Incertitudes, modélisation

Magazine : Cosinus n° 51 Page : 6-11

Notions et contenus	Capacités exigibles
Variabilité de la mesure d'une grandeur physique. Incertitude. Incertitude-type.	Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure. Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (évaluation de type A). Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une autre approche que statistique (évaluation de type B). Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
Incertitudes-types composées.	Évaluer, à l'aide d'une relation fournie, l'incertitude-type d'une grandeur qui s'exprime en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, par une relation du type somme, différence, produit ou quotient. Comparer entre elles les différentes contributions lors de l'évaluation d'une incertitude-type composée. **Capacité numérique :** simuler, à l'aide d'un langage de programmation ou d'un tableur, un processus aléatoire – simulation de Monte-Carlo – permettant de caractériser la variabilité de la valeur d'une grandeur composée.
Écriture du résultat d'une mesure.	Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
Comparaison de deux valeurs ; écart normalisé.	Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé. Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation.

L'origine physique des incertitudes.
Il n'y a pas de mesure parfaite.

La différence de masse entre A et B, d'une part, et B et C, d'autre part étant inférieure au seuil déclenchant la bascule de la balance, les 2 premières pesées semblent montrer que A = B et que B = C et donc, “mathématiquement” par transitivité, on est amené à considérer que B = C, ce qu'infirme ici “physiquement” la troisième pesée (la différence de masse entre A et C étant ici supérieure au seuil de bascule).

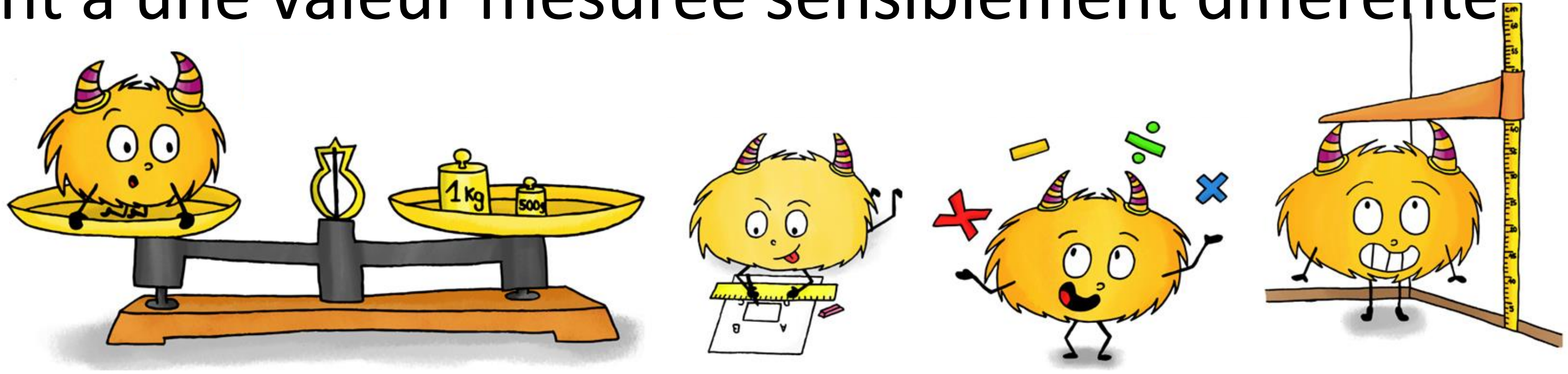
- **Aucune mesure expérimentale ne peut être infiniment précise.**

- Un résultat expérimental ne peut donc qu'être associé à une **incertitude**, qu'il convient d'évaluer selon des règles rigoureuses et universelles.

- La science de la mesure s'appelle la **métrologie**.

- Tout étudiant de BCPST doit être conscient que à tout résultat expérimental est associé d'une incertitude et doit être capable d'évaluer celle-ci dans les cas simples.

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette **complexité** se traduit systématiquement par **une variabilité de la mesure**, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première.

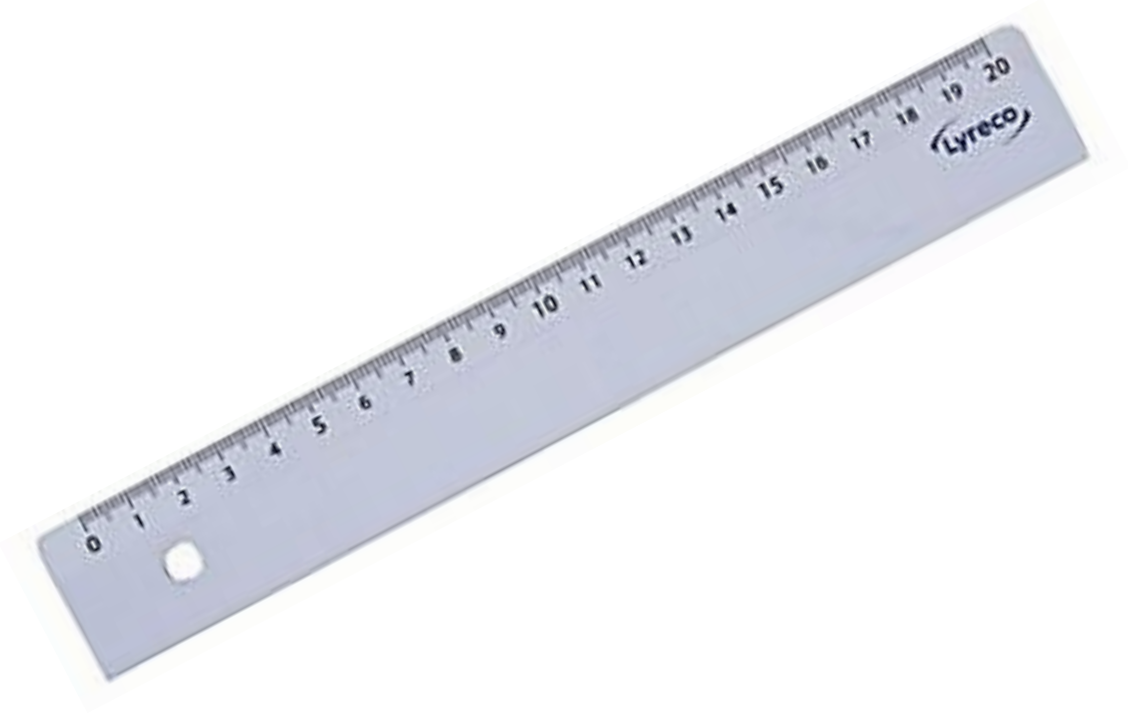


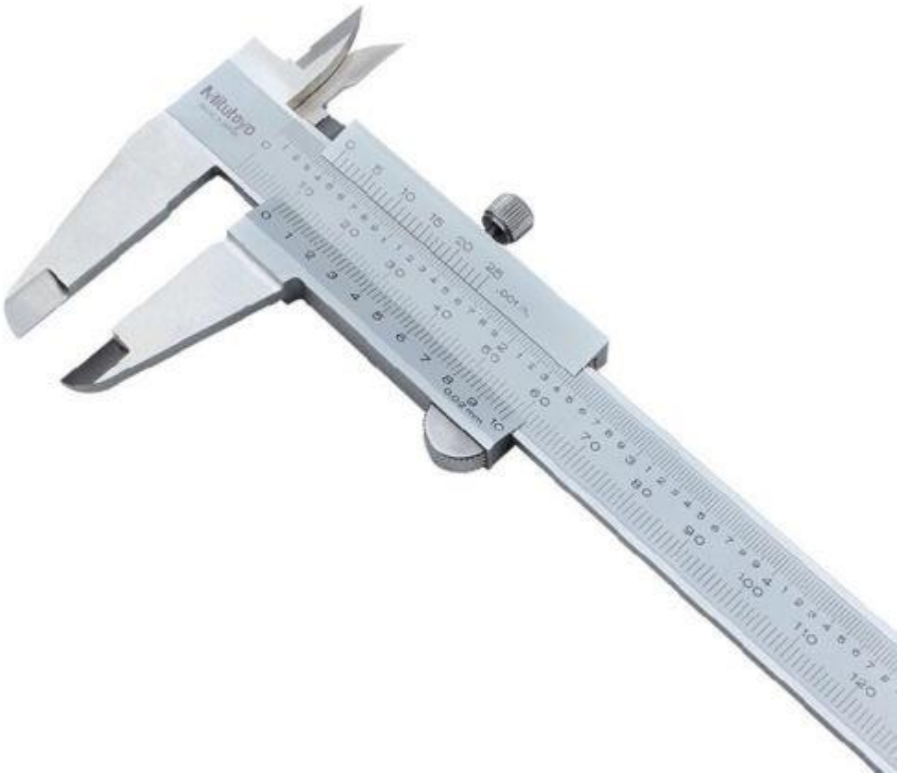
Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure.
Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- <u>le choix de la méthode de mesure :</u>

Choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n’implique pas la même précision !



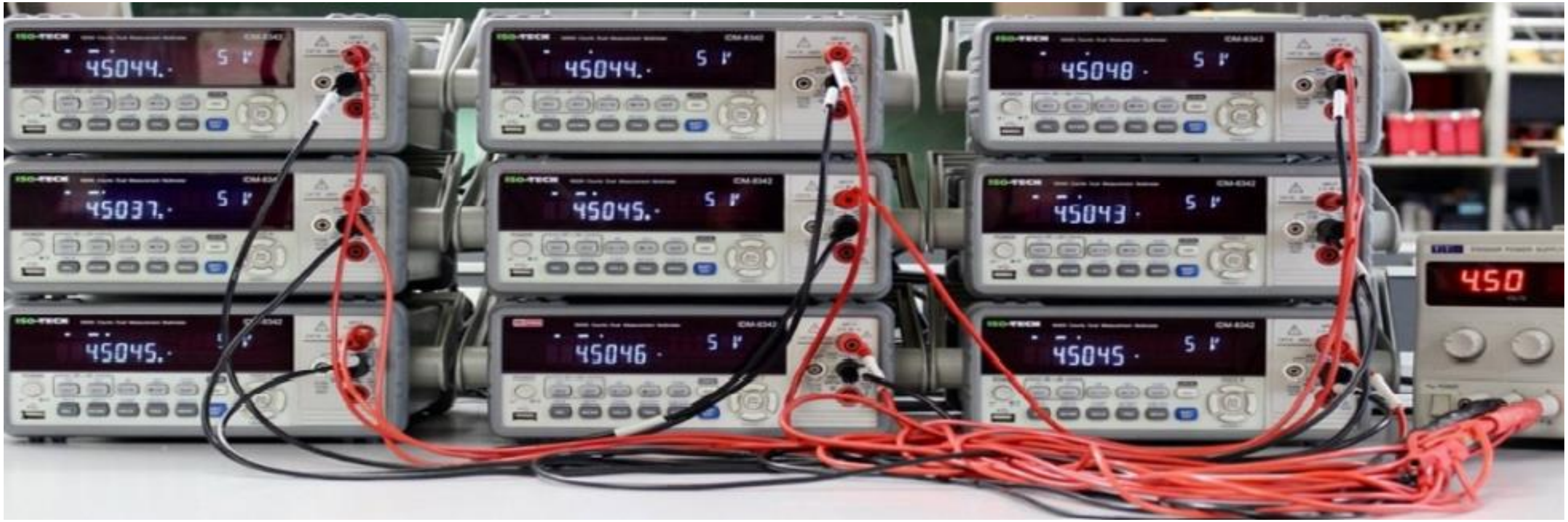


- **aux variations de l’environnement :**

Si l’on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l’air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi.

- **aux instruments de mesure :**

Mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente.

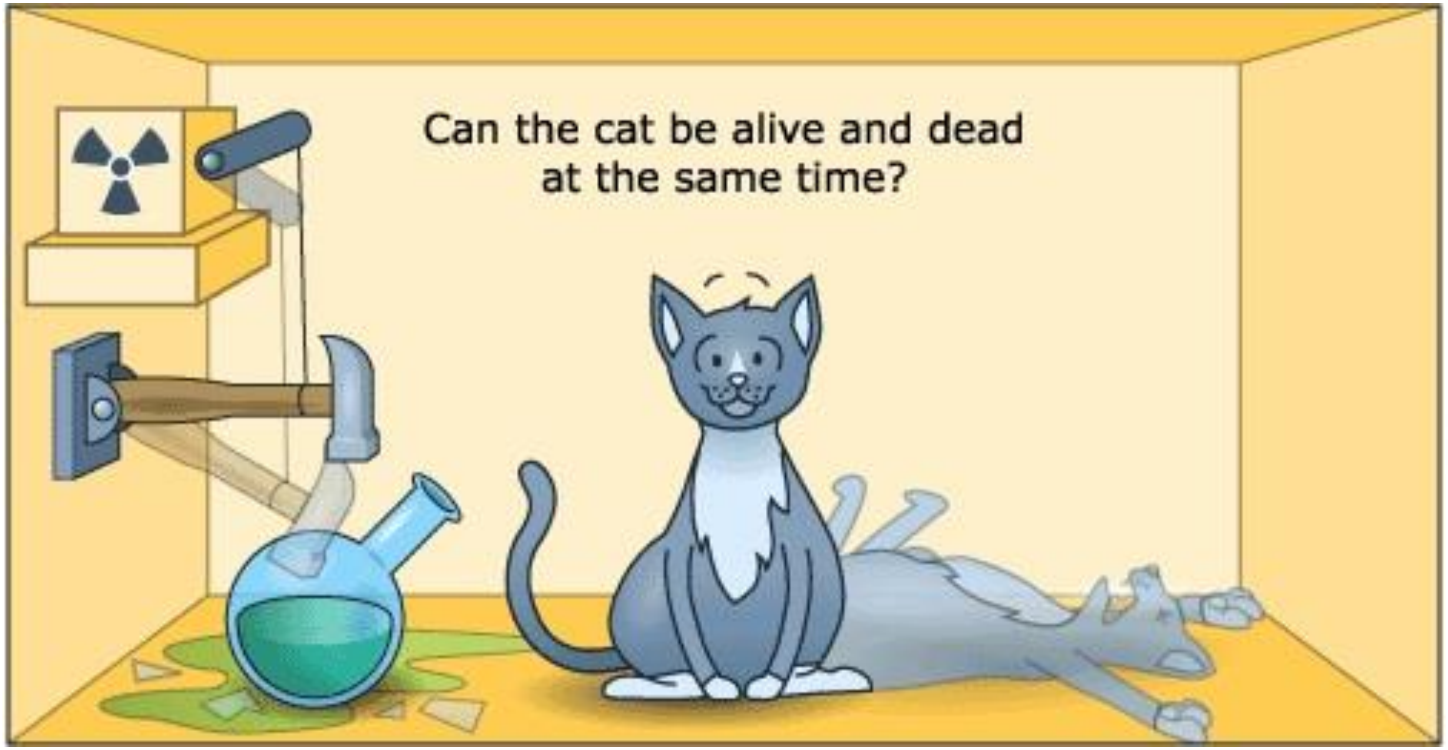


L'illusion de la précision des appareils à affichage numérique.

La mesure d'une tension à l'aide d'un voltmètre donne une valeur unique, une indication.
Mais si on prend d'autres voltmètres de la même marque, on obtient d'autres indications.
La variabilité de la mesure existe, mais elle est ici masquée si l'on n'envisage qu'un instrument unique.

- **au processus physique lui-même :**

Par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité. . et surtout, à la personne réalisant l’expérience.



- **Au niveau scolaire, la personne réalisant l'expérience est la généralement principale cause de variabilité de la mesure.**
  C'EST VOUS ☺ !!

Par ses gestes, ses choix et sa technique, cette personne introduit une variabilité importante : deux personnes réalisant la même expérience, dans les mêmes conditions, avec le même matériel, trouvent des valeurs différentes.
Le but de toute formation expérimentale, de la maternelle jusqu'au plus haut niveau universitaire et professionnel (avec des nouvelles connaissances et de nouvelles compétences), permet patiemment de faire diminuer cette variabilité.

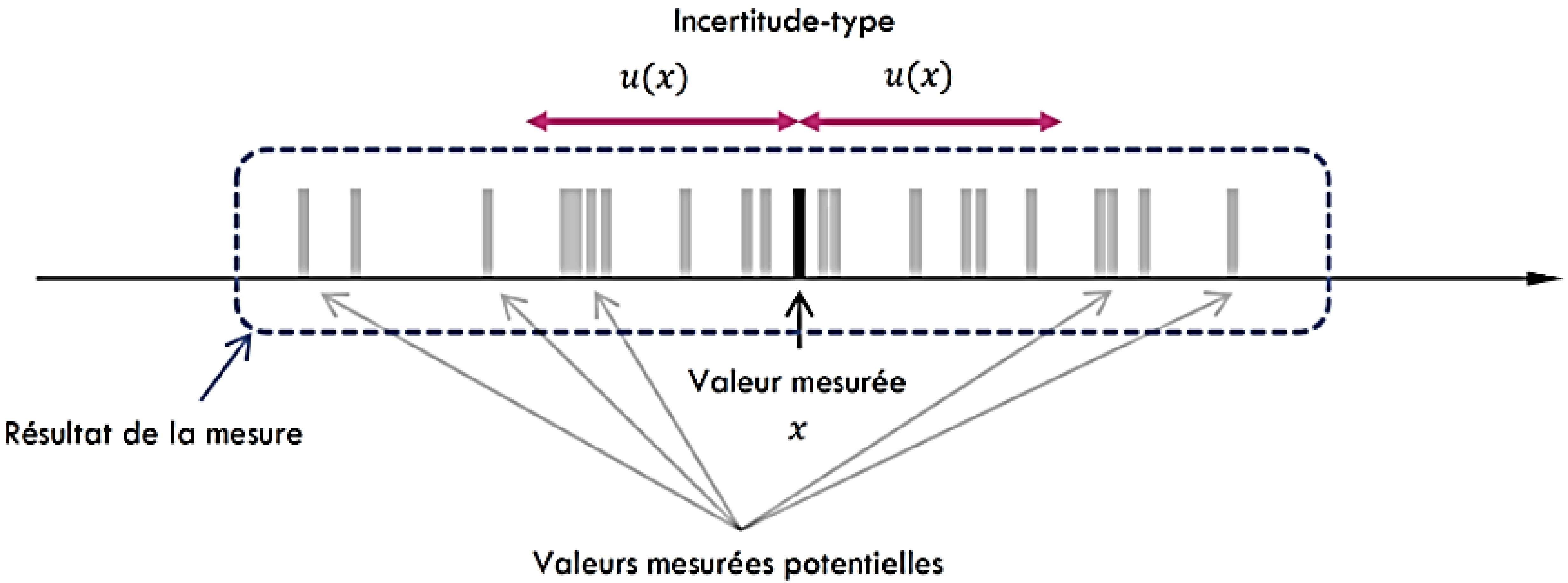
Le nouveau paradigme (celui de l'incertitude)

L'idée centrale de ce paradigme est la variabilité de la mesure :
le résultat d'une mesure ce n'est pas une valeur unique mais un ensemble de valeurs numériques, raisonnablement attribuables à la grandeur d'intérêt.

- La *valeur mesurée* est une valeur particulière de cet ensemble.
- L'incertitude est une indication de la dispersion de cet ensemble.
- L'incertitude-type est une incertitude évaluée à l'aide d'un écart-type.

Interprétation de l'incertitude-type

L'incertitude ce n'est plus l'erreur ; ce n'est plus la « tolérance ».
L'incertitude(-type) c'est désormais une évaluation de l'écart-type de l'ensemble des grandeurs raisonnablement attribuables au mesurande.

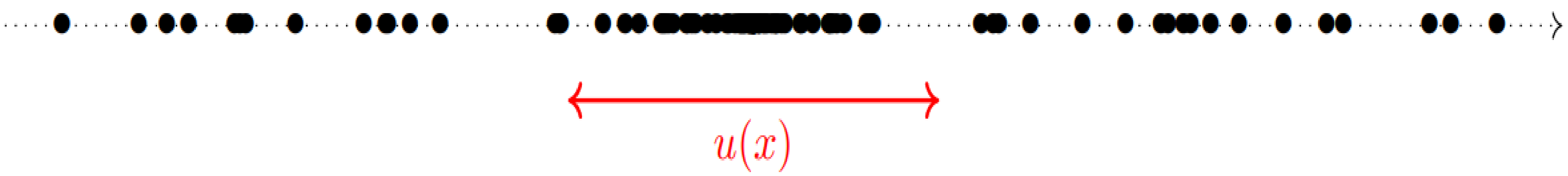


INCERTITUDE DE TYPE A

Lorsque l'on dispose **d'un grand nombre de mesurages par un même opérateur**, on peut évaluer l'incertitude de type A (statistique).

C'est le cas lors de vos **TIPE** quand vous prenez la précaution de répéter plusieurs fois la même expérience ou en **TP** lorsque l'on met en commun les résultats des différents groupes (**déjà discutable** valable si le matériel est exactement le même et que les élèves ont tous la même dextérité…).

Il est à noter qu'il n'y a qu'une incertitude-type u(x) pour l'ensemble des mesures x_i , et non pas une pour chacune. L'incertitude-type caractérise la variabilité d'un processus de mesure, et donc toutes les mesures issues de ce processus ont logiquement la même incertitude-type.



Représentation d'une série de 100 mesures d'une grandeur x ainsi que de la largeur de l'incertitude-type de cet ensemble.

Le résultat d'**UNE** mesure parmi toutes les mesures sera noté par convention

$x \pm u(x)$.

Attention ! Ce qui suit le ± est une incertitude-type. Cela ne définit pas un intervalle. Cette notation synthétique peut prêter à confusion.

L'incertitude-type permet de quantifier la variabilité d'une mesure.

Ainsi, deux mesures x_1 et x_2 issues du même processus sont séparées en moyenne de quelques u(x) par construction de l'incertitude-type en tant qu'écart-type. Pour éviter cela, on peut spécifier les deux informations de façon séparée, à savoir x = ... d'une part et u(x) = ... d'autre part avec unité si grandeur dimensionnée.

Ecart-type σ_{n-1}

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Calculatrice ou python !

Moyenne :

$$\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$$

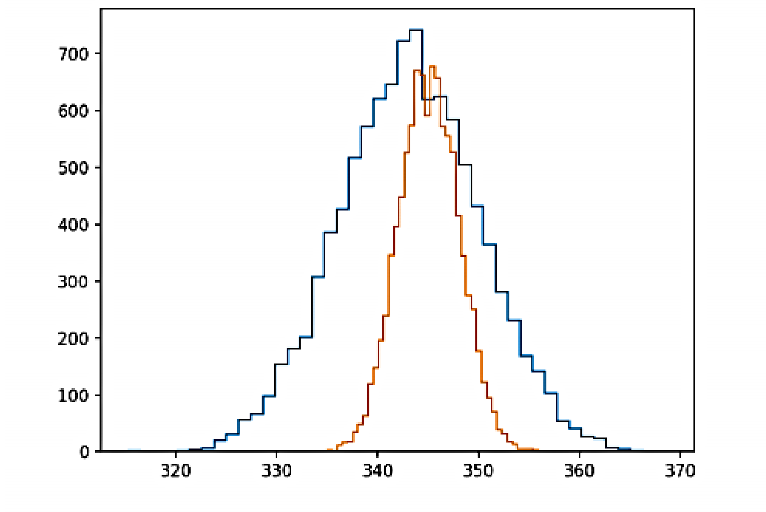
Pour pouvoir comparer deux mesures (issues de deux processus de mesure) entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

L'écart normalisé EN ou z-score donnant les valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes-type u(m1) et $u(m_2)$ est défini ainsi :

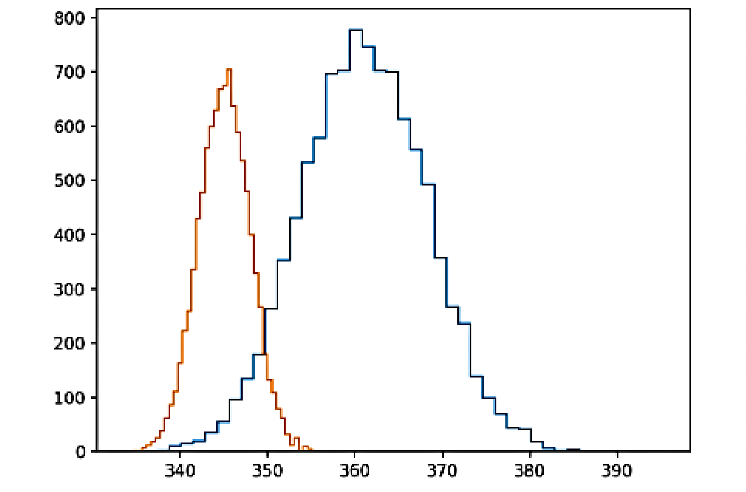
$$\boxed{E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}}$$

Par convention, on qualifie souvent deux résultats de compatibles si leur écart normalisé vérifie la propriété :

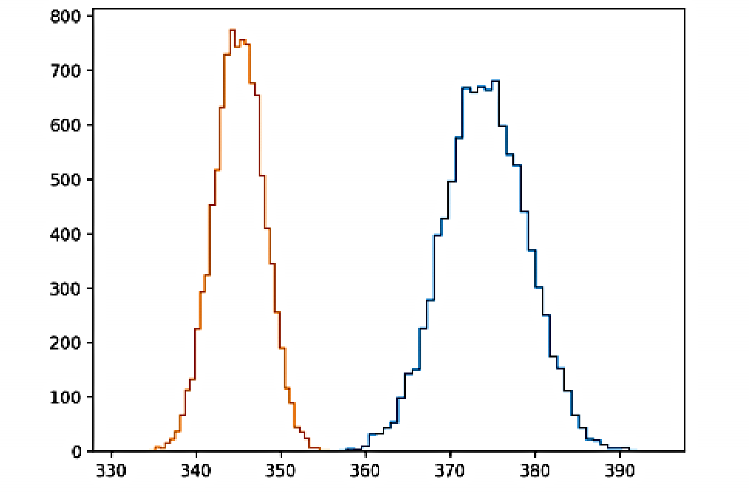
$$\boxed{E_N \lesssim 2}$$



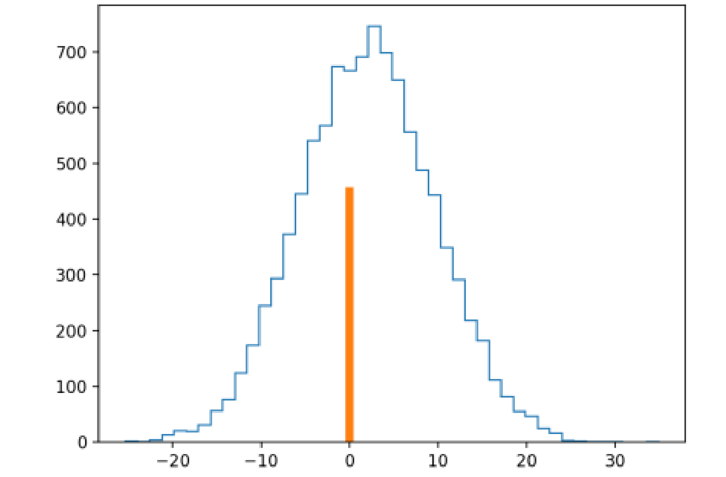
(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$.



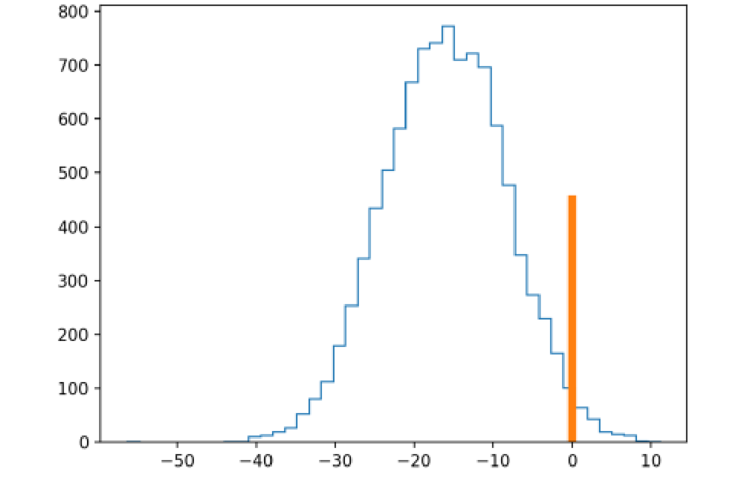
(b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$.



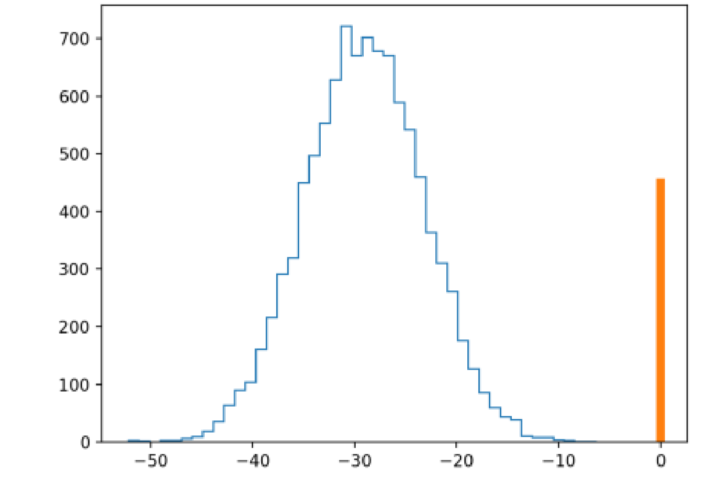
(c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.



(a) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 2a.



(b) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec les distributions de la figure 2b.



(c) Simulation d'un calcul de $m_1 - m_2$ point par point avec avec les distributions de la figure 2c.

Avec le « z »-score, les limites du modèles, l’influence de l’analyse des données, peuvent être objectivement discutées.

La compatibilité du modèle et des observations expérimentales ne sont plus systématiques, et exigent une remise en cause :

- de l’opérateur qui a pu commettre une faute ;

- de l’estimation des incertitudes ;

- du modèle — c’est ce qu’on rencontrera assez souvent : les modèles physique simplifient exagérément la réalité.

Que conclure ?

Souvent lorsqu'il y a désaccord on conclut que les mesures sont de mauvaise "qualité". Cette conclusion est erronée :

- la qualité des mesures se rapporte au soin de l'expérimentateur ou l'expérimentatrice, à son expérience, au respect des procédures et des normes, et **non au résultat** ;
- **l'incertitude est une grandeur intrinsèque au processus de mesurage, et n'est pas directement liée à la qualité du mesurage** ; on peut avoir une grande incertitude et une mesure tout à fait correcte.
- **on ne valide pas une loi (tout le monde n'est pas Einstein), mais un modèle : on ne peut que l'invalider ; un modèle décrit raisonnablement un phénomène, ou pas.**

Certains points de mesure ont statistiquement une chance d’être très éloignés des autres.
Pour gagner en précision, nous pouvons utiliser les différents points de mesures effectués pour aller plus loin qu’une simple estimation de l’incertitude-type sur une mesure unique :
l’expérience n’est plus « mesurer un point à l’aide d’un protocole » mais « mesurer la moyenne de N points effectués avec le même protocole ».

Cette expérience est différente et a donc une incertitude-type différente.
L’intérêt de la moyenne est qu’elle va réduire les variabilités.

Pour estimer l’incertitude-type de cette moyenne, il faut par définition reproduire un grand nombre de fois l’expérience et **calculer l’écart-type de la distribution obtenue et non simplement pour une mesure**.

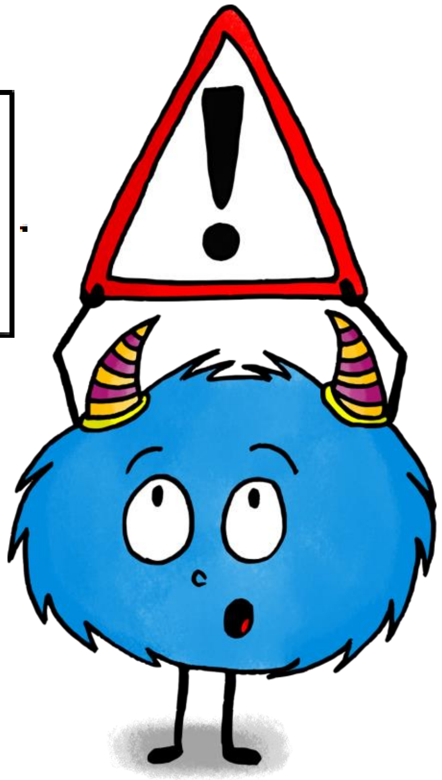
On réalise N fois le même protocole pour obtenir l'ensemble des points expérimentaux $\{x_i\}$.

On note l'incertitude-type u($\overline{x}$) de cet ensemble de mesures.

Le résultat de l'expérience est $\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})}$ avec $\boxed{\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}$

Moyenne

la moyenne de la distribution et avec $\boxed{u(\bar{x}) = \frac{u(x)}{\sqrt{N}}}$.



Ecart-type σ_{n-1}

$$u(x) = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2}$$

Calculatrice ou python !

Comment présenter ce résultat expérimental ?

$X = \overline{X}$ **unité; u($\overline{X}$) unité**

$X = \overline{X} \pm$ **u($\overline{X}$) unité,**

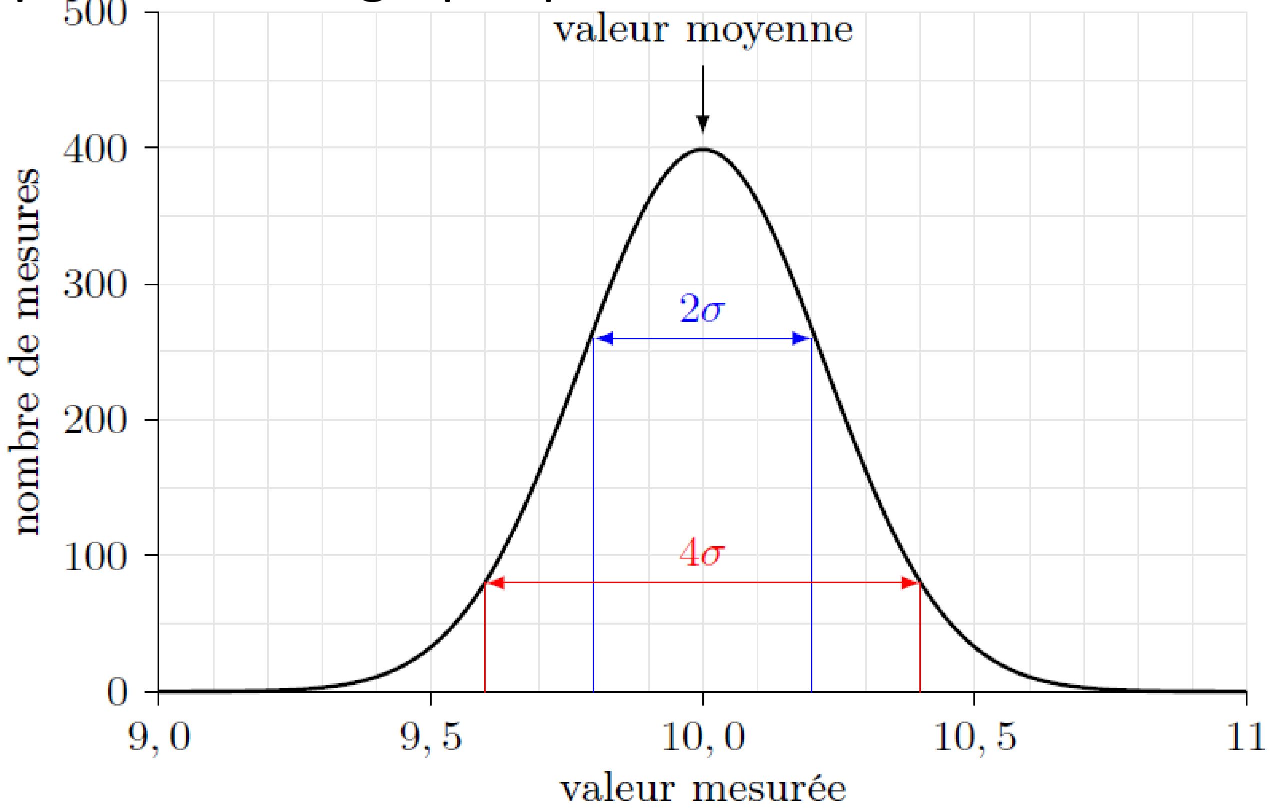
(niveau de confiance de 68% *pour une loi normale*, répartition de type gaussienne)

$V_{éqv} = 15,5$ mL $\pm$ 0,3 mL

R = 233 Ω $\pm$ 12 Ω

V = 132 km.h^{-1} $\pm$ 5 km.h^{-1}

Si on construit un graphe donnant en abscisses les valeurs mesurées de m et en ordonnées le nombre fois que chaque valeur a été obtenue, on constate que **ces mesures se répartissent symétriquement autour de la valeur moyenne $\bar{m}$**, selon une loi dite loi normale, dont la représentation graphique est une courbe « en cloche », la courbe **gaussienne.**



L'étalement de cette courbe est mesurée par **l'écart-type, noté σ_{n-1}** :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N} (m_k - \bar{m})^2}{N-1}}$$

Si la répartition des mesures obéit réellement à la loi normale, on peut montrer que :

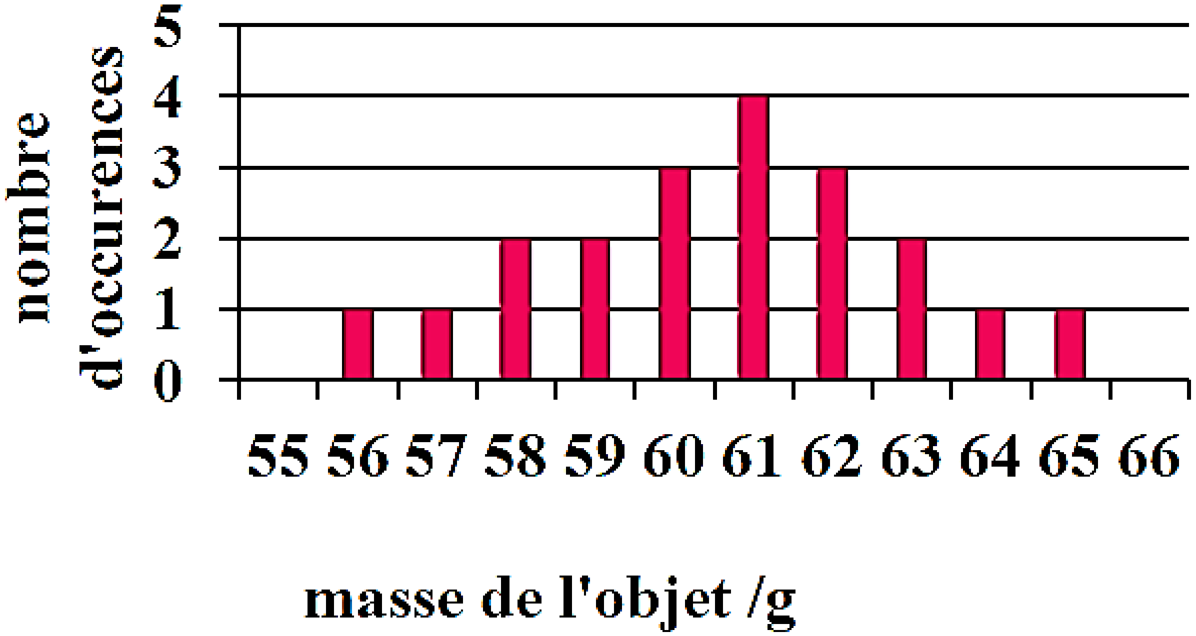
- 68 % des mesures se trouvent dans l'intervalle $[\bar{m}-\sigma \,;\, \bar{m}+\sigma]$,
- 95 % des mesures se trouvent dans l'intervalle $[\bar{m}-2\sigma \,;\, \bar{m}+2\sigma]$,
- 99,7 % des mesures se trouvent dans l'intervalle $[\bar{m}-3\sigma \,;\, \bar{m}+3\sigma]$.

L'incertitude ne doit pas être donnée avec un nombre excessif de chiffres: un ou deux chiffres significatifs.
(l'incertitude sur l'incertitude est de l'ordre de 10-25 %).

On ne garde **qu'un seul chiffre significatif** en arrondissant à la valeur supérieure (on préfère majorer l'incertitude que la minorer).
Mais si en ne gardant qu'un seul chiffre l'arrondi entraîne une trop grande surestimation (plus de 10% de la valeur de l'incertitude) on garde **deux chiffres**.

Une fois l'arrondi sur l'incertitude effectué il faut supprimer les chiffres qui n'ont pas de sens sur l'estimateur : on prendra comme dernier chiffre significatif, celui de même position que celui de l'incertitude.
On arrondira l'estimateur avec les règles usuelles.

Une expérience consiste à mesurer **la masse d'un objet** à l'aide d'une balance précise au gramme près. On effectue mesures de manière indépendante mais dans des conditions identiques (même expérimentateur, même balance).
On obtient les **20 mesures** suivantes (en gramme) :
56, 57, 58, 58, 59, 59, 60, 60, 60, 61, 61, 61, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 64, 65.



A l'aide d'un tableur :

(LibreOffice, MS Excel, Regressi, Graph2D, calculatrice)

$\overline{m}$ = 60,6 g

σ_{n-1} = 2,326 g

$u(\overline{m}) = (\sigma_{n-1} / \sqrt{20})$ = 1,040 g

m = (60,6 ± 1,1) g

INCERTITUDE DE TYPE B

Expériences sans variabilité observée

Certaines expériences n'ont pas de variabilité observée : **en reproduisant la mesure, on retrouve systématiquement le même résultat**.

C'est par exemple le cas lorsque l'on mesure naïvement la taille d'un objet avec la même règle graduée.

Cette absence de variabilité observée n'implique pas une absence de variabilité : à l'échelle de cette expérience, avec **l'appareil de mesure choisi, la variabilité est plus faible que la précision de la mesure.**

Selon les conditions expérimentales, il n'est parfois pas matériellement possible (ou souhaité) de reproduire le processus de mesure.

Une seule valeur est accessible et il faut tout de même estimer son incertitude-type.

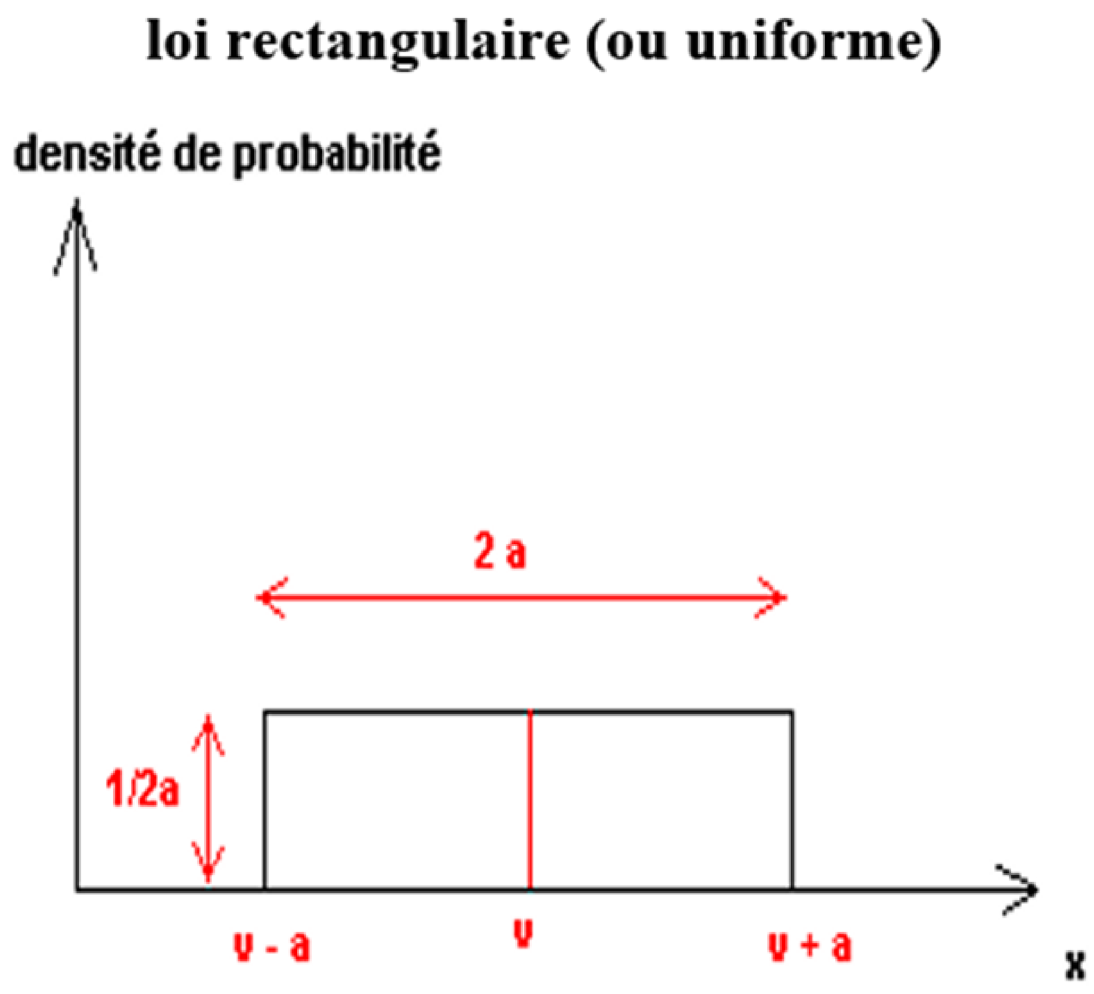
Lors d’une mesure sans variabilité observée, on estime la plus petite plage dans laquelle l’expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée.

On note $\bar{x}$ la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur : l’expérimentateur est certain de trouver la valeur recherchée dans l’intervalle $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$.

Dans ce cas, le résultat de la mesure est **$\bar{x} \pm u(\bar{x})$ avec $u(\bar{x}) = \Delta / \sqrt{3}$.**

$$\boxed{\bar{x} \pm u(\bar{x})} \text{ avec } \left| \; u(\bar{x}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}} \right.$$

D'où sort ce $\sqrt{3}$?



espérance : v

écart-type : $\frac{2a}{\sqrt{12}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$

Un appareil de mesure pour lequel on dispose d’une information constructeur sur sa précision

- **Mesure d’un volume par de la verrerie jaugée en chimie**

Sur ce matériel, la classe ou tolérance a (ou t) est toujours indiquée (notée sur les instruments de mesure sous la forme ± a).

La loi de probabilité associée à ces instruments est **une loi rectangulaire de largeur a ou t**.

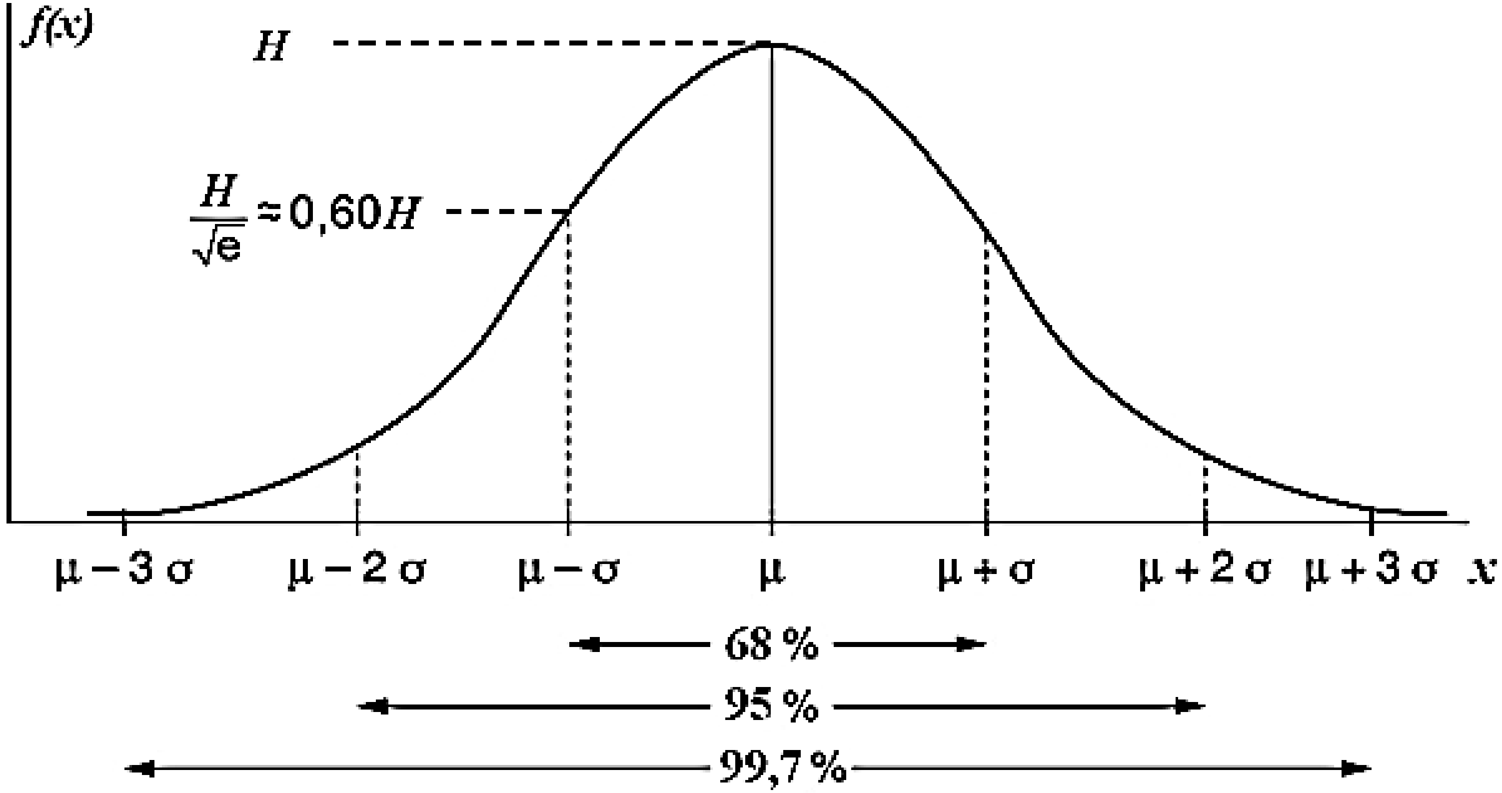
Sur une pipette jaugée de 25 mL est indiquée ± 0,03 mL.

$$u(V) = \frac{0{,}03}{\sqrt{3}} = 0{,}017\ mL$$

$$\frac{u(V)}{V} = \frac{0{,}017}{25} = 0{,}07\%$$

V = (25,00 ± 0,02) mL

loi Normale (ou Gaussienne)



densité de probabilité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

espérance : μ

écart-type : σ

$Proba(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 68\%$

$Proba(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 95\%$

$Proba(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\%$

Pour un appareil à affichage numérique (multimètre, pHmètre, conductimètre):

- **Si le constructeur fournit une indication de tolérance (a ou t) sans autre forme d'information, on supposera que la distribution est rectangulaire donc une incertitude-type u(x) = $\frac{t}{\sqrt{3}}$**

La notice du conductimètre Radiometer CDM210 indique que pour une mesure de conductivité, la tolérance est ± 0,2% de la lecture ± 3 du digit le moins significatif.
Si on mesure une conductivité µ = 3,54 $mS.cm^{-1}$, la demi-largeur a de la distribution rectangulaire vaut a = $(0,2.10^{-2}.\ 3,54) + 0,03 = 0,037\ mS.cm^{-1}$.
L'incertitude-type vaut u(µ) = $\frac{a}{\sqrt{3}} = 0,021\ mS.cm^{-1}$.

$$\mu = (3,54 \pm 0,02)\ mS.cm^{-1}$$

Exemple : un voltmètre affiche l'indication $U = 11{,}64$ V, la notice indique pour ce calibre : $\Delta U = 2\% U + 3$ digit

Incertitude-type :

$$\Delta U = 0{,}02 \times 11{,}64 + 3 \times 0{,}01 = 0{,}26\ \text{V}$$

$$u(U) = \frac{\Delta U}{\sqrt{3}} = 0{,}15\ \text{V}$$

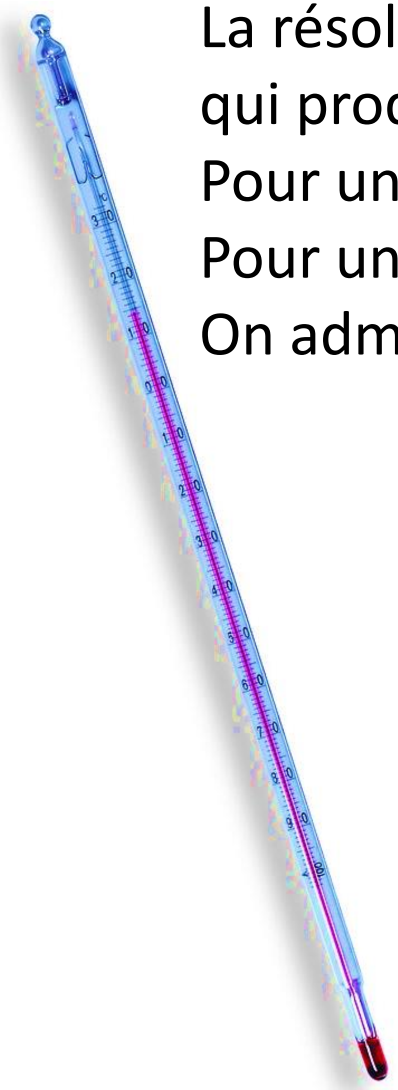
Incertitude-type relative :

$$\frac{u(U)}{U} = \frac{0{,}15}{11{,}64} = 1{,}3\ \%$$

V = 11,64 ± 0,15 V

Ou V = 11,6 ± 0,2 V

Pour un appareil à affichage numérique sans indication du constructeur ou avec graduation en l'absence de notice ou d'indication du constructeur (balance, règle, burette graduée, banc Köfler, réfractomètre, thermomètre, etc.)



La résolution de l'appareil de mesure est la plus petite variation de la grandeur mesurée qui produit une variation perceptible de l'indication délivrée par l'instrument.
Pour un appareil gradué : (plus petit écart entre graduations)
Pour un appareil à affichage numérique : (unité sur le dernier chiffre affiché)
On admet encore une distribution rectangulaire:

$$\boldsymbol{u(x) = \frac{graduation}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{graduation}{\sqrt{12}}}$$

- <u>**Lecture simple**</u> (thermomètre à alcool, appareil à aiguille):

Thermomètre gradué en degrés Celcius (1 div = 1°C)
L'incertitude-type sur la lecture de la température T est donc:

$$u(T) = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0{,}29°C$$

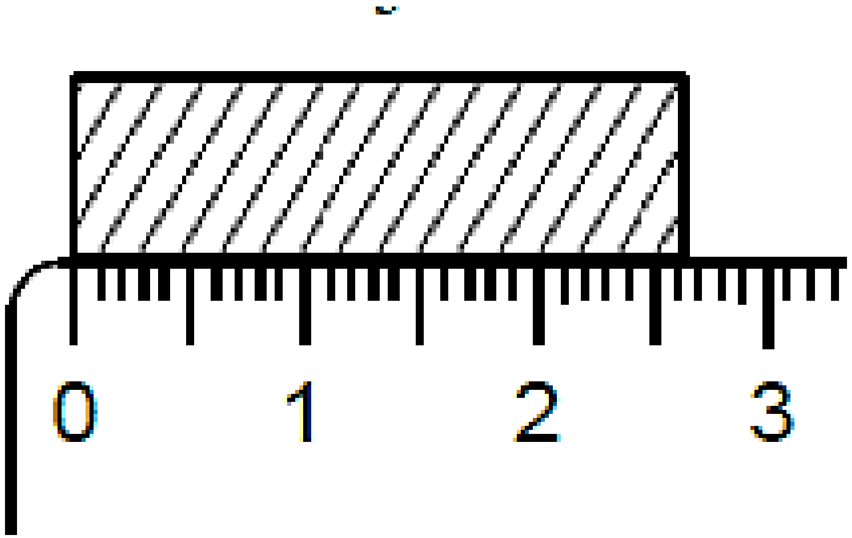
<u>Lecture double</u> (le zéro + la grandeur): règle, burette graduée:

$$u(x) = \sqrt{2}.\frac{graduation}{\sqrt{12}} = \frac{graduation}{\sqrt{6}} *$$

Mesure de la longueur d’un objet à l’aide d’une règle graduée en mm:

$$u(L) = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}41\ mm$$

L = 26,0 ± 0,5 mm



** Cette formule admise pour l’instant sera expliquée par propagation des incertitudes juste après.*

Évaluation de l’incertitude expérimentale liée à la méthode de mesure : « ressenti » de l’expérimentateur sur une mesure (évaluation de type B)

Détermination de la distance focale d’une lentille par autocollimation

On déplace l’ensemble (lentille + miroir) jusqu’à ce que l’image se forme nettement dans le plan de l’objet. Difficulté d’apprécier la position de la lentille pour laquelle l’image est nette (latitude de mise au point).

- **On constate que l’image est nette de f’min = 195 mm à f’max = 203 mm (« ressenti » de l’expérimentateur).**

D’où une cause d’erreur correspondant à l’incertitude-type:

$$\boxed{u_{\text{mise au point}} = \frac{\Delta f'}{\sqrt{12}} = \frac{(f'_{\max} - f'_{\min})}{\sqrt{12}} = \frac{203 - 195}{\sqrt{12}} = 2{,}3 \text{ mm}}$$

- **Cette incertitude-type s’ajoute à celle due à la précision du banc d’optique gradué en mm:**

$$\boxed{u_{banc} = \frac{1}{\sqrt{6}} = 0{,}4\, mm}$$

Par la suite, nous allons <u>composer ces incertitudes</u>.

Si des sources d’erreurs, une est prépondérante, les calculs pourront se simplifier.

Titrage colorimétrique (« ressenti du changement de couleur »):

l'étendue de la zone de virage d'un indicateur coloré lors d'un titrage colorimétrique introduit une erreur supplémentaire.
Pas toujours évident de déterminer « à la goutte près » le volume équivalent.

Si par exemple, **le changement de couleur est « ressenti » sur un volume $\Delta v = 0{,}5$ mL**, la loi de probabilité associée sera une loi rectangulaire de largeur .
l'incertitude-type associée à cette erreur due à la méthode peut être estimée par :

$$u_{méthode}(V) = \frac{\Delta V}{2\sqrt{3}} = \frac{\Delta V}{\sqrt{12}} = \frac{0{,}5}{\sqrt{12}} = 0{,}14\, mL$$

Là encore, il va falloir composer les incertitudes

- Incertitude due à la méthode
- Incertitude due à la tolérance du constructeur sur le volume de la burette
- Incertitude due à la résolution de lecture.

Incertitude sur une mesure réalisée sur une courbe expérimentale

C’est le cas le plus délicat.

- Pour la détermination du volume équivalent sur une courbe de titrage, **il est généralement illusoire de prétendre à une précision meilleure que l’intervalle entre deux points de mesure** (la différence entre les volumes des deux points expérimentaux qui encadrent l’équivalence).

- **Cela montre l’importance d’avoir des points rapprochés au niveau de l’équivalence.**

- Il est donc nettement plus intéressant si possible de disposer d’un ensemble de résultats, qui permet de calculer une **incertitude de type A** sur une mesure réalisée sur une courbe expérimentale.

Incertitude-type composée

- **Soit n sources d'erreurs indépendantes sur une mesure de la grandeur X dont les incertitudes-types associées sont notées $u_i(X)$. Alors l'incertitude-type sur X vaut:**

$$u(X) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i(X)^2}$$

Utilisation d'un instrument en verre: Annale zéro Centrale MP

Il faut prendre en compte à la fois la tolérance du constructeur et l'erreur de lecture.

Type d'erreur	Incertitude associée
Lecture d'une grandeur X sur une règle graduée	$\Delta X = \frac{d}{\sqrt{12}}$
Détermination d'une grandeur X par double lecture sur une règle graduée (cas d'une longueur L obtenue par différence de deux longueurs $L_1 - L_2$)	$\Delta X = \frac{d}{\sqrt{6}}$
Grandeur X obtenue à l'aide d'un instrument dont la tolérance est donnée par le constructeur (cas d'un teslamètre, d'une pipette jaugée, d'une fiole jaugée, ...)	$\Delta X = \frac{t}{\sqrt{3}}$
Mesure d'un volume V en utilisant une burette graduée	$\Delta V = \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{6}}\right)^2}$

- d désigne la plus petite graduation de l'instrument de mesure
- t désigne la tolérance de l'instrument de mesure

Tolérance des burettes graduées utilisées au laboratoire

Capacité (mL)	25	25	50
Graduation	1/10	1/20	1/10
Classe A	0,030	0,030	0,050
Classe B	0,045	0,075	0,075

Mesure d'un volume équivalent V_E = 19,8 mL à l'aide d'une burette graduée de résolution d = 0,1 mL, de tolérance a = 0,05 mL, la méthode introduisant une erreur sur l'estimation du volume équivalent de
ΔV_E = 0,1 mL.

$$u(V_E) = \sqrt{u_{résolution}(V_E)^2 + u_{tolérance}(V_E)^2 + u_{méthode}(V_E)^2}$$

$$u(V_E) = \sqrt{(\frac{d}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{a}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{\Delta V_E}{\sqrt{12}})^2}$$

$u(V_E) = \sqrt{(\frac{0,1}{\sqrt{6}})^2 + (\frac{0,05}{\sqrt{3}})^2 + (\frac{0,1}{\sqrt{12}})^2} = 0,06\,mL$ et l'incertitude élargie $U(V_E) = 2.u(V_E)$

V_E = 19,8 ± 0,1 mL.

Imaginons à présent ΔV_E = 1 mL, seule l'incertitude sur la méthode est à considérer car <u>les deux autres sont négligeables</u>.

$u(V_E) \sim u_{méthode}(V_E) = \frac{\Delta V_E}{\sqrt{12}} = \frac{1}{\sqrt{12}} = 0,3\,mL$, **$V_E$ = 19,8 ± 0,3 mL.**

- **Évaluation de l'incertitude sur un résultat lié à une grandeur calculée à partir de <u>plusieurs grandeurs mesurées indépendantes</u>**

Propagation d'incertitudes: Soit Y une grandeur qui se calcule à partir de grandeurs mesurées X_i par la relation $Y = f(X_1, X_2, \dots, X_k)$.

$$\sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial f}{\partial X_i}\right)^2 (X_i) \times u(X_i)^2}$$

Propagation des incertitudes (cas simples) :

$$c = a + b \text{ ou } c = a - b \qquad \Delta c = \sqrt{(\Delta a)^2 + (\Delta b)^2}$$

$$c = ab \text{ ou } c = \frac{a}{b} \qquad \frac{\Delta c}{c} = \sqrt{\left(\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

$$c = ka \ (k \text{ constante}) \qquad \Delta c = k\Delta a$$

$$c = a^p b^q \text{ ou } c = \frac{a^p}{b^q} \qquad \frac{\Delta c}{c} = \sqrt{\left(p\frac{\Delta a}{a}\right)^2 + \left(q\frac{\Delta b}{b}\right)^2}$$

TP Agro-Véto
Pendule simple
2016

Pour des calculs plus complexes, on utilisera la méthode de propagation de Monte Carlo.

Incertitudes-types composées:

Annale zéro Centrale MP

$F = \alpha x \pm \beta y$	$u(F) = \sqrt{\alpha^2 u^2(x) + \beta^2 u^2(y)}$
$F = xy$ ou $F = \dfrac{x}{y}$	$\dfrac{u(F)}{F} = \sqrt{\left(\dfrac{u(x)}{x}\right)^2 + \left(\dfrac{u(y)}{y}\right)^2}$
$F = a\, x^\alpha y^\beta$	$\dfrac{u(F)}{F} = \sqrt{\alpha^2 \left(\dfrac{u(x)}{x}\right)^2 + \beta^2 \left(\dfrac{u(y)}{y}\right)^2}$

- La concentration d'une solution S_1 préparée par dilution d'une solution S_0 de concentration C_0 se calcule à l'aide de la relation $\boxed{C_1 = \dfrac{C_0 \cdot V_0}{V_1}}$

- L'incertitude-type composée sur C_1 est donc : $\boxed{\dfrac{u(C_1)}{C_1} = \sqrt{\left(\dfrac{u(C_0)}{C_0}\right)^2 + \left(\dfrac{u(V_0)}{V_0}\right)^2 + \left(\dfrac{u(V_1)}{V_1}\right)^2}}$

- Cas d'un dosage avec deux réactions de titrage : si

$$\boxed{C_0 = \frac{C(V_{e2} - V_{e1})}{V_0}}$$

$$\boxed{\frac{u(C_0)}{C_0} = \sqrt{\left(\frac{u(C)}{C}\right)^2 + \left(\frac{u(V_{e2})}{V_{e2} - V_{e1}}\right)^2 + \left(\frac{u(V_{e1})}{V_{e2} - V_{e1}}\right)^2 + \left(\frac{u(V_0)}{V_0}\right)^2}}$$

Exercice d'application :

En TP, les 10 groupes effectuent avec le même matériel, un titrage d'un volume V0 = 10,00 mL d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration inconnue c0 par une soude de concentration c_B versée avec une burette de 25mL graduée tous les 0,1mL et de tolérance 0,05mL.

La soude a été obtenue par la dilution d'une masse m = 4,00 g de soude (M = 40,00 $g.mol^{-1}$) dans une fiole jaugée de V_B = 5,0 L de tolérance *t* = 0,05%.

La balance a une précision *p* de 0,01 g.

Le volume V_0 d'acide a été prélevé avec une pipette jaugée de tolérance *t* = 0,02 mL.

Le volume équivalent $V_{éqv}$ est estimé grâce à un indicateur coloré.

Voici les volumes équivalents (en mL) obtenus par les 10 groupes :

15,8   15,8   15,0   15,3   14,6   15,1   15,8   14,9   14,6   15,4

1. Déterminer l'incertitude-type de type B associée à la valeur de Véqv de chaque groupe.
2. Déterminer le résultat des 10 mesurages et l'incertitude-type de répétabilité (type A).
3. Écrire correctement le résultat pour Véqv pour un intervalle de confiance de 95%. Quelle est l'incertitude relative sur Véqv ?
4. En déduire c_0 avec son incertitude pour un intervalle de confiance de 95%.

Incertitude de Type A très limite car ce sont des groupes différents qui font la même manipulation….

1. La lecture de $V_{éqv}$ ne dépend que de la burette et comme il y a deux mesures (le 0 et $V_{éqv}$) et une tolérance, on écrit : $\boxed{u_B(V_{éqv}) = \sqrt{\left(\sqrt{2} \times \frac{1\ div}{\sqrt{12}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} .= \sqrt{0{,}04^2 + 0{,}03^2} = 0{,}05\ mL}$

On retrouve là un résultat simple et facile à retenir valable pour la plupart des **burettes** : **l'incertitude-type est d'une demi-graduation** (en prenant en compte l'incertitude de lecture et la tolérance).

2. $V_{éqv}$ = moyenne des mesurages (pas de mesurage aberrante à supprimer) :

$$\boxed{V_{éqv} = 15{,}21\ mL.}$$

La machine à calculer donne un écart type σ = 0,45 mL. D'où : $\boxed{u_A(V_{éqv}) = \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}} = 0{,}14\ mL}$.

3. L'incertitude-type composée est : $u(V_{éqv}) = \sqrt{u_A^2 + u_B^2}$ = 0,15 mL.

On aurait pu négliger u_B devant u_A ici!

4. La formule donnant c_0 est $c_0 = \frac{V_{éqv} c_B}{V_0}$ avec $c_B = \frac{m}{M\, V_B}$ soit $c_0 = m \frac{V_{éqv}}{V_0\, M V_B}$ = $3{,}04 \times 10^{-2}$ mol.L^{-1}.

Avant de se lancer dans des calculs très compliqués, on regarde les incertitudes relatives sur les différentes variables :

- $u(m) = \sqrt{2} \times 0{,}01/\sqrt{12} = 0{,}004$ g et donc $u(m)/m = 0{,}1$ %,
- $u(V_0) = 0{,}02/\sqrt{3} = 0{,}012$ mL et donc $u(V_0)/V_0 = 0{,}12\%$,
- $u(V_B)/V_B = 0{,}05\%$,
- $u(m) = \sqrt{2} \times 0{,}01/\sqrt{12} = 0{,}004$ g et donc $u(m)/m = 0{,}1\%$,
- $u(M) = 0{,}01$ g (d'après le nombre de chiffres significatifs) et $u(M)/M = 0{,}025\%$,
- $u(V_{éqv}) = 0{,}16$ mL et $u(V_{éqv})/V_{éqv} = 1$ %

L'incertitude sur $V_{éqv}$ est bien plus importante que les autres et sera la seule à avoir de l'influence sur le résultat. On ne prend donc en compte que $u(V_{éqv})$.

TP Agro-Véto Dosage dioxygène dissous 2015

3. *Tableau des valeurs d'incertitudes*

Incertitudes conseillées		
Grandeur	*Incertitude suggérée*	*Où la vérifier ?*
Volume d'une fiole jaugée, V_f	$\frac{\Delta V_f}{V_f} = 1{,}0.10^{-3}$	Sur la fiole jaugée
Volume d'une pipette jaugée, V_p	$\frac{\Delta V_p}{V_p} = 2{,}0.10^{-3}$	Sur la pipette jaugée
Volume d'une goutte, V_{gtte}	$\Delta V_{gtte} = 5{,}0.10^{-2} mL$	
Volume de la burette graduée, V_b	$\Delta V_b = 2{,}0.10^{-2} mL$	Notice de la burette
Volume lu sur la burette, V_{lect}	$\Delta V_{lect} = 25{,}0.10^{-3} mL$	Une demi-graduation
Concentration en réactif titrant	0,1 %	

Bilan par un inspecteur général de Sciences-Physiques: « FAIRE SIMPLE »

► Il faut être bien convaincu que **toute mesure expérimentale doit être fournie avec un intervalle de confiance** = intervalle de valeurs dans lequel on a $p\%$ de chances de trouver la valeur vraie.

► Même si vous n'avez pas le temps de mener un calcul d'incertitude au complet, vous devez **TOUJOURS** :

- *réfléchir aux causes d'erreurs* intervenant dans vos mesurages, et évaluer leur ordre de grandeur
- *limiter les chiffres significatifs de vos résultats numériques* à un nombre raisonnable, compte tenu de la précision de vos évaluations.

► « Les termes de type B sont habituellement négligeables en biologie, et on peut se contenter d'une analyse de type A ».

► « Le message sur les calculs d'incertitude tient en deux mots : "faire simple". On ne fait pas de la métrologie très approfondie. [...] En général, il y a une source d'erreur principale, et on peut donc la plupart du temps ne garder qu'un seul terme dans les calculs d'incertitude, éventuellement deux ».

(Citations de M. Billy, IG de physique)

Simulation de Monte-Carlo

Supposons que l'on cherche à estimer une grandeur y donnée par $y = f(x_1, x_2, ...)$ avec les x_i des données résultants d'une mesure et f une fonction connue. Chaque x_i est caractérisé par sa valeur et son incertitude-type. La valeur de y est donnée par l'application de la formule. Pour estimer l'incertitude-type, il faut remonter à la variabilité de y, qui est elle-même une conséquence de la variabilité des x_i . Pour cela, il faut :

. Fixer un nombre N de simulations à réaliser ;

. Pour k entre 1 et N, réaliser :

  . un tirage aléatoire pour chaque x_i ;

  . utiliser les valeurs de ce tirage et la fonction f pour calculer une valeur y_k ;

  . sauvegarder cette valeur y_k ;

. l'incertitude-type de y est l'écart-type de la distribution des y_k.

. La moyenne des y_k permet de retrouver la valeur y.

Le choix de la distribution de probabilité de chaque xi dépend de plusieurs facteurs expérimentaux. On privilégie la distribution uniforme de probabilité,

Attention ! Il ne faut pas oublier qu'en notant Δ la précision, l'incertitude-type qui caractérise la variabilité vaut $u = \Delta/\sqrt{3}$.

Exemple de simulation Monte-Carlo pour calculer une incertitude composée

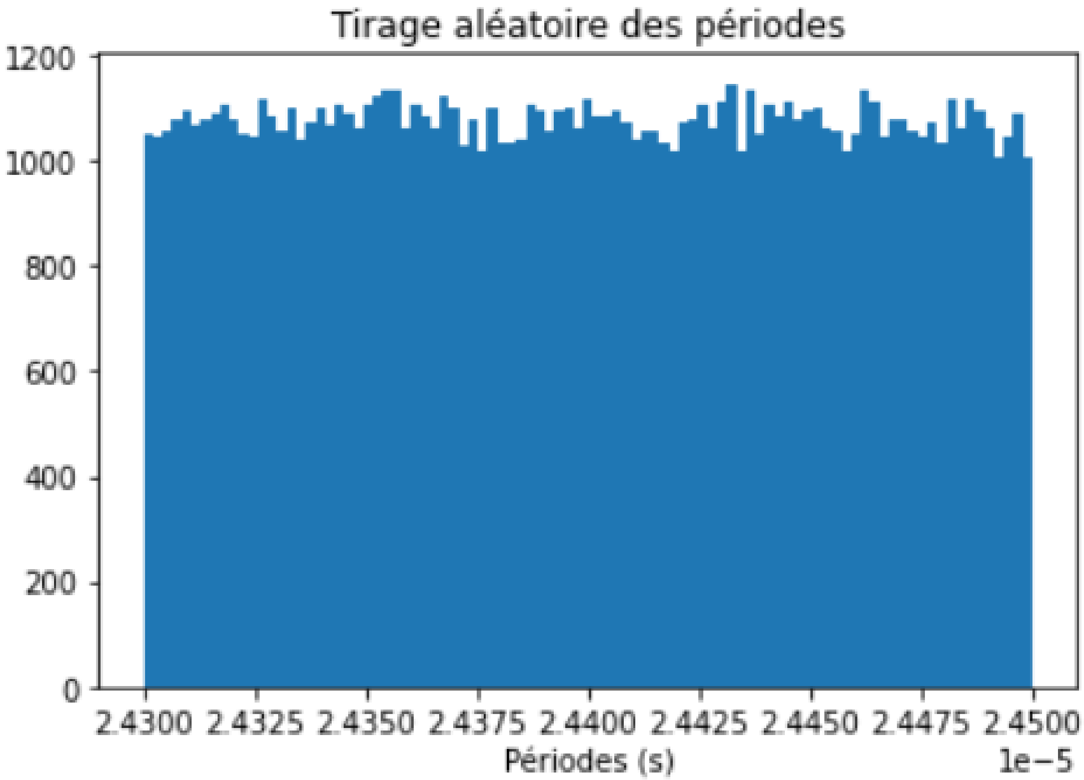
Estimation de la fréquence en connaissant la période T = 24,4 µs. f = 1/T

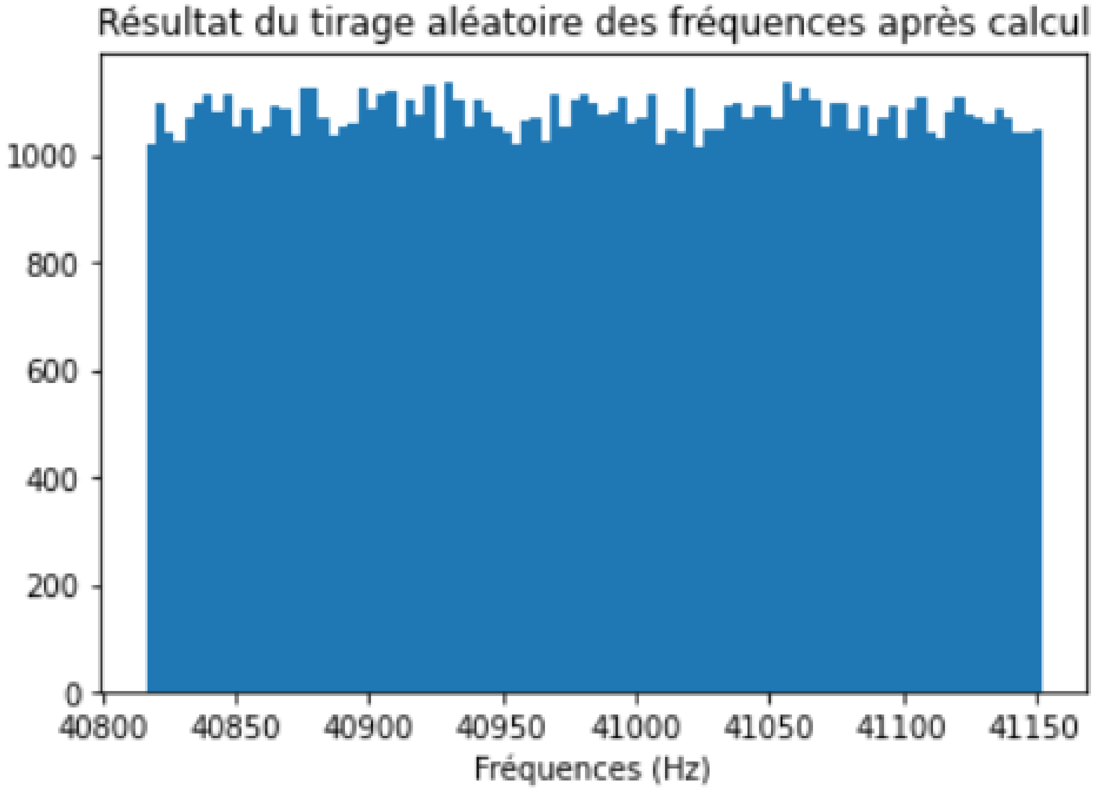
La précision de la mesure est estimée à ΔT = 0,1 µs.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Entrez la période
T = 24.4e-6 # s

# Entrez la précision sur la période
DeltaT = 0.1e-6 # s

# Entrez la fonction de composition
def f(x):
    return 1/x

# Entrez le nombre de simulation que vous voulez effectuer
N = 100000

# Calculs avec une distribution de probabilité uniforme
Periode=[]
Frequence=[]

for i in range(0,N):
    periode = np.random.uniform(T-DeltaT,T+DeltaT)
    Periode.append(periode)
    Frequence.append(f(periode))
```

```
plt.figure(1)
plt.hist(Periode,bins = 'rice’)
# La commande 'rice' permet d'optimiser les intervalles d'affichage de
 l'histogramme
plt.title('Tirage aléatoire des périodes')
plt.xlabel('Périodes (s)')

plt.figure(2)
plt.hist(Frequence,bins = 'rice')
plt.title('Résultat du tirage aléatoire des fréquences après calcul')
plt.xlabel('Fréquences (Hz)')

# Calcul et affichage moyenne et écart type

moy = np.mean(Frequence)
std = np.std(Frequence,ddof=1)

print("Moyenne = {:.2f} Hz".format(moy))
print("Ecart type = {:.2f} Hz".format(std))
```

Moyenne = 40984.15 Hz
Ecart type = 96.80 Hz





Présentation d'un Résultat Numérique

Les applications numériques en sciences physiques font intervenir des données qui résultent le plus souvent de mesures, ces mesures étant entachées d'incertitude, la valeur calculée est donc une valeur approchée. Se pose alors la question du degré de précision du résultat, donc du nombre de chiffres à exprimer dans le résultat.

La notation scientifique

Une valeur numérique écrite en notation scientifique se compose d'une partie décimale, ne comportant qu'un seul chiffre avant la virgule (autre que zéro), et d'un facteur multiplicatif puissance de 10.

Ex : r = $2{,}94856.10^{-5}$m.

résistance de $4{,}3.\ 10^{8}\ \Omega = 4{,}3.\ 10^{2}\ M\ \Omega$

10^{9}	10^{6}	10^{3}	10^{2}	10^{1}	10^{-1}
giga	méga	kilo	hecto	déca	déci
G	M	k	h	da	d
10^{-2}	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
centi	milli	micro	nano	pico	femto
c	m	µ	n	p	f

Chiffres significatifs

Dans un nombre, **les chiffres autres que zéro sont toujours significatifs.**

Les zéros sont significatifs lorsqu'ils se trouvent :

- entre d'autres chiffres, ou
- à leur droite.

Ils ne le sont pas lorsqu'ils se trouvent à leur gauche.

2 chiffres significatifs :

0,024 – 0,000035 – 3,5. 10^{-5} – 0,12 – 4,9

3 chiffres significatifs :

2,34 – 0,000456 – 8,90. 10^{-3} – 4,90

4 chiffres significatifs :

0,4021 – 1,450. 10^{9} – 0,1234

Arrondir un nombre

Pour obtenir une valeur numérique ayant un nombre de chiffres significatifs inférieur, conserver la valeur du dernier chiffre souhaité si le chiffre suivant est inférieur à 5, augmenter cette valeur de 1 si le chiffre suivant est supérieur ou égal à 5.

42,3564 s’arrondit successivement à:

42,356 – 42,36 – 42,4.

<u>Chiffres significatifs et précision</u>

Par convention, et en l'absence d'indication supplémentaire sur la précision, la valeur numérique indiquée est fiable à une demi-unité près du dernier ordre figurant dans la partie décimale.

La valeur numérique n n'est connue que par un encadrement :
n – incertitude < n < n + incertitude.

d = 2 m : un seul chiffre significatif : incertitude = 0,5 m
1,5 m < d < 2,5 m
d = 2,0 m : incertitude 0,05 m : 1,95 m < d < 2,05 m
soit une incertitude de 2,5 % (0,05/2= 0,025)
d = 2,834 m : 4 chiffres significatifs, incertitude 0,0005 m
2,8335 m < d < 2,8345 m (incertitude de 0,018 %)

<u>On voit bien l'importance du nombre de chiffres significatifs que l'on écrit.</u>

Règles pour donner l'expression numérique d'une grandeur physique

L'expression numérique d'une grandeur physique doit toujours se faire selon les règles suivantes.

Règle 1 : **il est impératif de préciser l'unité d'une grandeur physique.**

Règle 2 : le résultat d'un calcul numérique doit être en accord avec la précision des données utilisées pour effectuer ce calcul, il faut respecter les règles sur les chiffres significatifs.

- Dans le cas de **multiplications** ou **divisions** : le résultat est donné avec **le même nombre de chiffres significatifs** que celui de la **donnée la moins précise**, en utilisant la notation scientifique.
- Dans le cas d'**additions** ou **soustractions** : le résultat est donné **avec le même nombre de décimales** (chiffres **après la virgule**) que celui de la **donnée la moins précise** (à condition de garder la même puissance de 10).

- *28,2 + 9,687 – 12,51 = 25,377 mais le résultat doit être écrit avec 1 décimale puisque le premier nombre ne possède que 1 chiffre après la virgule. On arrondit donc le résultat à 25,4.*

- *36,54 x 58,4 = 2133,936, mais le résultat doit être arrondi à $2,13.10^3$ puisque le second nombre n'est écrit qu'avec 3 chiffres significatifs. A ce titre, il serait faux d'écrire 2130 car on aurait alors 4 chiffres significatifs.*

- La masse molaire de Br vaut 79,9 $g.mol^{-1}$. La masse molaire de Br_2 vaut 2 x 79,9 = 159,8 $g.mol^{-1}$ car cette multiplication par un nombre sans dimension revient à une addition (79,9 + 79,9) et on garde ainsi la précision au dixième de $g.mol^{-1}$.

- ❑ P = mg avec m 1028,0 kg et g = 9,81 $m.s^{-2}$.

Ne pas écrire P = 10084,68 N mais P = $1,01.10^4$ N.

- ❑ M = $m_1 + m_2$ avec m_1 = 18,23 g et m_2 = 3,2 g .

Ne pas écrire M = 21,43g , ni M = 21g mais M = 21,4 g.

Ne pas tenir compte du nombre de chiffres des constantes mathématiques : ce sont des valeurs exactes.

On arrondit au plus proche chiffre <u>mais attention à effectuer les applications numériques avec les valeurs non arrondies</u> :

<u>n'arrondissez que le résultat final.</u>