâché sans vitesse initiale.
1°) Déterminer la longueur du ressort à l'équilibre ℓ_{eq}.
2°) Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\ell(t)$, longueur du ressort à l'instant t. En déduire l'expression de $\ell(t)$.

Exercice 9 :

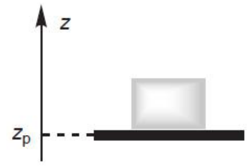
Un parallélépipède de masse m est en équilibre sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale.

1. Faire l'inventaire des forces appliquées sur le solide, les représenter sur un schéma et expliquer pourquoi il y a forcément des forces de frottement entre le solide et le plan incliné. Le solide peut rester en équilibre sur le plan tant que la valeur de la force de frottement respecte la condition suivante : $f \leq f_0.R_N$, avec f_0 une constante appelée **coefficient de frottement statique,** qui dépend de la nature des surfaces en contact.
2. Déterminer l'expression donnant l'angle d'inclinaison maximal α_{max} du plan en fonction de f_0 pour que le solide reste en équilibre.
3. Calculer α_{max} pour f_0 = 0,20.



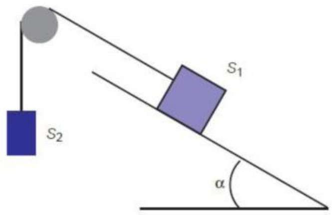
Exercice 10 :

Un objet de masse m est posé sur un plateau de cote z_p. Le plateau est animé d'un mouvement vibratoire vertical tel que : $z_p = z_0 \cos \omega t$. A quelle condition sur z_0 et ω l'objet reste-t-il lié au plateau ? Calculer z_{0max} pour une fréquence de vibration du plateau de f_0 = 50 Hz.



Exercice 11 :

Une poulie permet de réaliser le montage de la figure ci-dessous. S_1, de masse m_1 glisse sans frottement sur le plan incliné et S_2, de masse m_2, se déplace verticalement.
Déterminer le vecteur accélération de chacun des deux solides, la poulie et le fil étant idéaux.



Exercice 12 :

Un skieur, assimilé à un point matériel de masse m, descend une pente inclinée d'un angle avec le sol et de hauteur H.
Le skieur part du haut de la pente sans vitesse initiale.
1°) On considère tout d'abord que les frottements sont négligeables.

- **a)** Donner l'expression de la réaction du support.
- **b)** Donner l'expression de la vitesse.
- **c)** Quelle vitesse le skieur a-t-il atteint en bas de la pente ?

2°) On considère maintenant que le skieur est soumis à des forces de frottement fluide.

- a) Déterminer l'équation horaire vérifiée par la vitesse.
- b) Résoudre cette équation.
- c) Exprimer la vitesse limite atteinte par le skieur. Commenter.

Un point matériel M, de masse m, est susceptible de glisser sans frottement de type solide le long d'un rail horizontal fixe de direction (Ox). La résistance à l'air à l'avancement du point matériel se traduit par une force de frottement fluide $\vec{f} = -kv\vec{v}$ (k est le coefficient de frottement). Initialement le point M est placé en O sans vitesse initiale.
Dans une première phase, une force motrice constante $\overrightarrow{f_0} = f_0\overrightarrow{u_x}$ ($f_0 > 0$) est exercée sur le point M à partir de t=0.

- a) Quelle est l'équation différentielle satisfaite par v(t) ?
- b) En étudiant les variations de $\frac{dv}{dt}$ et v à partir de t=0, montrer sans calculer l'expression de v(t) que le point M acquiert une vitesse limite v_l que l'on exprimera en fonction de f_0 et k.
- c) On pose $\tau = \frac{m}{kv_l}$. Quelle est la dimension du paramètre τ ?
- d) A partir de $t=t_1$ pour lequel $v \simeq v_l$, la force motrice $\overrightarrow{f_0}$ est supprimée.

Exprimer v en fonction de v_l, t_1 et t pendant cette seconde phase, et représenter le graphe $\frac{v}{v_l} = f\left(\frac{t}{\tau}\right)$ pour $t \geq t_1$.