

Mesures, unités et analyse dimensionnelle



MY HOBBY:
ABUSING DIMENSIONAL ANALYSIS

$$\frac{\text{PLANCK ENERGY}}{\text{PRESSURE AT THE EARTH'S CORE}} \times \frac{\text{PRIUS COMBINED EPA GAS MILEAGE}}{\text{MINIMUM WIDTH OF THE ENGLISH CHANNEL}} = \pi$$

IT'S CORRECT TO WITHIN EXPERIMENTAL ERROR, AND THE UNITS CHECK OUT. IT MUST BE A FUNDAMENTAL LAW.





présentation

Orthographe

Applications numériques

Lire l'énoncé!

Concision et précision

Apprendre son cours

MATHS

Calcul littéral

étudiant de BCPST1

Conversions

Homogénéité

Suivre la méthode

CQFR



Savoirs

- Unités de base du système SI : nom, symbole, dimension associée.
- Notion de dimension d'une grandeur physique.
- Notion d'homogénéité d'une formule.
- Équations de base pour déterminer l'unité SI de certaines unités usuelles (Pa, J, N).
- Ordres de grandeur usuels.

Savoir-faire

- Déterminer la dimension et l'unité SI d'une grandeur à partir d'une équation entre grandeurs.
- Retrouver la définition mathématique d'une grandeur simple à l'aide de son unité ainsi que le lien mathématique reliant des grandeurs simples.
- Vérifier l'homogénéité d'une formule. Prédire la forme d'une loi physique par analyse dimensionnelle, en déduire des ordres de grandeur.
- Effectuer des applications numériques correctes en faisant attention aux choix des unités.
- Savoir faire des conversions d'unité.
- Donner un résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs.
- Être capable de faire des estimations rapides (de taille, masse, etc.).

Grandeur physique: *Propriété d'un phénomène physique ou d'un corps que l'on peut exprimer quantitativement grâce à un nombre et une unité.*

La mesure d'une grandeur physique X peut donc toujours s'écrire sous la forme :

$$X = x \text{ unité}$$

x réel et l'unité choisie pour évaluer la grandeur .

Il ne faut pas confondre la notion de constante « mathématique », dont la valeur est fixée quel que soit l'observateur (1, -32, π) qui ont la même valeur dans tous les systèmes d'unité **et la notion de constante physique dimensionnée**, dont la valeur est fixée dans un certain choix d'unités :

la vitesse de la lumière (vide) est une constante et vaut $c = 2,997 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Un autre observateur pourra dire que cette vitesse n'a pas la même valeur numérique, mais sans se tromper car $c = 2,997 \times 10^5 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

La dimension d'une grandeur est, pour simplifier, sa nature physique.

Une grandeur peut avoir la dimension d'une longueur, d'une énergie, d'une masse ...

La notion de dimension est très générale et ne suppose aucun choix particulier de systèmes d'unités: une grandeur ayant la dimension d'une longueur peut s'exprimer en mètres, en centimètres, en pouces, en inches ou en miles !



NE PAS CONFONDRE DIMENSION ET UNITE

Lorsqu'on demande « Quelle est la dimension de L ? », il faut répondre « L a la dimension d'une longueur » et non pas « L est en mètres » ...

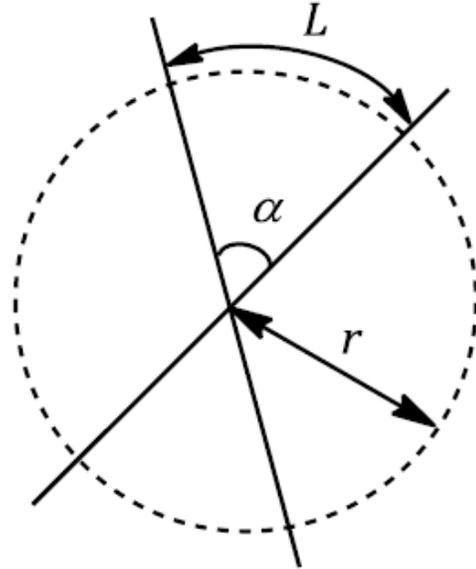
Le système international: Afin d'évaluer l'ensemble des grandeurs physiques mesurables, il faut exactement sept dimensions indépendantes, dites dimensions de base. Chaque dimension de base est associée à une infinité d'unités mais une unique unité est choisie comme unité de base.

| Grandeur | Nom de l'unité | Symbole |
|---------------------------------|----------------|---------|
| Longueur | mètre | m |
| Masse | kilogramme | kg |
| Temps | seconde | s |
| Intensité de courant électrique | ampère | A |
| Température | kelvin | K |
| Intensité lumineuse | candela | cd |
| Quantité de matière | mole | mol |

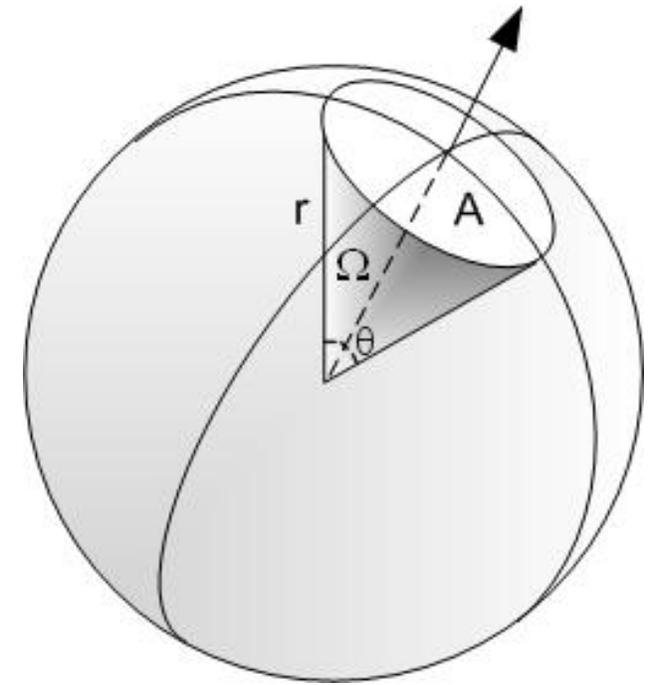
| | | | | | | | |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------------------|-------------|---------------------|---------------------|
| Dimension fondamentale | masse | longueur | temps | intensité électrique | température | intensité lumineuse | quantité de matière |
| unité (SI) | kg | m | s | A | K | cd | Mol |
| symbole de la dimension | M | L | T | I | θ | J | N |

A ces unités, on peut ajouter deux unités dite complémentaires : bien que les angles soient des **grandeurs sans dimension** (rapport de deux longueurs) pour éviter des confusions (entre les degrés et les radians) on attribue à un angle plan **l'unité complémentaire radian**. La figure ci-contre rappelle la définition d'un angle plan en radian.

Un tour complet correspond à 2π radians soit 360° .



$$\alpha = \frac{L}{r}$$



Le stéradian unité d'angle solide noté Ω : $\Omega = \frac{A}{r^2}$

Le mètre (1983): le mètre est la longueur du trajet parcouru par la lumière dans le vide pendant une durée de $1/299\,792\,458$ de seconde.

Le kilogramme (1889): Le kilogramme est la masse du prototype international en Pt iridié déposé au bureau international des poids et mesures de Sèvres.



La seconde (1967): La seconde est la durée de $9\,192\,631\,770$ périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de Césium 133.

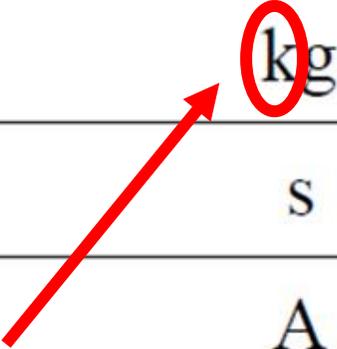
L'ampère est l'intensité d'un courant électrique constant qui, maintenu dans deux conducteurs rectilignes, de longueur infinie, de section circulaire négligeable, et placés à une distance de 1 m , dans le vide, l'un de l'autre, produirait entre ces conducteurs une force de $2 \cdot 10^{-7}\text{ N}$ par mètre de longueur.

Le Kelvin est la fraction $1/273,16$ de la température Celsius ($^{\circ}\text{C}$), définie à partir de la température thermodynamique par : $\Theta = T - 273,15$.

La Candela est l'intensité lumineuse du rayonnement de fréquence $540 \cdot 10^{12}\text{ Hz}$, correspond à une intensité énergétique de 683 W dans une direction définie par un angle solide de 1 stéradian.

La mole est la quantité de matière d'un système contenant autant d'entités élémentaires qu'il y a d'atomes dans $0,012\text{ kg}$ de Carbone 12.

| Grandeur | Nom de l'unité | Symbole |
|---------------------------------|----------------|---------|
| Longueur | mètre | m |
| Masse | kilogramme | kg |
| Temps | seconde | s |
| Intensité de courant électrique | ampère | A |
| Température | kelvin | K |
| | | |
| Quantité de matière | mole | mol |



Constantes physiques fondamentales dans le SI

| | |
|----------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Constante d'Avogadro | $N_a = 6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} (*)$ |
| Constante des gaz parfaits | $R = 8,314\ 459\ 8(48) \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$ |
| Constante de Boltzmann | $k_b = 1,380\ 469 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1} (*)$ |
| Pression atmosphérique normale (1 atm) | $P_{\text{atm}} = 1,013\ 25 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ |
| Volume molaire normal (0°C, 1 atm) | $V_m = 2,241\ 396\ 2(13) \cdot 10^{-2} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$ |
| Accélération de la pesanteur (altitude zéro) | $g_0 = 9,806\ 65 \text{ m.s}^{-2}$ |
| Charge élémentaire | $e = 1,602\ 176\ 634 \cdot 10^{-19} \text{ C} (*)$ |
| Constante de Faraday | $F = N_a \cdot e = 9,648\ 533\ 289(69) \cdot 10^4 \text{ C.mol}^{-1}$ |
| Permittivité du vide | $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{12} \text{ F.m}^{-1} = 8,85418782 \cdot 10^{-12} \text{ m}^{-3}.\text{kg}^{-1}.\text{s}^4.\text{A}^2$ |
| Perméabilité du vide | $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1} = 1,25663706 \cdot 10^{-6} \text{ m.kg.s}^{-2}.\text{A}^{-2}$ |
| vitesse de la lumière dans le vide | $c = 2,998\ 792\ 458 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ |
| Constante de Planck | $h = 6,626\ 070\ 15 \cdot 10^{-34} \text{ J.s} (*)$ |

(*) Quatre constantes fondamentales de la physique ont été figées lors de la Conférence générale des poids et mesures convoquée du 13 au 16 novembre 2018.

ANALYSE DIMENSIONNELLE

Extrait de l'ancien programme BCPST 1^{ère} année (avant tout le reste).

| Notions | Capacités exigibles |
|-------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Analyse dimensionnelle. | Vérifier l'homogénéité d'une expression littérale à partir d'une analyse dimensionnelle des termes présents. Définir un ordre de grandeur (durée, longueur) par analyse dimensionnelle d'une équation modélisant un phénomène. |

L'analyse dimensionnelle permet de déterminer la dimension d'une grandeur puis son unité grâce à l'équation aux dimensions.

L'équation aux dimensions est l'équation qui relie la dimension d'une grandeur dérivée à celles des sept grandeurs de base.

La dimension de la grandeur dérivée est couramment notée $[X]$.

La forme générale d'une équation aux dimensions est :

$$[X] = L^\alpha M^\beta T^\gamma I^\delta \Theta^\epsilon N^\zeta J^\eta \quad \text{où :}$$

- L, M, T, I, Θ, N et J sont les dimensions respectives des sept grandeurs de base ;
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon, \zeta$ et η sont les exposants respectifs des sept grandeurs de base.
- si on désire désigner la dimension de X , on la note $[X]$.

- ❑ Ces derniers sont appelés « exposants dimensionnels ». Un tel exposant dimensionnel est un nombre entier relatif.
- ❑ Une grandeur sans dimension, ou grandeur de dimension 1, est une grandeur pour lesquels tous les exposants dimensionnels sont nuls.
- ❑ Ainsi, la dimension d'une grandeur est la manière dont elle se compose à partir des sept dimensions de base.

Pour manipuler les équations aux dimensions, on utilise les règles suivantes:

- On ne peut additionner que des termes ayant la même dimension.
- Dans une fonction mathématique (sin, cos, tan, ln, log, exp..), le nombre est forcément sans dimension.
- La dimension du produit de deux grandeurs est égale au produit de leurs dimensions.
- La dimension de A^n est la dimension de A à la puissance n ...
(n est sans dimension !!!)
- Dimension d'une fonction dérivée:

$$\dim \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{\dim(y)}{\dim(x)} \quad \text{et} \quad \dim \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right) = \frac{\dim y}{(\dim x)^2}$$

Il faut que les deux membres de l'égalité (inégalité) appartiennent à *la même catégorie d'objets mathématiques*, ainsi :

- **Une grandeur vectorielle ne peut être égale à une grandeur scalaire.**
- **Un élément différentiel (ou variation élémentaire infiniment petite) ne peut être égal à une variation macroscopique (finie)**
(notions que nous aborderons plus tard dans les cours).

On peut retrouver la dimension et l'unité d'une grandeur si l'on connaît une équation liant cette grandeur à d'autres de dimension connue.

Pour certaines grandeurs il faut absolument connaître quelques équations par cœur afin de retrouver rapidement leur dimension et leur unité.

- Pour retrouver la dimension et l'unité d'une force :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \text{ ou } \vec{p} = m\vec{g}$$

- Pour retrouver la dimension et l'unité d'une énergie :

$$E = mc^2 \text{ ou } E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

- Pour retrouver la dimension et l'unité d'une pression :

$$P = \frac{F}{S}$$

A suivre dans l'année...

Dimension d'une vitesse :

On dit que « la dimension d'une vitesse est une longueur divisée par une durée » ou que « la vitesse est homogène à une longueur divisée par une durée ».

L'équation aux dimensions le note de manière abrégée :

$$[V] = \frac{L}{T} \text{ ou } [V] = L \cdot T^{-1} \text{ et l'unité de } v \text{ dans le système SI est } \text{m.s}^{-1}.$$

Dimension d'une force :

La deuxième des lois du mouvement de Newton établit que la force est proportionnelle au produit de la masse par l'accélération.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

$$[F] = M \cdot L T^{-2} \text{ que l'on peut aussi noter } [F] = M \cdot [V] \cdot T^{-1}.$$

kg.m.s⁻² correspond à une unité dérivée le Newton notée N.

Il peut être parfois relativement difficile d'obtenir le résultat...

- La tension électrique U a pour dimension **$[U] = L^2MT^{-3}I^{-1}$**

Résultat qui peut s'obtenir en combinant les différentes relations

$$F = q.E \ ; \ E = U/d \ ; \ q = I.t \ ; \ F = m.a$$

- On pourra, en général, garder $[U]$ dans l'équation aux dimensions. Ainsi, à partir de la loi d'Ohm $U_R = Ri$, on pourra écrire:

$$[R] = \frac{[U]}{I}$$

- **$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ correspond à une unité dérivée le Volt noté V.**

Certaines grandeurs peuvent être sans dimension :

La densité d'un liquide (rapport entre sa masse volumique et la masse volumique de l'eau) est une grandeur sans dimension et sans unité.

$$d = \frac{\rho_{liq}}{\rho_{eau}}$$

Densité du glycérol $d = 1,26$

Densité de l'éthanol $d = 0,79$

Une grandeur purement numérique est dite sans dimension.

C'est le cas de toutes les grandeurs définies comme le rapport de deux grandeurs de même dimension.

Unités dérivées (exemples)

| Grandeur : relation de définition | | Expression en unités de base SI | Nom éventuel et symbole |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| Longueur Surface Volume | L $S = L^2$ $V = L^3$ | m m^2 m^3 | |
| Temps Vitesse Accélération Fréquence Pulsation | T $v = L/T$ $a = v/T$ $f = 1/T$ $\omega = \text{angle}/T$ | s $m \cdot s^{-1}$ $m \cdot s^{-2}$ s^{-1} $\text{rad} \cdot s^{-1}$ | hertz (Hz) |
| Masse Masse volumique Force Travail, énergie Puissance Pression | M $\rho = M/V$ $F = Ma$ $E \text{ ou } Q \text{ ou } W = FL$ $P = W/T$ $p = F/S$ | kg $kg \cdot m^{-3}$ $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ $kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}$ $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3}$ $kg \cdot m^{-1} \cdot s^{-2}$ | newton (N) joule (J) watt (W) $pascal (Pa)$ |
| Intensité de courant Charge Ddp, fem Résistance Conductance Capacité | I $q = IT$ $e \text{ ou } U = P/I$ $R = U/I$ $G = 1/R$ $C = q/U$ | A $A \cdot s$ $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$ $kg \cdot m^2 \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$ $kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^3 \cdot A^2$ $kg^{-1} \cdot m^{-2} \cdot s^4 \cdot A^2$ | coulomb (C) volt (V) ohm (Ω) siemens (S) farad (F) |

Pour éviter d'avoir à utiliser des facteurs multiplicatifs ou des valeurs avec un grand nombre de zéros, on a recourt à des préfixes couvrant une gamme allant de 10^{24} à 10^{-24} fois l'unité.

Multiples les plus utilisés:

| | | | | | | | | | | | | | | |
|-----------------|------------|------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|--------|--------|--------|--------|--------|-----------|-----------|
| Multiple | 10^{-15} | 10^{-12} | 10^{-9} | 10^{-6} | 10^{-3} | 10^{-2} | 10^{-1} | 10^1 | 10^2 | 10^3 | 10^6 | 10^9 | 10^{12} | 10^{15} |
| Préfixe | femto | pico | nano | micro | milli | centi | déci | déca | hecto | kilo | méga | giga | téra | péta |
| Symbole | f | p | n | μ | m | c | d | da | h | k | M | G | T | P |

Pour des raisons pratiques certaines unités n'appartenant pas au système international sont utilisées, en voici une liste non exhaustive (en gras les unités à connaître, en italique celles que nous seront amené à utiliser mais dont la conversion vous sera toujours donnée).

| Grandeur | Nom | Valeur en SI |
|-------------------|----------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Longueur | mille marin | 1 852 m |
| Surface | are | 1 a = 100 m ² |
| Volume | litre Pas S.I. unité astronomique année-lumière | 1 L = 10⁻³ m³ 1 ua ≈ 1,50 × 10 ¹¹ m 1 al = 9,461 × 10 ¹⁵ m |
| Angle | tour degré | 1 tr = 2 π rad 1 ° = π / 180 rad |
| Masse | gramme tonne <i>unité de masse atomique</i> | 1 g = 10⁻³ kg 1 t = 10³ kg 1 u = 1,66.10 ⁻²⁷ kg |
| Énergie | wattheure <i>électronvolt</i> <i>calorie</i> | 1 Wh = 3 600 J 1 eV = 1,6.10 ⁻¹⁹ J 1 cal = 4,18 J |
| Pression | bar Pas S.I. <i>torr (ou mm de mercure)</i> <i>atmosphère</i> | 1 bar = 10⁵ Pa 1 mmHg = 133,322 Pa 1 atm = 760 mmHg = 1,013.10⁵ Pa |
| Temps | minute heure jour | 1 min = 60 s 1 h = 3 600 s 1 d = 86400 s |
| vitesse | kilomètre par heure nœud | 1/3,6 m. s⁻¹ 1852 / 3600 m. s ⁻¹ |
| vitesse angulaire | tour par seconde | 1 tr. s⁻¹ = 2 π rad. s⁻¹ |
| Température | Degré Celsius Pas S.I. | T/°C = T/K - 273,15 |

Tester l'homogénéité d'une expression est un critère permettant d'éliminer des résultats dont on sait qu'ils sont nécessairement faux.

- ***Une équation est dite homogène lorsque ses deux membres ont la même dimension.***

« $v = d.t$ » n'est pas homogène:

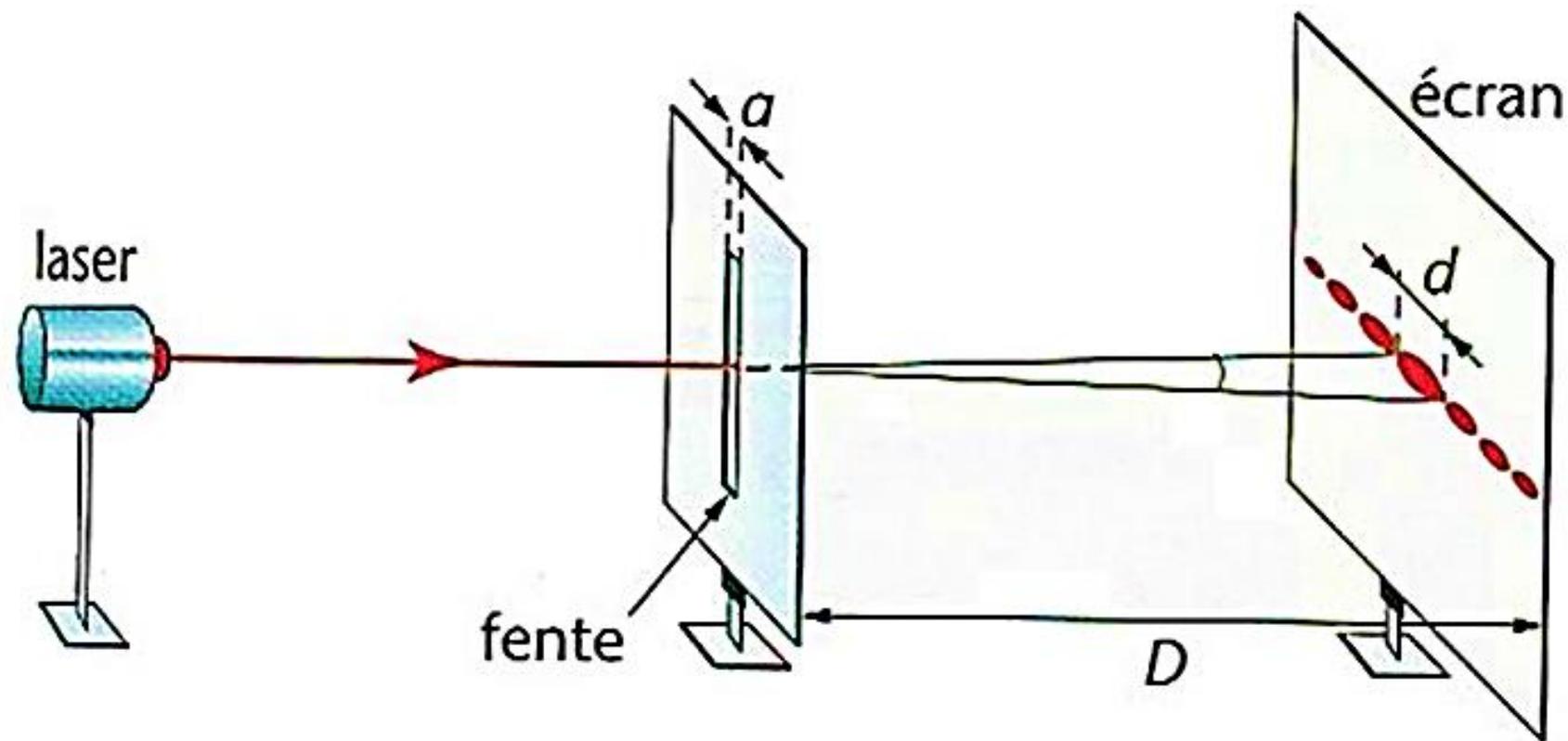
$[v] = LT^{-1}$ et $[d.t] = LT$. La relation est donc fausse.

- ***Une expression non homogène est nécessairement fausse !***

Si un étudiant arrive à la relation $d = \sqrt{R + h^2}$ où d , R et h sont des longueurs.

Ce résultat ne peut qu'être faux, car cela n'a pas de sens d'additionner une distance R avec une surface h^2 .

Le résultat juste est très probablement $d = \sqrt{R^2 + h^2}$

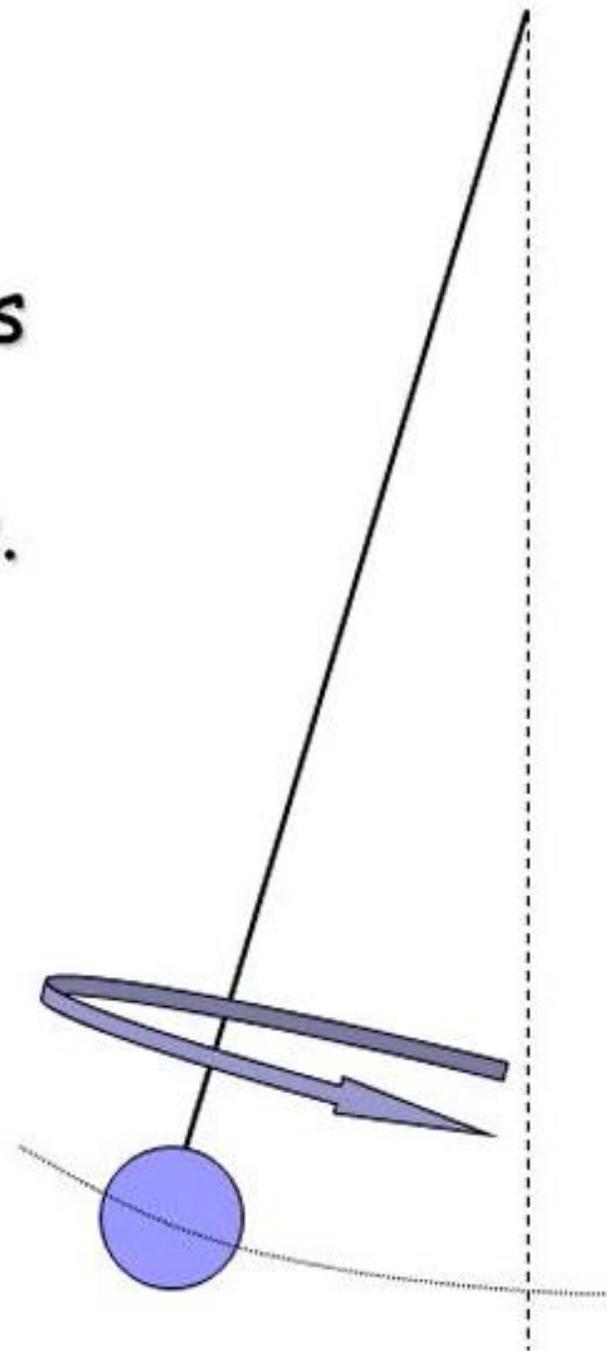


Le faisceau laser ayant une longueur d'onde λ , parmi les relations suivantes, lesquelles ne sont pas homogènes ?

$$d = \frac{2\lambda D}{a} ; d = \frac{2D^2}{\lambda a} ; d = \frac{2aD}{\lambda} ; d = 2\lambda a D$$

- Vérifier que la formule : $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ est homogène.

Formule où T_0 représente la période des oscillations d'un pendule simple, l sa longueur et g l'intensité de la pesanteur.



$$\square T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

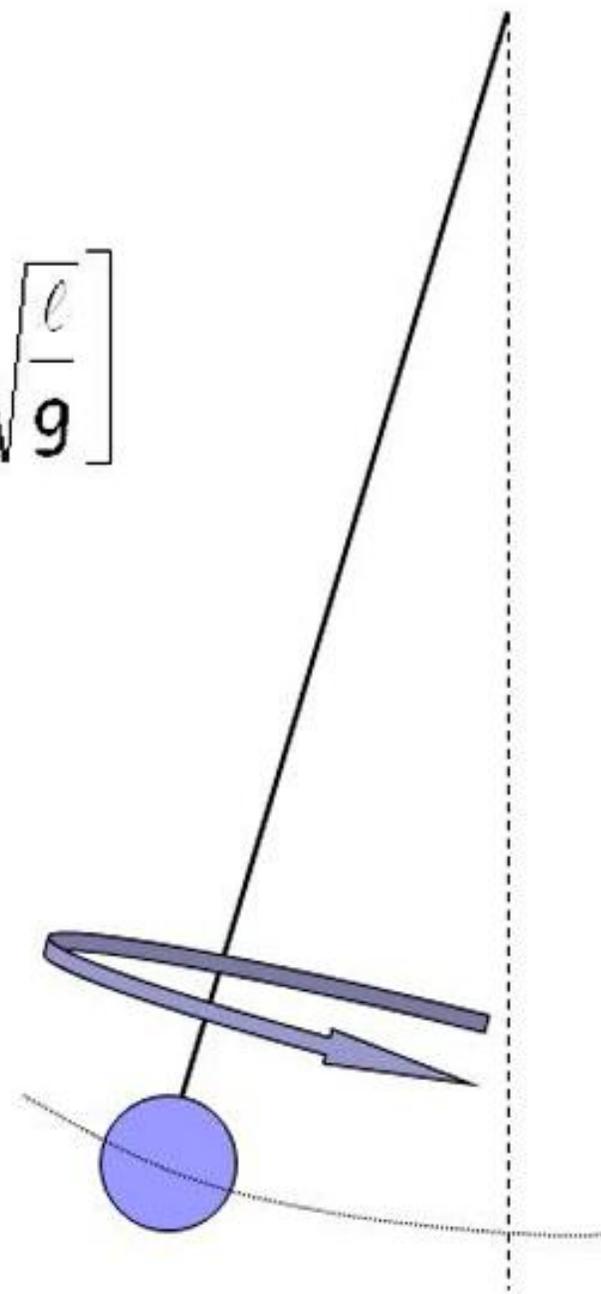
L'expression est homogène si : $[T_0] = \left[\sqrt{\frac{l}{g}} \right]$

$$[T_0] = \mathbf{T} ; [l] = L$$

$$P = mg \Rightarrow g = P/m$$

$$[g] = [F]/[m] = MLT^{-2}M^{-1} = LT^{-2}$$

$$[l/g] = LT^2L^{-1} = T^2 \text{ et donc } \left[\sqrt{\frac{l}{g}} \right] = \mathbf{T}$$



Supposons que, dans un exercice de thermodynamique, on ait trouvé comme expression du travail des forces de pression W_p :

$W_p = -2P_0(V_2 - V_1)$ où P_0 pression extérieure et V_1, V_2 les volumes initial et final du système.

Cette formule est-elle homogène ? Deux façons de procéder :

- **Une méthode, parfois longue et fastidieuse, consiste à revenir aux grandeurs fondamentales**, après avoir "supprimé" tous les scalaires qui n'interviennent pas dans la dimension et simplifié les termes d'addition/soustraction :

on obtient $[W_p] = [P] [V]$.

On vérifie l'homogénéité en recherchant les équations aux dimensions:

$[P] = [F/S] = [m.a/S] = MLT^{-2}L^{-2} = ML^{-1}T^{-2}$; $[V] = L^3$ soit $[P][V] = ML^{-1}T^{-2}L^3 = ML^2T^{-2}$.

Or $W = F.d$ soit $[W] = M LT^{-2} L = ML^2T^{-2}$; la formule ci-dessus est donc homogène.

*** Une méthode plus rapide qui utilise directement les grandeurs dérivées : on cherche une ou plusieurs relations connues, exprimant les différentes grandeurs.**

Ici, on sait que $W = F.d$ et que $F = P.S$ donc $W = F.d = P.S.d = P V$. Donc $[W_p] = [P] [V]$:

la vérification est immédiate.

Attention, une expression homogène n'est pas forcément juste:

$$\ll E_c = mv^2 \gg.$$



**L'homogénéité d'une formule est une condition nécessaire
mais pas suffisante.**

*Elle ne permet pas de discriminer deux expressions littérales
qui respectent l'analyse dimensionnelle.*

L'analyse dimensionnelle permet de prédire la forme d'une loi physique afin de trouver la solution à certains problèmes sans avoir à résoudre d'équation :

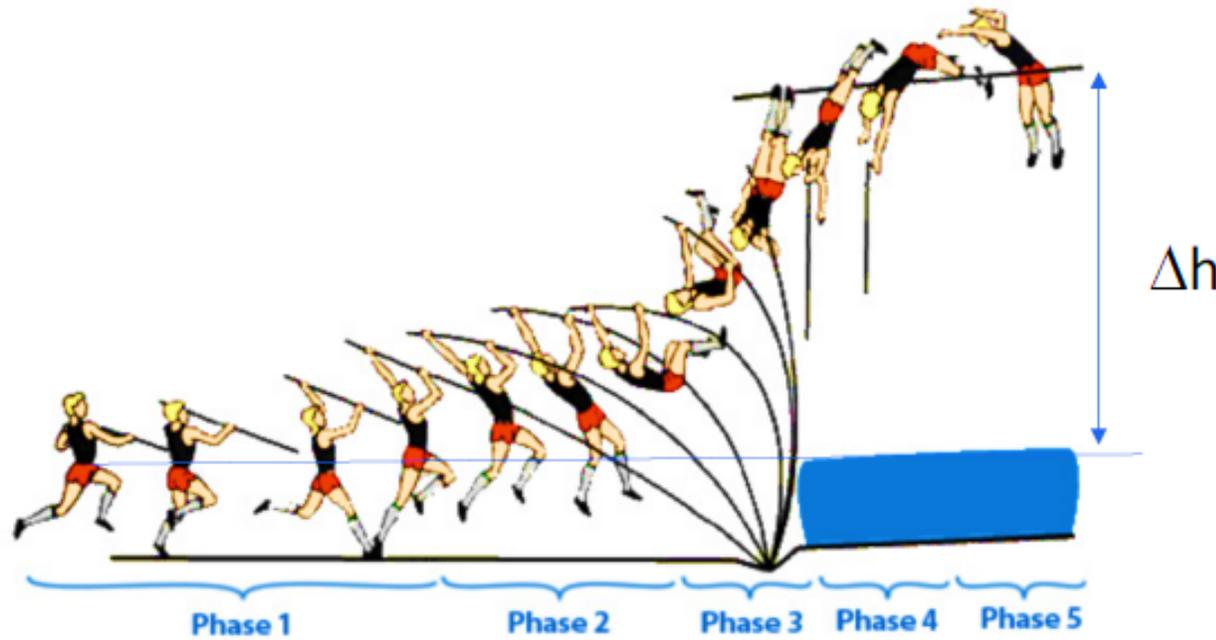
on peut pour de nombreux phénomènes physiques étudiés exprimer une grandeur caractéristique du phénomène et en déduire un ordre de grandeur (odg).

Un ordre de grandeur est une fourchette de valeurs.

Celle-ci va, communément, d'un dixième à dix fois l'ordre de grandeur donné. Ainsi, si l'on dit que « l'ordre de grandeur est d'un mètre » cela signifie que la longueur de l'objet est environ entre 10 cm et 10 m.

Donner un ordre de grandeur signifie donc donner une puissance de 10.

Saut à la perche (Thompson 1987)



Faire un bilan d'énergie

$$\frac{1}{2}mv^2 \sim mg\Delta h$$

$$v \sim 10 \text{ m/s} \Rightarrow \Delta h \sim 5 \text{ m}$$

Soit une hauteur de saut de 6 m

- La conversion entre énergie cinétique et potentielle via l'énergie élastique est-elle parfaite?
- Est-elle compensée par le travail des forces intérieures ; quelle est sa contribution?

(Nombreuses études récentes dans les journaux de biomécanique)

Vitesse d'un marcheur



- Typiquement entre 0 et 5 km/h
- Il existe une vitesse « naturelle » ou « optimale »
- Période propre ?

En assimilant les jambes à des barres de masse m et de longueur l

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mg\frac{l}{2}}} \sim 1.5 \text{ s.} \quad 2 \text{ pas de } 0.7 \text{ m par période} \Rightarrow v \sim 1 \text{ m/s} \sim 3.6 \text{ km/h}$$

Nous obtenons le bon ordre de grandeur, la justification d'une vitesse optimale et une loi d'échelle

$$v \propto \sqrt{lg}$$

Approximation correcte ou simplification excessive ?

L'analyse dimensionnelle a ses limites car elle est loin de pouvoir résoudre tous les problèmes physiques et elle n'a pas valeur de démonstration car **elle n'appuie pas son résultat sur les lois de la physique.**

Mais l'analyse dimensionnelle peut être une aide intéressante en amont de la résolution d'un problème ou d'une étude expérimentale car elle permet d'avoir une idée de ce que l'on va obtenir.

Méthode :

1. Faire la liste de tous les paramètres dont peut dépendre la grandeur caractéristique du phénomène : p_1, p_2, \dots

2. Écrire la loi physique sous la forme : $G = k \cdot p_1^a \cdot p_2^b \dots \dots$

3. Écrire l'équation dimensionnelle correspondante :

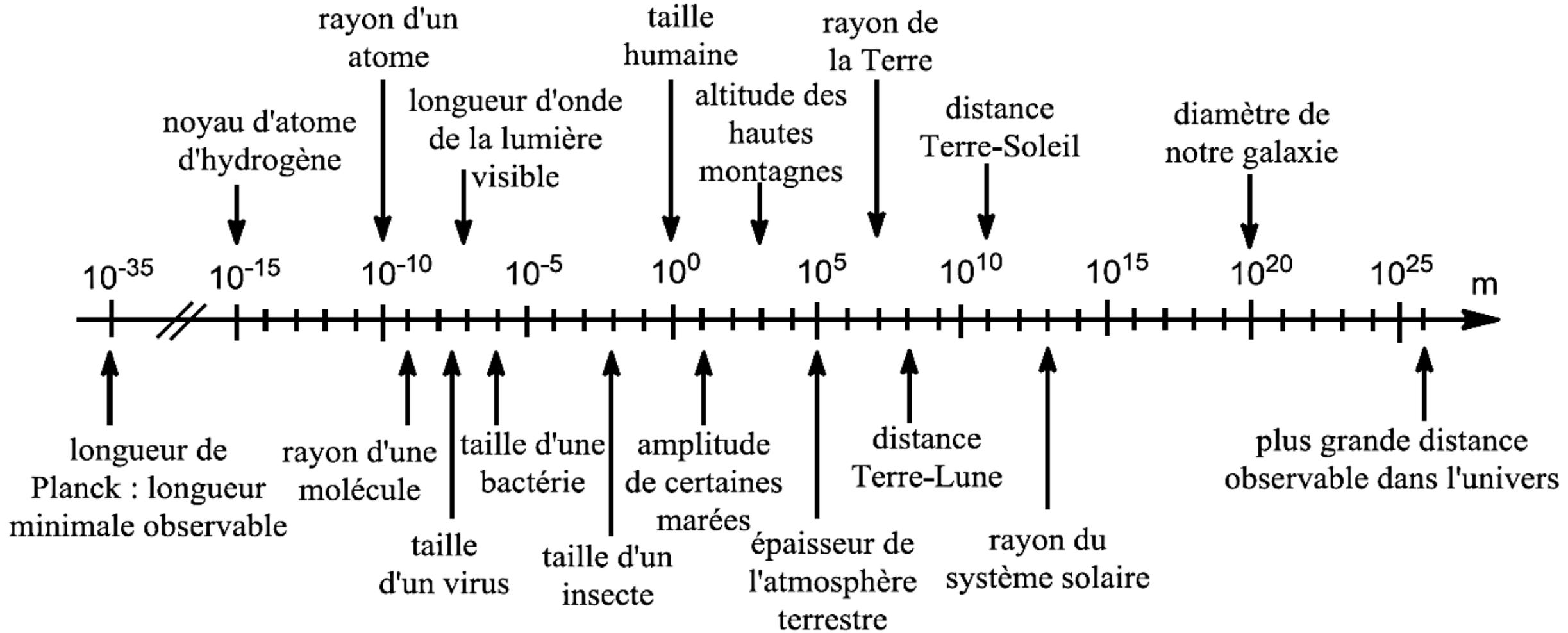
$$\dim G = (\dim p_1)^a (\dim p_2)^b \dots$$

en définissant ensuite les dimensions de chaque grandeur à l'aide des dimensions fondamentales **M, L, T, N,...** (la constante est sans dimension, elle n'apparaît donc pas dans l'équation dimensionnelle.)

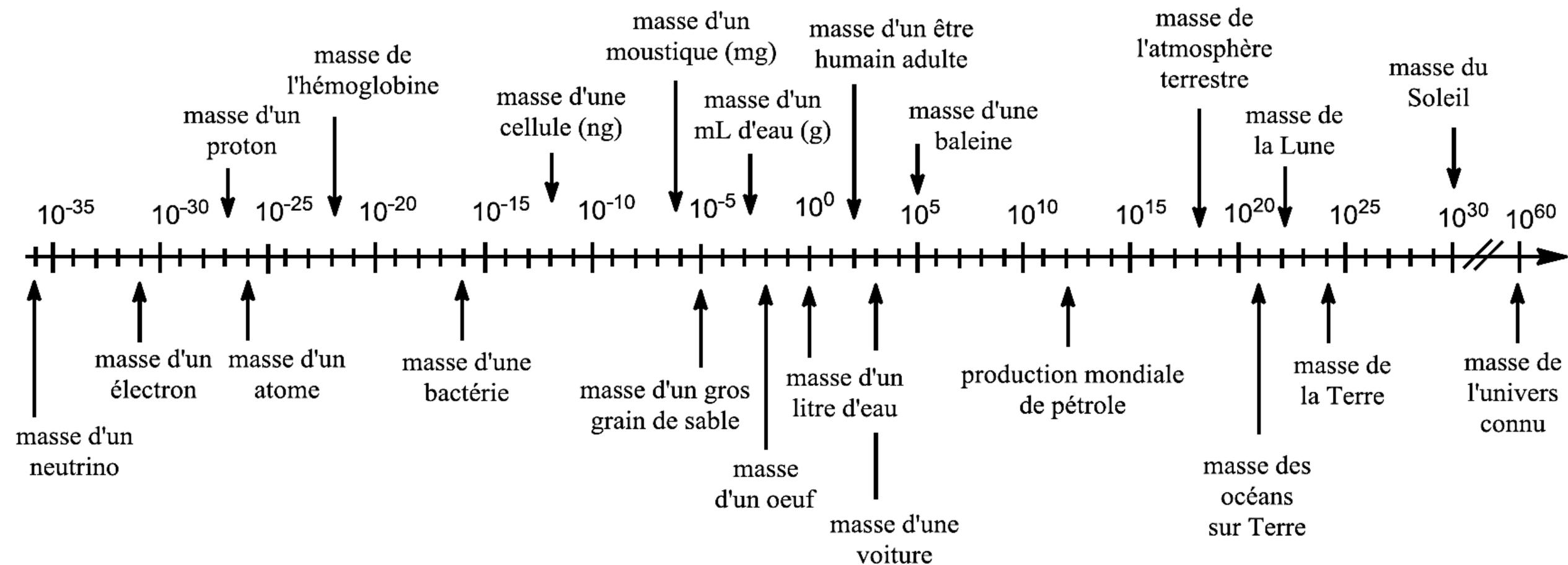
4. Les deux membres doivent être de même dimension ainsi l'exposant de chaque dimension fondamentale doit être identique de part et d'autre de l'égalité. On en déduit ainsi autant d'équation qu'il y a de dimension.

5. On résout le système d'équation dont les inconnues sont les exposants **a, b, ...**

Ordres de grandeur de longueur en mètre



Ordres de grandeur de masse en kg



Ordres de grandeur de masse volumique :

Masse volumique d'un solide : 10^3 kg.m^{-3} à 10^4 kg.m^{-3}

Masse volumique d'un gaz à pression atmosphérique et température ambiante : 1 kg.m^{-3}

Ordres de grandeur de pression :

Pression atmosphérique : 10^5 Pa

Pression dans l'espace : $10^{-8} - 10^{-11} \text{ Pa}$

Pression au niveau des fosses océaniques : 10^8 Pa

Ordres de grandeur de temps :

Durée de vie de certaines particules : 10^{-24} s

Période d'une onde lumineuse dans le visible : 10^{-15} s

Période d'une onde sonore : 10^{-3} s

Temps de vol de la lumière Soleil-Terre : 10^3 s

Année solaire : 10^7 s

Vie humaine : 10^9 s

Age (supposé) de l'univers : 10^{18} s

CONCLUSION

Intérêts et limites de l'analyse dimensionnelle

L'analyse dimensionnelle permet :

- de **déterminer l'unité** d'une grandeur
- de **vérifier l'homogénéité** d'une formule mais ne permet pas de discriminer deux expressions littérales qui respectent l'analyse dimensionnelle
- permet de **prédire la forme d'une loi physique afin de trouver la solution à certains problèmes sans avoir à résoudre d'équation** : on peut pour de nombreux phénomènes physiques étudiés exprimer une grandeur caractéristique du phénomène et en déduire un ordre de grandeur.

Conseils de rédaction

Pour une parfaite rédaction de vos résultats en devoir :

- Toujours donner un résultat sous forme d'expression littérale (sauf s'il est explicitement non demandé sous cette forme) : ainsi on peut vérifier l'homogénéité de la formule.
- Ne jamais remplacer une grandeur par sa valeur numérique avant d'avoir écrit l'expression littérale : sinon vous ne pourrez plus vérifier l'homogénéité de la formule.
- **Vérifier l'homogénéité au fur et à mesure de vos calculs.**
- Faire l'application numérique en vérifiant que les unités choisies sont compatibles.
- Donner le résultat numérique encadré avec le bon nombre de chiffres significatifs et l'unité.

Conclusion

- La vérification de l'homogénéité de vos relations est le meilleur moyen de détecter 90% de vos erreurs.
-  Ne jamais introduire la valeur numérique d'une grandeur dimensionnée dans une expression littérale sinon l'homogénéité n'est plus vérifiable .
- On doit garder l'expression littérale jusqu'au bout et poser ensuite son application numérique en vérifiant bien la compatibilité des unités (dans le doute, toujours utiliser le système SI.)