TD – Analyse dimensionnelle : unités, homogénéité

"Ce n'est pas dans la science qu'est le bonheur mais dans l'acquisition de la science"

Puissance de la parole, **Edgar Poe**

Exercice 1 :

La norme F de la force d'attraction gravitationnelle entre deux masses m et m' séparées d'une distance d s'écrit $F = \frac{G\,mm\prime}{d^2}$. En déduire la dimension de G et son unité SI.

Exercice 2 :

Voici trois expressions pour la période de révolution d'une sonde en orbite autour de la planète Mercure où M représente la masse de Mercure et r le rayon de l'orbite circulaire de la sonde :

(a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{GM}}$ (b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{GM}{r^3}}$ (c) $T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$

Déterminer par deux méthodes (analyse dimensionnelle et analyse des unités) la bonne expression pour la période.

Exercice 3 :

En 1867, Coulomb formulait par analogie avec la loi de gravitation universelle (Newton) la loi d'interaction électrostatique. On la formule aujourd'hui de la façon suivante :

« Deux charges ponctuelles q_1 et q_2 placées dans le vide en deux points de l'espace séparés d'une distance d, exercent l'une sur l'autre, des interactions de sens opposés, de même ligne d'action et de même norme F : $F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{d^2}$ ». Grâce à une analyse dimensionnelle, déterminer l'unité avec laquelle s'exprime ε_0 dans le système international.

Lorsque la force s'exerce dans un milieu, il faut multiplier la permittivité du vide ε_0 par ε_r la permittivité relative du milieu. Quelle est la dimension de ε_r ?

Exercice 4 :

Voici trois équations horaires décrivant le mouvement d'un corps dans lesquelles x désigne la distance parcourue, a l'accélération, t le temps et l'indice 0 indique la valeur de la grandeur à l'instant t = 0 s. Parmi ces équations, lesquelles sont possibles ?

(a) $x = v_0 t^2$ (b) $x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$ (c) $x = v_0 t + 2at^2$

Exercice 5 :

1. Masse volumique et volume massique

Donner la valeur de la masse volumique de l'eau liquide dans les unités suivantes :
$kg.L^{-1}$, $kg.m^{-3}$, $g.L^{-1}$, $g.dm^{-3}$, $g.cm^{-3}$, $g.mL^{-1}$.

Donner la valeur du volume massique de l'eau liquide dans les unités suivantes : $L.kg^{-1}$, $m^3.kg^{-1}$, $m^3.g^{-1}$, $L.g^{-1}$.

2. Conversion de vitesse

Donner la valeur à un chiffre significatif de la vitesse de la lumière dans le vide dans les unités suivantes : $m.s^{-1}$, $km.h^{-1}$.

3. Conversion conductivité.

La conductivité de l'eau ultrapure est de $\sigma = 5{,}5.10^{-6}$ $S.m^{-1}$. S = Siemens = Ω^{-1}.

Convertir cette conductivité en $\mu S.cm^{-1}$.

4. Conversion densité de courant.

Une densité de courant j vaut j = 10 $A.m^{-2}$. Convertir en $A.dm^{-2}$, $mA.cm^{-2}$, $\mu A.mm^{-2}$.

Exercice 6 :

Dire, à l'aide d'une analyse dimensionnelle rapide, pour chacune des expressions littérales suivantes, que : le résultat est susceptible d'être juste ou que le résultat est faux.

1. Hauteur maximale atteinte par un projectile de masse lancé verticalement à la vitesse, étant l'accélération de la pesanteur :

$$h = \frac{mv^2}{g} \quad ; \quad h = \frac{v^2}{2g} \quad ; \quad h = \frac{v^2}{g}$$

2. Portée horizontale x du tir d'un projectile de masse m dont la vitesse initiale v fait un angle α avec l'horizontale :

$$x = \frac{mv^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad ; \quad x = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g} \quad ; \quad x = \frac{v^2 \tan 2\alpha}{2g}$$

3. Altitude h d'un satellite en orbite circulaire autour de la Terre de rayon R , connaissant la période T et l'accélération de la pesanteur g au niveau du sol :

$$h = \sqrt[3]{\frac{T^2R^2g}{4\pi^2} - R} \quad ; \quad h = \sqrt[3]{\frac{T^2R^2g}{4\pi^2}} - R \quad ; \quad h = \sqrt[3]{\frac{T^4Rg^2}{4\pi^2}} - R$$

4. Tension U au sein d'un circuit électrique avec une tension E, des résistances électriques R_1, R_2, R_3 :

$$U = \frac{R_1R_2E}{R_1R_2 + R_3(1 + R_2)}$$

Exercice 7 :

1) Un pendule simple est un fil sans masse, de longueur *l* au bout duquel est attache un objet ponctuel de masse *m*. Soit *T* la période d'oscillation d'un tel pendule. *T* peut dépendre, a priori, de paramètres *g (la constante de pesanteur)*, *l*, *m et* θ, l'angle maximum de déviation par rapport à la verticale. Galilée est le premier à s'être rendu compte que *T* ne dépend, en fait, que très faiblement de θ quand θ est petit. Par une analyse dimensionnelle, établir l'expression de *T* quand θ est petit.
2) En déduire un ordre de grandeur pour un pendule de taille raisonnable.
3) Comment variera la période du pendule si la longueur du fil passe de l à 2 l ? à n l ?

Exercice 8 :

La poussée d'Archimède est la force particulière que subit un corps plongé en tout ou en partie dans un fluide soumis à un champ de gravité. Cette force provient de l'augmentation de la pression du fluide : la pression étant plus forte sur la partie inférieure d'un objet immergé que sur sa partie supérieure, il en résulte une poussée globalement verticale orientée vers le haut. C'est à partir de cette poussée qu'on définit la flottabilité d'un corps. Expérimentalement on peut montrer que la poussée d'Archimède dépend du volume du corps immergé dans le fluide, du type de fluide utilisée (en particulier la masse volumique semble intervenir), et de l'accélération de la pesanteur.
A l'aide d'une analyse dimensionnelle déterminer une expression permettant de d'obtenir un ordre de grandeur de la poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps.