Exercices

Matthieu Marouby

2024-2025

Table des matières

1 Généralités

1. Un peu de logique

Exercice 1. Soit $x \in \mathbb{Q}$ et soit $y \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $y \in \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \in \mathbb{Q}$.

2. Montrer que $y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$. On pourra raisonner par contraposée.

3. En déduire que $y \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow x + y \in \mathbb{Q}$.

Exercice 2. Soit a, b deux rationnels. Montrer que si $a + b\sqrt{2} = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$. On pourra raisonner par l'absurde.
On se souviendra que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 3. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ deux réels. Montrer que $\forall \varepsilon > 0, |x| \leqslant \varepsilon \Longrightarrow x = 0$. Est-ce que cela change quelque chose de considérer $\forall \varepsilon > 0, |x| < \varepsilon \Longrightarrow x = 0$?

Exercice 4. Soient $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant r \leqslant b - 1$ tel que $a = bq + r$. On commencera par chercher ce que peuvent valoir q et r s'ils existent et on vérifiera ensuite que ça fonctionne (raisonnement dit par « analyse-synthèse »).

2. Quelques résolutions d'équations pour voir si on a perdu la main

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E_1) $x^2 - 8x + 11 = 4$

(E_2) $|x-1| = 2x-3$

(E_3) $|x-5| = |4-x^2|$

(E_4) $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3$

(E_5) $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

(I_1) $x^2 - x > 2$

(I_2) $\sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{4x-1}$

(I_3) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} < 1$

Exercice 7. 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{x+2}{x-2} - \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{8x}{x^2-4}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{3-x}{3+x} - 1 = \dfrac{2-x}{2+x} + \dfrac{1-x}{1+x}$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{x-1}} + x = 0$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{3x+2}{x^2-3x+2} < 1$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2 < \dfrac{x-3}{x-5} \leqslant 3$.

6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^2 - 3x \geqslant \left|x^2 - 5x + 4\right|$.

   Rappelons si besoin que $\sqrt{2} \simeq 1,41\ldots$

Exercice 8. 1. Soit m un réel. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x,

$$(2mx-3)^2 = (x+m)^2.$$

2. On note a, b et c trois nombres réels deux à deux distincts. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\frac{ax}{(a-b)(a-c)} + \frac{bx}{(b-c)(b-a)} + \frac{cx}{(c-a)(c-b)} = 1.$$

3. Soient m, p deux réels. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x,

$$(x+m)^2 - (x-p)^2 = m+p.$$

Exercice 9. 1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Peut-on trouver un réel m tel que l'équation

$$\frac{2m}{x+2} = \frac{m-5}{x-1}$$

admette α pour solution.

2. Comment choisir $m \in \mathbb{R}$ pour que l'équation suivante d'inconnue x admette deux racines distinctes réelles strictement positives.

$$3x^2 - 5x + m + 7 = 0.$$

3. Comment choisir $m \in \mathbb{R}$ pour que l'équation suivante d'inconnue x admette deux racines distinctes réelles strictement positives.

$$(m-3)x^2 + (1-2m)x + m + 1 = 0.$$

4. Comment choisir $m \in \mathbb{R}$ pour que l'inéquation suivante d'inconnue x admette $\mathbb{R}$ comme ensemble solution.

$$(m+3)x^2 - 2(m+1)x - (m+1) > 0.$$

Exercice 10. 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x^2 - 3x + 8} = x - 4$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x^2 + x + 4} > 3$.

3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{4 + \sqrt{x^4 + x^2}} = 2 - x$.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\sqrt{x+1} - \sqrt{x} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{(x^4 + 2x^2 - 3)(x^5 + x^3 - 2x)}{x^4 + 3x^2 - 10} \geqslant 0$.

Exercice 11. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$ d'inconnue x :

1. $\ln\big(x(3x+5)\big) = \ln\big(2(x+3)(x-7)\big)$.
2. $2x^4 + 5x^2 - 8 = (x^2 + 2)^2$.
3. $\ln^2(x) - 4\ln(x) + 3 = 0$.
4. $e^{2x} - 8 = 2e^x$.
5. $e^x + e^{1-x} = e + 1$.
6. Résoudre $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+$. On prendra la convention que $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3. Pour s'assurer qu'on maitrise bien les réels

Exercice 12. Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Traduire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes et, pour chaque propriété, donner deux ensembles qui la vérifient.

- 0 est un majorant de E.
- 1 n'est pas un minorant de E.
- π est le maximum de E.
- E est majoré.
- E n'est pas minoré.
- E est borné.
- E n'est pas borné.

Exercice 13. Soient x et y deux réels tels que $-1 \leqslant x \leqslant 2$ et $2 \leqslant y \leqslant 4$. Encadrer du mieux possible $x+y$, $x-y$, xy, $\dfrac{x}{y}$ et lorsque $x \neq 0$, $\dfrac{y}{x}$.

Exercice 14. Pour chacune des sous-parties de $\mathbb{R}$ suivantes dire

- si elle est majorée. Si c'est le cas préciser sa borne supérieure et étudier l'existence éventuelle d'un maximum.
- si elle est minorée. Si c'est le cas préciser sa borne inférieure et étudier l'existence éventuelle d'un minimum.

$$A =]2, e^2[\cup \{10\} \quad B = \left\{ k\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) \ , \ k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{n^2} \quad n \geqslant 3 \right\} \quad D = \mathbb{Q}_+^* \quad E = \left\{ x \in \mathbb{R} \ , \ \exists n \in \mathbb{N}^* \ , \ x = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right\}$$

$$F = \left\{ \frac{pq}{p^2+q^2+1} \ , \ (p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2 \right\} \qquad G = \left\{ \frac{\cos(n)}{n} \ , \ n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

Exercice 15. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b+|a-b|)$$

Exercice 16. Soit A la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = |x-3| + |x| + |x+8|$.

1. Exprimer A sans utiliser de valeur absolue en distinguant les différentes valeurs possibles de x.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$:

   a. $A(x) = 2$.
   b. $A(x) = -7$.
   c. $A(x) > 0$.
   d. $A(x) = 4x - 20$.

Exercice 17. 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|2x+7| = 1$.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $|3x-9| = |x-1|$.

3. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation
$$|2x-8| + |x-1| = 9.$$

Exercice 18 (A propos de la partie entière)**.** 1. Soient x et y deux réels tels que $x \leqslant y$. Montrer que $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$, simplifier $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor$.

3. Résoudre les équations suivantes :

   a. $\lfloor 2x+7 \rfloor = 1$.
   b. $\lfloor -4x+2 \rfloor = 10$.

4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor$.

Exercice 19. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la partie entière de $\dfrac{n^3}{n+1}$. On essaiera de mettre $\dfrac{n^3}{n+1}$ sous la forme $an^2 + bn + c + \dfrac{d}{n+1}$ où a, b, c et d sont des entiers à identifier.

Exercice 20. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n - 1$$

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor x + y \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 2y \rfloor$$

Exercice 21. 1. Montrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, ab \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

2. En déduire que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}_+^3, 8xyz \leqslant (x + y)(x + z)(y + z)$.

4. Récurrences

Exercice 22 (Suite de Fibonacci)**.** Soit F la suite définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour $n \geqslant 0$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2 \text{ et } F_{2n+2} = F_{n+1}(F_n + F_{n+2}).$$

Exercice 23. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = 6$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 2$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = (1 + \sqrt{2})^{(2^n)} + (1 - \sqrt{2})^{(2^n)}.$$

Exercice 24. 1. Développez $(a + b)^3$.

2. Montrez que pour tout entier n supérieur ou égal à 3

$$(n + 1)^3 \leqslant 3n^3.$$

3. Montrez que pour tout entier naturel n, on a $3^n \geqslant n^3$.

Exercice 25. Montrez que pour tout entier naturel n il existe a et b entiers relatifs tels que $n = 9a + 4b$ en procédant par récurrence.

Exercice 26. Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de manière unique sous la forme $n = 2^p(2q + 1)$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$.
On notera $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q + 1)$ ». et on fera une récurrence forte.

2 Sommes et produits

Exercice 1. Montrez les égalités suivantes pour tout n entier naturel supérieur ou égal à 0.

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n + 1)! - 1$.

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n(n^2 + n)}{2}$.

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^3 = \frac{(-1)^n(4n^3 + 6n^2 - 1) + 1}{8}$.

4. Pour les amateurs de calculs longs : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1} \frac{n^6 + 3n^5 - 5n^3 + 3n}{2}$.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Exprimer en fonction de n :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (2k)^2.$$

2. En déduire une expression de
$$T_n = \sum_{k=0}^{n} (2k+1)^2.$$

3. Que vaut $S_n + T_n$? Aurait-il été possible de le déterminer sans répondre aux deux questions précédentes ? Justifier.

Exercice 3. Calculer les sommes suivantes pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$1. \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad 2. \sum_{k=1}^{n+1} (-3)^k \quad 3. \sum_{k=1}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^k \quad 4. \sum_{k=2}^{n+1} 2^{2k} \quad 5. \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k-1}} \quad 6. \sum_{k=2}^{n+3} \frac{2^{2k-1}}{5^{k+3}}.$$

Exercice 4. Calculer les sommes suivantes, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k+1).$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$

3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}.$

Exercice 5. Calculer les expressions suivantes où $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geqslant 1$ (et $n \geqslant 2$ pour certains). Le résultat ne devra pas utiliser le signe $\sum$ ou $\prod$.

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)}; & B &= \sum_{k=2}^{n} \frac{4k-2}{k(k^2-1)};\\
C &= \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right); & D &= \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1};\\
E &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (i+j); & F &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} i(n-j).
\end{aligned}$$

Exercice 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{q=0}^{n} \sum_{p=0}^{q} 2^p.$

2. $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} 2^{i-j}.$

3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j}.$

4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}.$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$1 + \frac{x}{x+1} + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{x+1}\right)^7 = 0.$$

Exercice 8. Quelques manipulations sur les coefficients binomiaux. Calculer les sommes suivantes :

1. $S_0 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}$.

2. $S_1 = \sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p}$.

3. $S_2 = \sum_{p=0}^{n} p(p-1)\binom{n}{p}$.

4. $S_3 = \sum_{p=0}^{n} p^2\binom{n}{p}$.

5. $S_4 = \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p}$.

6. $S_5 = \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$ avec $p \in \{0, \dots, n\}$.

7. $S_6 = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \binom{n}{n-p}\binom{n-p}{n-k}$ avec $k \in \{0, \dots, n\}$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. On note

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} x^{2k} \text{ et } T_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Déterminer S_n et T_n. On pourra s'intéresser à $S_n + T_n$ et à $S_n - T_n$.

Exercice 10. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$ (on prendra la convention que $0^0 = 1$.)

Exercice 11. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n).$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n-1)!$.

Exercice 12. Montrez que pour tout n entier naturel, $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier naturel.

3 Trigonométrie

Exercice 1. Donner les valeurs exactes des quantités suivantes :

1. $\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

2. $\sin\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

3. $\cos\left(\dfrac{11\pi}{6}\right)$.

4. $\cos\left(\dfrac{13\pi}{6}\right)$.

5. $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$.

6. $\cos\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

7. $\cos\left(\dfrac{13\pi}{4}\right)$.

8. $\tan\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$.

9. $\tan\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes :

1. $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $\sin(x) = -\dfrac{1}{2}$.

3. $\cos(3x) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

4. $\sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

5. $\cos(2x) = \cos(x)$.

6. $\sin(3x) = -\cos(x)$.

7. $\cos^2(x) = \dfrac{3}{4}$.

Exercice 3. 1. En remarquant que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$, déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

2. De la même façon, déterminer $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 4. 1. En remarquant que $\dfrac{\pi}{4} = 2\dfrac{\pi}{8}$, déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

2. En déduire $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Exercice 5. On note $a = \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$, $b = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$ et $c = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right)$.

1. Exprimer b en fonction de a^2.
2. a. Exprimer c en fonction de a.
   b. Exprimer c en fonction de b^2.
   c. En déduire une autre relation entre a et b.
3. Exprimer $a + b$ en fonction de a^2 et b^2. En déduire la valeur de $a - b$.
4. Déterminer la valeur de a.
5. En déduire $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 6. 1. Soit a un réel tel que $\tan(a)$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$ existent. Que vaut $\tan\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$?

2. a. Soient a et b deux réels tels que $\tan(a), \tan(b)$ et $\tan(a + b)$ existent. Montrer que $\tan(a + b) = \dfrac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$.
   b. (bonus) Est-il imaginable d'avoir $\tan(a)\tan(b) = 1$ dans les conditions précédentes ?
   c. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (sans chercher les valeurs correspondantes pour le sinus et le cosinus).
3. a. Soit a un réel tel que $\tan(a)$ et $\tan(2a)$ existent. Établir une expression de $\tan(2a)$ en fonction de $\tan(a)$.
   b. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ (sans chercher les valeurs correspondantes pour le sinus et le cosinus).

4 Ensembles et dénombrement

1. Théorie des ensembles

Exercice 1. Soient A et B deux parties d'un ensemble $\mathcal{E}$. Que peut-on dire de A et B si $A \cup B = A \cap B$?

Exercice 2. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble, X, Y et Z trois sous ensembles de $\mathcal{E}$.

1. Exprimez les ensembles suivants de manière plus simple.

   a. $A = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y})$.
   b. $B = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y})$.
   c. $C = (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) \cup (\overline{X} \cap \overline{Y})$.
   d. $D = (X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) \cap (\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y})$.

2. Démontrez les relations suivantes.

   a. $X \subset Y \iff X = X \cap Y$.
   b. $X \cap Y \subset (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$.
   c. $(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$.

d. $(Z \cup X) \cap (X \cup Y) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z})$.

Exercice 3. Soit $\mathcal{E}$ un ensemble, A, B et C trois sous ensembles de $\mathcal{E}$. Montrer que

1. $(A \subset (B \cap C)$ et $(B \cup C) \subset A) \Longrightarrow (A = B = C)$.
2. $((A \cup B = A \cup C)$ et $(A \cap B = A \cap C)) \Longrightarrow (B = C)$.
   On pourra commencer par montrer que $A \cup B = A \cup C \Longrightarrow \overline{A} \cap B = \overline{A} \cap C$.

Exercice 4. Soient A et B deux parties d'un ensemble de E.

1. Comparer $\mathcal{P}(A \cap B)$ et $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
2. Comparer $\mathcal{P}(A \cup B)$ et $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

2. Les dénombrements classiques

Exercice 5. Une suite de 10 questions est posée à un candidat qui doit répondre par oui ou par non. De combien de façons peut-il répondre à cette liste de questions

1. si toutes les questions doivent recevoir une réponse ?
2. si certaines peuvent rester sans réponse ?

Exercice 6. Dans une classe de 48 élèves, tout le monde se serre la main en arrivant le matin. Combien de poignées de mains sont échangées ?

Exercice 7. Dans un repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, de combien de façon peut-on se rendre du point O au point A de coordonnées $(3, 4)$ sachant qu'on ne peut se déplacer que de deux façons différentes : se déplacer selon le vecteur $\overrightarrow{i}$ ou $\overrightarrow{j}$ (donc un pas vers la droite ou un pas vers le haut).

Exercice 8. La finale du 800m aux JO 2016 est disputée par huit coureurs dont trois Kényans. On se souviendra qu'un podium est constitué de trois coureurs et que l'ordre est important !

1. Combien y a-t-il de podiums différents ?
2. Combien y a-t-il de podiums différents comprenant les trois coureurs Kényans ?
3. Combien y a-t-il de podiums différents comprenant au moins un Kényan ?
4. Combien y a-t-il de podiums différents comprenant exactement un Kényan ?
5. Combien y a-t-il de podiums différents comprenant exactement deux Kényans ?

Note culturelle : La course a été gagnée par le détenteur du record mondial et olympique de l'époque (1 minute 40 secondes et 91 centièmes, toujours non dépassé à l'heure où j'écris ces lignes) David Rudisha en 1 minute 42 secondes et 15 centièmes qui représentait le Kenya, c'était le seul Kényan sur le podium (les deux autres étaient classés 5 et 7).

Exercice 9. Un groupe de 7 amis se retrouvent pour sortir ensemble.

1. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir sur les 7 fauteuils d'un rang d'une salle de cinéma ?
2. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir autour d'une table ronde où se trouvent un fauteuil de président et 6 chaises ?

3. De combien de façons peuvent-ils s'asseoir autour d'une table ronde où se trouvent 7 chaises ?

Exercice 10. Soient n, p deux entiers non nuls tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. Dans une assemblée de n personnes, on élit p représentants, et parmi ces p représentants un président.

1. Déterminer le nombre de choix possibles en commençant par élire les p représentants.
2. Déterminer le nombre de choix possibles en commençant par élire le président puis les représentants restant.
3. En déduire : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$.
4. Le retrouver par le calcul.

Exercice 11. Soient n, p deux entiers non nuls tels que $1 \leqslant p \leqslant n$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On tire au hasard et simultanément p boules.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Soit k un entier de $[\![1; n]\!]$. Combien y a-t-il de tirages dont le plus grand numéro est k ?
3. En déduire la formule suivante :
$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$
4. Reprendre les deux premières questions dans le cadre d'un tirage avec remise.

Exercice 12. On jette simultanément trois dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Dénombrer les résultats possibles si les dés sont identiques.
2. On suppose que les dés sont de couleurs différentes.
   a. Dénombrer les résultats possibles.
   b. Dénombrer les résultats comportant 3 numéros différents.
   c. Dénombrer les résultats comportant au moins une fois le chiffre 1.
   d. Dénombrer les résultats comportant exactement 2 fois le chiffre 3.

3. Pour aller plus loin

Exercice 13. Un vieil agriculteur possède 5 champs distincts : c_1, c_2, c_3, c_4, c_5. Il désire léguer à ses trois enfants en respectant la règle suivante : chaque enfant doit recevoir au moins un champ. Combien de possibilités a-t-il de rédiger son testament ?

Exercice 14. On dispose d'un ensemble de six boules que l'on distingue uniquement par leur couleur : blanche, rouge, bleue, verte, jaune, noire. On répartit ces six boules en trois lots de telle sorte que chaque lot contienne au moins une boule.
Combien d'ensembles distincts de trois lots peut-on ainsi former, étant entendu que deux ensembles de trois lots sont distincts s'il existe dans l'un au moins un lot n'appartenant pas à l'autre.

Exercice 15. Soit E un ensemble de cardinal n avec $n \geqslant 1$.

1. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cap B = \emptyset$?
2. Combien y a-t-il de couples (A, B) de parties de E telles que $A \cup B = E$?
3. Combien y a-t-il de triplets (A, B, C) de parties de E tels que $A \cup B \cup C = E$?

Exercice 16. On considère r boules que l'on veut placer dans dans n urnes numérotées de 1 à n, chaque urne pouvant contenir de 0 à r boules.

1. Donner les différentes répartitions possibles pour $n = 2$ et $r = 3$, les r boules étant numérotées de 1 à 3.
2. On revient au cas général : les r boules sont numérotées de 1 à r et les n urnes de 1 à n, donner le nombre de répartitions possibles.
3. Les r boules sont indiscernables, donner le nombre de répartitions possibles.
4. Toujours dans le cas où les r boules sont indiscernables, combien y a-t-il de répartition sans urne vide ?

Exercice 17. Notons S_3 l'ensemble des permutations de $E = \{1, 2, 3\}$, c'est-à-dire les bijections de E dans E.

1. Déterminer le nombre d'éléments de S_3 laissant un unique élément de E invariant. On appelle ces éléments des transpositions de E.
2. Déterminer le nombre d'éléments de S_3 ne laissant aucun élément de E invariant.
3. Déterminer le nombre d'éléments de S_3 laissant exactement deux éléments de E invariant.

Exercice 18. Soit n un entier naturel et p un entier naturel non nul.

1. Montrer que le nombre $a(n, p)$ de p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de $\mathbb{N}^p$ tels que
$$x_1 + 2x_2 + \cdots + px_p = n$$
est égal au nombre de p-uplets $(y_1, y_2, \ldots, y_p)$ de $\mathbb{N}^p$ tels que
$$\begin{cases} y_1 \geqslant y_2 \geqslant \cdots \geqslant y_p \\ y_1 + y_2 + \cdots + y_p = n. \end{cases}$$
On pourra remarquer que
$$x_1 + 2x_2 + \cdots + px_p = x_1 + x_2 + \ldots + x_p + x_2 + \ldots x_p + x_3 \ldots + x_p + \ldots + x_p$$
2. Calculer $a(0, p)$ et $a(n, 1)$.
3. Montrer que pour tous entiers naturels n et p avec $n \geqslant p$ on a :
$$a(n, p) = a(n - p, p) + a(n, p - 1).$$

5 Nombres complexes

1. Exercices de base

Exercice 1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants (ou de manière équivalente, les mettre sous forme polaire) :

1. $\frac{3}{2}i$.
2. -3.
3. $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$.
4. $-2i$.
5. $\frac{1+i}{1-i}$.
6. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^4$.
7. $-3(\cos(\theta)+i\sin(\theta))$.
8. $2(\cos(2\theta)-i\sin(2\theta))$.

Exercice 2. Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x\in\mathbb{R}$:

1. $\cos(x)+\sin(x)=1$.
2. $\cos(x)-\sin(x)=\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Exercice 3. 1. Déterminer le module de $\frac{1+4i}{2-2i}$.

2. Mettre sous forme algébrique $\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$.

3. Mettre sous forme algébrique $\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.

4. Module de $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)$.

5. Déterminer le module et un argument de $\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}}$.

6. Déterminer le module et un argument de $\frac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}}$.

7. Déterminer le module et un argument de $\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{3+i\sqrt{3}}$.

Exercice 4. 1. Déterminer le module et un argument de $1+e^{i\theta}$, $\theta\in[0,\pi[$.

2. Déterminer le module et un argument de $1-e^{i\theta}$, $\theta\in]0,\pi[$.

3. Déterminer la partie réelle de $\frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{e^{i\theta}-e^{i\varphi}}$ avec $\theta-\varphi\notin\{2k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 5. Déterminer le module et un argument de $e^{e^{i\theta}}$.

Exercice 6. Linéariser les expressions suivantes :

1. $A(x) = \cos^4(x)$.
2. $B(x) = \cos^3(x)\sin^2(x)$.
3. $C(x) = \sin^5(x)$. En déduire les solutions de $\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x) = 0$.

Exercice 7. Exprimer les quantités suivantes en fonction de $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

1. $A(x) = \cos(4x)$.
2. $B(x) = \cos(3x)\sin(x)$.
3. $C(x) = \sin(5x)$.

Exercice 8. Déterminer parties imaginaires et réelles de $(\sqrt{3} - i)^{17}$, $(1 - i\sqrt{3})^{-23}$, $\left(\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}\right)^{24}$.

2. Equations du second degré

Exercice 9. Résoudre les équations suivantes :

1. $z^2 + 9 = 0$.
2. $z^2 - z + 1 = 0$.
3. $z^2 + z + 4 = 0$.
4. $3z^2 - 6z + 6 = 0$.
5. $4z^2 + 4z\sqrt{3} + 4 = 0$.
6. $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

3. Equations diverses

Exercice 10. Résoudre :

1. $z^2 - 2iz + 2 - 4i = 0$. On pourra remarquer que $(2 + 4i)^2 = -12 + 16i$.
2. $z^3 - i = 6(z + i)$. On pourra remarquer que $z^3 - i = z^3 - (-i)^3$.
3. $z^8 = \dfrac{1 - i}{\sqrt{3} - i}$.
4. $z^4 - (3-2i)z^2 + (8+6i) = 0$. On notera que $(3-6i)^2 = -27-36i$ et que $(2-i)^2 = 3-4i$.
5. $5z - 2|z| = 5 + 20i$. Avec $76^2 = 5776$...

Exercice 11. Résoudre $z^9 = \dfrac{1}{\overline{z}^3}$.

Exercice 12. Déterminer les racines cubiques de $\dfrac{-1+i}{4}$. Montrer que l'une d'entre elles a une puissance quatrième réelle.

Exercice 13. Résoudre l'équation $(z-1)^3 + (z-1)^2(z+1) + (z-1)(z+1)^2 + (z+1)^3 = 0$.

Exercice 14. Résoudre $1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0$, $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 15. Résoudre $z^7 + \dbinom{7}{2} z^5 + \dbinom{7}{4} z^3 + 7z = 0$.

4. Manipulations diverses

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_1 = 2i$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

1. Simplifier $(1+i)^n - (1-i)^n$.

2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{2}^{n+2} i \sin\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$.

Exercice 17. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ de module 1, avec $a \neq b$. Montrer que $\dfrac{a+b}{a-b}$ est un imaginaire pur.

Exercice 18. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ de module 1, avec $ab \neq -1$. Montrer que $\dfrac{a+b}{1+ab}$ est un réel.

Exercice 19. Montrer que pour tout a, b complexes, $|a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$. Discuter le cas d'égalité.

Exercice 20. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| \neq 1$. Montrer que $\left|\dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \dfrac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.

Exercice 21. 1. Simplifier $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{32}$.

2. Simplifier $\left(\dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{24}$.

Exercice 22. Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$. Montrer que l'on a $|1+z| \geqslant 1$ ou $\left|1+z^2\right| \geqslant 1$.

Exercice 23. Soient $a, b \in \mathbb{C}$ avec $\overline{a}b \neq 1$. Montrer que

$$(|a| = 1 \text{ ou } |b| = 1) \iff \left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1.$$

Exercice 24. 1. Calculer $S = \displaystyle\sum_{k=-n}^{n} \exp(ikx)$.

2. Calculer $C_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(a+kb)$ et $S_1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(a+kb)$.

3. Calculer $C_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(ak)$ et $S_2 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sin(ak)$.

4. Calculer $C_3 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^k(x)\cos(kx)$.

Exercice 25. Soit $x \in \mathbb{C} \setminus [-1, 1]$. Montrer qu'il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$ tel que $x = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$.

Exercice 26. Résoudre $(z+i)^n = (z-i)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 27. On note $z_0 = \exp\left(\frac{2i\pi}{5}\right)$.

1. Montrer que $z_0^4 + z_0^3 + z_0^2 + z_0 + 1 = 0$.

2. En déduire que z_0 vérifie $\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right)^2 + \left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right) - 1 = 0$.

3. Simplifier $\left(z_0 + \dfrac{1}{z_0}\right)$ et en déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$.

6 Élements d'analyse

1. Applications

Exercice 1. On note f, g deux applications de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = 1 + x \text{ et } g(x) = 1 + x^2.$$

Préciser $f \circ g$ et $g \circ f$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 2. On considère f et g deux applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ définies par :

$$f(x) = \frac{x}{2} \text{ si } x \text{ est pair,} \quad f(x) = \frac{x-1}{2} \text{ si } x \text{ est impair}$$

$$g(x) = 2x \text{ si } x \text{ est pair,} \quad g(x) = 2x + 1 \text{ si } x \text{ est impair.}$$

1. f et g sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

2. Mêmes questions pour $g \circ f$ et $f \circ g$.

Exercice 3. Soient E, F et G trois ensembles non vides. On considère les applications suivantes : f de E dans F, g de F dans G. Montrer les implications suivantes.

1. $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.

2. $g \circ f$ injective et f surjective sur $F \Longrightarrow g$ injective.

3. $g \circ f$ surjective sur $G \Longrightarrow g$ surjective sur G.

4. $g \circ f$ surjective sur G et g injective $\Longrightarrow f$ surjective sur F.

Exercice 4. Soient E, F et G trois ensembles non vides. On considère les applications suivantes : f de E dans F, g de F dans G et h de G dans E. Montrer les implications suivantes.

1. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des surjections et que $f \circ h \circ g$ est une injection. Montrer que f, g et h sont des bijections.

2. On suppose que $h \circ g \circ f$ et $g \circ f \circ h$ sont des injections et que $f \circ h \circ g$ est une surjection. Montrer que f, g et h sont des bijections.

Exercice 5. Soient E, F deux ensembles et soit f une application de E dans F.

1. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, on a $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.

Exercice 6. Soit E un ensemble non vide et a un élément de E. On considère l'application de $\mathcal{P}(E)$ dans lui-même définie par :

$$\forall X \subset E, f(X) = \begin{cases} X \setminus \{a\} \text{ si } a \in X \text{ et} \\ X \cup \{a\} \text{ si } a \notin X. \end{cases}$$

1. Montrer que f est bijective.

2. Calculer $f \circ f$. Qu'en pensez-vous ?

2. Etudes de fonction

Exercice 7. Déterminer les ensembles de définition et de dérivabilité puis calculer la dérivée des fonctions f suivantes définies par :

1. $f(x) = \cos^3(x)$.
2. $f(x) = \cos(3x)$.
3. $f(x) = \dfrac{1}{\cos(2x)}$.
4. $f(x) = \tan(x^2)$ (je vous épargne la détermination de l'ensemble de dérivabilité).
5. $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$.
6. $f(x) = \left(\dfrac{2x-1}{5x+1}\right)^7$.
7. $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.
8. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$.
9. $f(x) = x^{x+2}$.
10. $f(x) = x\ln(x)$.
11. $f(x) = \ln(\ln(x))$.
12. $f(x) = x\ln(|x|)$.
13. $f(x) = e^{\sin(3x)}$.
14. $f(x) = \sqrt{x^3+6x^2}$.

Exercice 8. Etudier le sens de variation des fonctions suivantes (on pourra montrer que la fonction est dérivable, la dériver et étudier le signe de la dérivée) et préciser les limites aux bornes de l'ensemble de définition (si vous vous en souvenez) et tracer l'allure de la courbe :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.
2. f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-2x^2}$.
3. f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x)$.

Exercice 9. Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leqslant x$.

Exercice 10. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\sin(x) \leqslant x$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $\sin(x) \geqslant x$.

Exercice 11. Etudier le signe des fonctions suivantes (on pourra parfois s'aider de leur sens de variation) :

1. f définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x - e^{-x}$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} \leqslant e^x$.

Exercice 13. 1. Soit f une fonction périodique et monotone sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = sin(\frac{x}{2}) - sin(\frac{x}{3})$ est périodique et en donner une période.

Exercice 14. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions g et h par, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}.$$

Etudier la parité de g et de h. Exprimer f en fonction de g et h.

Exercice 15. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

1. f paire $\Longrightarrow f'$ impaire.
2. f impaire $\Longrightarrow f'$ paire.
3. f périodique $\Longrightarrow f'$ périodique.

Exercice 16. Chercher si les fonctions suivantes sont majorées, minorées et dire si elles admettent un maximum ou un minimum global sur E :

1. $E = \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$.
2. $E =]0, +\infty[$ et $f : x \longmapsto x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

Exercice 17. On définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions sh et ch par, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ et } \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

1. Etudier la parité de ch et sh.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.
3. Donner l'expression de $\text{ch}(a+b)$ et $\text{sh}(a+b)$ en fonction de $\text{ch}(a), \text{ch}(b), \text{sh}(a)$ et $\text{sh}(b)$ où a et b sont deux réels.
4. Donner l'ensemble de dérivabilité et la dérivée de sh et ch.
5. En déduire le sens de variation de sh puis de ch.
6. Sur un même graphe, tracer l'allure des courbes représentatives de ses deux fonctions. On fera attention à la position respective de chaque courbe.

   Les questions suivantes nécessitent d'avoir vu la définition d'application surjective et injective du chapitre sur les applications. Je laisse ces questions dans ce chapitre car elles concluent cet exercice que je vous conseille de reprendre une fois ces définitions apprises.

7. Montrer que la fonction sh est injective (sans utiliser de théorème). On pourra considérer deux réels x et x' tels que $\text{sh}(x) = \text{sh}(x')$ puis étudier $\text{sh}(x) - \text{sh}(x')$ en le factorisant du mieux de vos possibilités.
8. Montrer que sh est surjective sur $\mathbb{R}$.
9. Déterminer, pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'expression de $\text{sh}^{-1}(y)$.

10. Est-ce que ch est injective ? surjective sur $\mathbb{R}$? Bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$? Si elle est bijective, exhiber sa réciproque.

Exercice 18. Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes. On ne s'intéressera ni à l'ensemble de définition, ni à la dérivabilité des fonctions considérées.

1. $f(x,y) = 1 + xy + y^2 + 3x^3y^2$.
2. $f(x,y) = xy + \dfrac{2x}{y} + \dfrac{y}{3-x}$.
3. $f(x,y) = e^{1+xy+y^2}$.
4. $f(x,y) = xye^{1-xy}$.
5. $f(x,y) = \ln(x+y) + x^2$.
6. $f(x,y) = \ln(1+xy^2)$.
7. $f(x,y) = xe^{xy}$.
8. $f(x,y) = \dfrac{x^2}{1+y^2}$.
9. $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{1+x^2}$.
10. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{1+xy}$.

3. Déterminer des primitives

Exercice 19. Déterminer une primitive de chacune des fonctions suivantes après avoir précisé sur quel intervalle vous travaillez :

1. $x \longmapsto (x-1)\sqrt{x}$.
2. $x \longmapsto \dfrac{x+3}{x+1}$. On pourra poser $u = x+1$.
3. $x \longmapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}$. On pourra poser $u = e^x$.
4. $x \longmapsto x\ln(x)$
5. $u : x \longmapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$ et $v : x \longmapsto \dfrac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}$ toutes deux définies sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Peut-on étendre ce résultat à un autre ensemble que $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$?

Exercice 20. Déterminer toutes les primitives de chacune des fonctions suivantes et préciser sur quel intervalle vous travaillez :

1. $x \longmapsto x\sqrt{1+x}$. On pourra utiliser le changement de variables $u = x+1$.
2. $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x^2}$ sur l'intervalle $]-1,1[$

3. $x \longmapsto (2x-1)e^{3x}$.
4. $x \longmapsto x\sin(x)\cos(x)$.
5. $x \longmapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$.

Exercice 21. Soit f une fonction continue paire définie sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$ est impaire. On pourra utiliser le changement de variable $u = -t$.

7 Suites usuelles

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle arithmétique. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$.

1. Sachant que $u_{80} = 393$ et $u_{15} = 133$, calculer u_1 et S_{80}.
2. Sachant que $u_{15} = 143$ et $u_1 = 3$, calculer S_{15}.
3. Sachant que $u_1 = 5$, déterminer l'entier n tel que $u_n = -16$ et $S_n = -\dfrac{77}{2}$.

Exercice 2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$. On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. Si $u_0 = 1$ et $q = -3$, calculer la somme des 25 premiers termes, c'est-à-dire S_{24}.
2. Si $u_1 = 12$ et $q = -\dfrac{1}{2}$, calculer S_{15}.
3. Si $u_1 = 2$ et $u_4 = 54$, calculer q et S_4.

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{4u_n}$.

1. Montrer que cette suite est bien définie (c'est-à-dire que l'on peut bien calculer tous les u_n) et strictement positive.
2. Calculer les 5 premiers termes de la suite, et donner les résultats sous la forme d'une puissance de 2.
3. On pose $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$. Justifier que l'on définit bien une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi. Déterminer sa nature et en déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. Exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4. Pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, exprimer u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et déterminer leur limite respective.

1. $u_0 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n - 5$.
2. $u_1 = 1$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = -2u_n + 1$.
3. $u_2 = 2$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 3$.

Exercice 5. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $5u_{n+1} = u_n + 8$. Déterminer l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

1. Montrer que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$.

2. Réciproquement, montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{u_{n+1} + u_{n-1}}{2}$, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique.

Exercice 7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont aucun de ses termes n'est nul. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}.$$

Exercice 8. On considère la suite définie par $u_0 = \lambda$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - n - 2$. (1)

1. Déterminer une suite arithmétique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence (1).

2. On pose $v_n = u_n - w_n$; démontrer que la suite (v_n) est géométrique et préciser sa raison.

3. Exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3 - u_n}$

1. Démontrer que la suite u est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n < 0$.

2. Considérons la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$

   a. Justifier que que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
   b. Démontrez que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
   c. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 10. Pour les suites suivantes, exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

1. $u_0 = 1$, $u_1 = -1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $2u_{n+2} + 3u_{n+1} - 2u_n = 0$.

2. $u_0 = 0$, $u_1 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.

3. $u_0 = -1$, $u_1 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $3u_{n+2} - 7u_{n+1} = -2u_n$.

4. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = -4u_n$.

5. $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

6. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+2} - 4u_{n+1} = -4u_n + 1$. Pour ce dernier, on pourra chercher quelle limite ℓ est possible et étudier la suite $(u_n - \ell)$.

Exercice 11. Soient et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = e$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+2} = u_{n+1}u_n^2$. Exprimer u_n en fonction de n (et calculer la limite de la suite (u_n) si vous savez déjà faire).

Exercice 12. On se propose d'étudier un exemple de suite récurrente linéaire d'ordre 3 à l'aide d'une suite auxiliaire. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = u_1 = 0$ et $u_2 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n$$

1. Calculer u_3, u_4 et u_5.
2. Rédiger une fonction python permettant de calculer le terme u_n de cette suite pour $n \geqslant 3$.
3. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$.
   Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} = 3v_{n+1} - 2v_n$.
4. En déduire une expression explicite de v_n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$.
6. En déduire une expression explicite pour u_n
   (On pourra ajouter des égalités déduites de la question précédente concernant $u_{k+1} - u_k$ pour k allant de 0 à $n-1$ et le calculer de deux façons différentes. Autrement dit calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k$ de deux façons différentes.).

Exercice 13. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = 2$, $v_0 = -3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_{n+1} = & -u_n - v_n \\ v_{n+1} = & \dfrac{4}{3}u_n + \dfrac{5}{3}v_n. \end{cases}$$

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie une récurrence linéaire d'ordre 2.
2. En déduire une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer une expression de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

8 Systèmes linéaires

Exercice 1. Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} 2x + 3y &= 1 \\ 5x + 7y &= 3 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - 2y &= 5 \\ -6x + 3y &= 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 2x + 3y &= 3 \\ x - 2y &= 5 \\ 2x + y &= 1 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 2x + 4y &= 10 \\ 3x + 6y &= 15 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x+y-3z &= -1 \\ 3x-2y+2z &= 5 \\ 5x-3y-z &= 4 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x+3y-2z &= 3 \\ 2x+3y+8z &= 13 \\ 4x-y+4z &= 7 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x+2y+3z &= 3 \\ 2x+3y+8z &= 1 \\ 3x+2y+17z &= 1 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x-3y-z &= 1 \\ x+y+2z &= 3 \\ x+2y+3z &= 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} x+2y-3z+2t &= 2 \\ 2x+5y-8z+6t &= 5 \\ 3x+4y-5z+2t &= 4 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x+y-z &= 1 \\ 2x+3y+\alpha z &= 3 \\ x+\alpha y+3z &= 2 \end{cases}$ avec α réel.

Exercice 2. Pour quelle(s) valeur(s) de λ les systèmes suivants ont-ils une infinité de solutions ? Déterminer les ensembles solutions dans ce cas.

$$(\mathcal{S}_1)\begin{cases} (2-\lambda)x & +4y & = 0 \\ x & +(-1-\lambda)y & = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_2)\begin{cases} (1-\lambda)x & +y & = 0 \\ & (1-\lambda)y & = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_3)\begin{cases} (5-\lambda)x & -6y & = 0 \\ 3x & +(-6-\lambda)y & = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_4)\begin{cases} (1-\lambda)x & & +2z & = 0 \\ & (1-\lambda)y & & = 0 \\ x & +y & -\lambda z & = 0 \end{cases}$$

$$(\mathcal{S}_5)\begin{cases} (1-\lambda)x & -2y & +2z & = 0 \\ -2x & +(1-\lambda)y & +2z & = 0 \\ -2x & -2y & +(5-\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

9 Équations différentielles

1. Premier ordre

Exercice 1. 1. Résoudre l'équation d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) - 3y(x) = 0$ avec $y(0) = -2$.

2. Résoudre l'équation d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) + 2y(x) = 6$ avec $y(0) = 0$.

3. Résoudre l'équation d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x)+y(x) = 4e^x$ avec $y(0) = -2$.

4. Résoudre l'équation d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(]-1,+\infty[)$, $\forall x \in]-1,+\infty[$, $(1+x)y'(x) + xy(x) = 0$ avec $y(0) = 2$.

5. Résoudre l'équation d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(]-2,+\infty[)$, $\forall x \in]-2,+\infty[$, $(2+x)y'(x)+y(x) = 1$ avec $y(0) = 2$.

Exercice 2. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) - 2y(x) = (x-1)e^{2x}$.

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) + 2y(x) = x^2 - 2x + 3$.

Exercice 3. La vitesse de dissolution d'un comprimé est proportionnelle à la quantité restante dans l'eau. On place un comprimé de 20g dans l'eau et au bout de 5 minutes il en reste 10g. Au bout de combien de temps ne restera-t-il que 1g ?

Exercice 4. Le taux d'accroissement d'une bactérie est proportionnel à la quantité de bactéries présentes. La quantité double au bout de 50 heures. Au bout de combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, on ait :

$$xf'(x) + 2f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

Pour les exercices suivants, nous sommes aux limites du programmes de BCPST : résoudre des équations en découpant l'intervalle sur lequel on travaille pour pouvoir appliquer les théorèmes puis essayer de voir ce qui marche en recollant l'intervalle ne figure pas au programme, mais ça ne demande pas de connaissance supplémentaire particulière et il est arrivé que ça tombe. En résumé, il n'est pas forcément très utile d'approfondir le sujet, mais avoir déjà croisé le cas est rassurant.

Exercice 6. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(x+1)y' = y$ d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Exercice 7. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $xy' - 2y = x^2$ d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Résoudre (E) sur $\mathbb{R}_-^*$.

3. En déduire les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8. On cherche à résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E) : $(1-x^2)y' - xy = 0$ d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

1. Résoudre (E) sur $]-\infty,-1[$.
2. Résoudre (E) sur $]-1,1[$.
3. Résoudre (E) sur $]1,+\infty[$.
4. En déduire les solutions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ telles que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$3\int_0^x f(t)dt = 2xf(x).$$

Exercice 10. 1. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $y' = -3y^2$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ qui ne s'annule pas et vérifie $y(0) = 2$. On utilisera la méthode de séparation des variables.

2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+$ l'équation $y' + 2y^2 = 0$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ qui ne s'annule pas et vérifie $y(0) = 1$.

Exercice 11. On considère l'équation $y' = y\left(1 - \dfrac{y}{K}\right)$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ qui ne s'annule pas et vérifie $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 < y(t) < K$ et $y(0) = \dfrac{K}{2}$.
Quelle est la fonction recherchée ? On posera, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ et on cherchera une équation différentielle linéaire du premier ordre suivie par z.

Exercice 12. On note $y(t)$ la taille (en mm, t s'exprime en mois) d'une tumeur bénigne. [1]
On a mesuré que, sans soin, la taille de la tumeur suit l'équation différentielle $y' = y\ln\left(\dfrac{1}{2y}\right)$ $(\mathcal{E}_1)$. Si on la traite, elle suit l'équation $y' = y - 2y^2$ $(\mathcal{E}_2)$.
Au temps $t = 0$, on a $y(0) = \dfrac{1}{8}$.

1. Résoudre $(\mathcal{E}_1)$. On supposera que y ne s'annule pas et ne vaut jamais $\dfrac{1}{2}$. On utilisera la méthode de séparation des variables et on essaiera de reconnaitre une dérivée de composition.
2. Et résoudre $(\mathcal{E}_2)$. On posera, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $z(t) = \dfrac{1}{y(t)}$ et on cherchera une équation différentielle linéaire du premier ordre suivie par z.
3. Est-ce que le traitement à une influence sur la taille finale de la tumeur ?
4. Il est bon d'enlever la tumeur avant qu'elle ait doublé sa taille. Combien de temps a-t-on pour le faire sans traitement ? Avec traitement ? Combien de temps nous fait gagner le traitement ? On comparera les deux modèles. Quel est le plus prudent ?

2. Second ordre

Exercice 13. 1. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y'(x) - 2y(x) = 10\cos(x)$$

avec $y(0) = -3$ et $y'(0) = 4$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

1. Merci à Wikipedia pour m'avoir donné cette idée d'exercice en m'apprenant que cette équation différentielle pouvait servir à modéliser la croissance des tumeurs. Le cadre a été simplifié. Toutes mes excuses pour le contexte peu joyeux.

2. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 4y'(x) + 4y(x) = 4e^{-2x}$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2e^{-2x}$ où $a \in \mathbb{R}$.

3. On considère l'équation différentielle d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + 2y'(x) + 2y(x) = 2x^2 + 6x + 6$$

avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 2$. On cherchera une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 14. On souhaite résoudre l'équation $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x)+y(x) = \cos(x)+\sin(2x)$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 0$
2. Déterminer une solution particulière de $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x)+y(x) = \cos(x)$ sous la forme $f(x) = \lambda x \sin(x)$.
3. Déterminer une solution particulière de $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \sin(2x)$ sous la forme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \lambda \cos(2x) + \mu \sin(2x)$.
4. En déduire les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = \cos(x) + \sin(2x)$.

Exercice 15. On souhaite résoudre l'équation $y''+2y'-3y = \sin(2x)+e^x+e^{4x}$ d'inconnue $y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer λ et μ pour que $f(x) = \lambda \cos(2x)+\mu \sin(2x)$ soit une solution particulière de $y'' + 2y' - 3y = \sin(2x)$.
2. Déterminer ν pour que $g(x) = \nu x e^x$ soit solution de $y'' + 2y' - 3y = e^x$.
3. Déterminer α pour que $h(x) = \alpha e^{4x}$ soit solution de $y'' + 2y' - 3y = e^{4x}$.
4. En déduire les solutions $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ de $y'' + 2y' - 3y = \sin(2x) + e^x + e^{4x}$.

Exercice 16. Déterminer toutes les fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ telles que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$.

Exercice 17. 1. Résoudre l'équation différentielle d'inconnue z une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$: $z'' - z = 0$.

2. Résoudre alors l'équation différentielle d'ordre 4 d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^4(\mathbb{R})$:

$$y^{(4)} - 2y'' + y = 0.$$

On pourra se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre deux dont on cherchera une solution particulière sous la forme : $x \longmapsto axe^x + bxe^{-x}$.

3. Autres équations, pour s'entrainer

Exercice 18 (Equations homogènes)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

1. $y' - 3y = 0$ avec $y(0) = 2$.
2. $3y' - 4y = 0$ avec $y(0) = -1$.
3. $y' = 3y$ avec $y(3) = e^3$.
4. $y' = \dfrac{5}{7}y$ sans condition initiale.

Exercice 19 (Equations non homogènes)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$:

1. $y' - 2y = 1$ avec $y(0) = 2$.
2. $y' - 4y = -3$ avec $y(0) = 2$.
3. $3y' - 4y = 3$ avec $y(0) = -1$.
4. $y' = 2y - 3$.
5. $y' = 3y + 2$ avec $y'(0) = 1$
6. $y' = \dfrac{3}{4}y + 3$
7. $y' - 4y = e^x$ avec $y(0) = 2$.
8. $3y' - 4y = x$ avec $y(0) = -1$.
9. $y' = 2y + e^{2x}$.
10. $y' = 3y + x^2$.
11. $y' = \dfrac{3}{4}y + \cos(x)$ sans condition initiale.

Exercice 20. Résoudre les équations différentielles suivantes d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^1(I)$ où I est l'intervalle précisé :

1. $\forall x \in I = \mathbb{R}$, $y'(x) + e^x y(x) = 0$.
2. $\forall x \in I = \mathbb{R}$, $(1 + x^2)y'(x) - 2xy(x) = x$.
3. $\forall x \in I =]-2, +\infty[$, $(2 + x)y'(x) = 2 - y(x)$.
4. $\forall x \in I =]-1, +\infty[$, $(1 + x)y'(x) + y(x) = (1 + x)\sin(x)$.

Exercice 21 (Equations homogènes)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

1. $y'' + y' - 2y = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 0$.
2. $y'' - 2y' - 3y = 0$.
3. $6y'' + y' - y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
4. $y'' - y' = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.

5. $y'' - 2y' + y = 0$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
6. $y'' - y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.
7. $y'' + y' = y$.
8. $y'' - y' + y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
9. $y'' - 4y' + 4y = 0$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
10. $y'' + y = 0$ avec y impaire et $y'(0) = 1$.
11. $\sqrt{2}y'' + 2y' + \sqrt{2}y = 0$.

Exercice 22 (Equations non homogènes)**.** Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$ d'inconnue y une fonction $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$:

1. $y'' + y' - 2y = 1$.
2. $y'' - y' + 2y = -1$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.
3. $y'' - \sqrt{2}y' + y = 1$.
4. $y'' - y' + y = -1$ avec $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
5. $y'' - y' + 2y = e^x$. On cherchera une solution particulière sous la forme $x \mapsto \lambda e^x$.
6. $y'' - \sqrt{2}y' + y = x^2$. On cherchera une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2.
7. $y'' - y' + y = \cos(3x)$. On cherchera une solution particulière sous la forme $f(x) = \lambda\cos(3x) + \mu\sin(3x)$.

10 Matrices

Exercice 1. Considérons les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer les matrices suivantes :
   a. $K = 2A + 3B - C$.
   b. $L = 3(A - 2B) + 2(3B + C) - (2A + C)$.
   c. $M = (A - 2(C + A - B)) + (4A - 3C) - (2B - 5C - 3A)$.
   d. $N = (5A - 3C + 2(2B - 3A + 4C)) + (A - 4B - 5C)$.
   e. $P = 3C - 2A + B$.

2. Calculer les produits suivants lorsque c'est possible : AB, BA, AD, AE, EA, ED, DE et EBD.

3. Résoudre dans $M_3(\mathbb{R})$ les équations d'inconnue X suivantes :

   a. $A - 2X = B$.
   b. $2A + 3(X - B) - C = 5(X + C) - 3B$.

4. Résoudre dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les systèmes suivants :

   a. $\left\{\begin{array}{ccc} X - Y & = & F \\ 2X + Y & = & G. \end{array}\right.$

   b. $\left\{\begin{array}{ccc} X - Y + Z & = & ED \\ X + Y + 2Z & = & H \\ X + 2Y - Z & = & G. \end{array}\right.$

Exercice 2. Considérons les matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que, si une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ s'écrit comme combinaison linéaire de A et B (c'est-à-dire qu'il existe a et b réels tels que $M = aA + bB$), alors a et b sont uniques.

2. Montrer que $M = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de A et B si et seulement si $x = t = y + z$.

Exercice 3. Soit $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^n.

Exercice 4. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ dans les cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$. Le découpage astucieux est d'exprimer A en tant que combinaison linéaire de I_2 et de $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = A - 3I_3$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \frac{3^{n-1}}{2}(3^n - 1)B + 3^n I_3$. Il pourra être utile de calculer B^2, puis B^k pour $k \in \mathbb{N}^*$ (mais pas forcément : ça dépend de la preuve que vous choisirez de faire).

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$. On note $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ -a & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Est-ce que A est inversible ?
2. Calculer A^2, A^3.
3. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 (Même genre que le précédent)**.** Soit $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -9 & 4 & 4 \end{pmatrix}$.

1. A est-elle inversible ?
2. Calculer A^2 et A^3.
3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8. 1. Considérons la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire que A n'est pas inversible.

3. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 2A^2 - 5A + 10I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $d \in \mathbb{N}$. Soient A une matrice carrée de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i X^i$ un polynôme tel que $P(A) = 0$. Montrer que si $\alpha_0 \neq 0$ alors A est inversible et donner son inverse.

Exercice 9. Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & \frac{1}{2} \\ -2 & 2 & \frac{1}{2} \\ -2 & 1 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse.
   b. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$. Que remarque-t-on ?
   c. Exprimer A en fonction de P, P^{-1} et D.
   d. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $A^n = PD^nP^{-1}$.

2. On dit qu'une suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ converge si les suites de chaque coefficient de M_n convergent. La matrice des limites obtenue est dite la matrice limite de la suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   a. Calculer A^n.
   b. La suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ? Si oui, en donner la limite.

Exercice 10. Déterminer les inverses des matrices suivantes, s'ils existent.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -6 & -16 \end{pmatrix}.$$

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$C=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & -15 \end{pmatrix}.$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$F=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$G=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$H=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 11. Pour chacune des matrices suivantes, déterminer les valeurs du paramètre λ pour lesquelles la matrice n'est pas inversible.

1. $A_\lambda = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 & 2 \\ 3 & -2-\lambda & 3 \\ 2 & -2 & 3-\lambda \end{pmatrix}.$

2. $B_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -7 \\ 2 & 3-\lambda & -8 \\ 2 & 2 & -7-\lambda \end{pmatrix}.$

3. $C_\lambda = \begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -4 & 5-\lambda & -2 \\ -6 & 6 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$

Exercice 12. Soit n un entier naturel non nul.
Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (la somme des coefficients diagonaux) la trace de A.

1. a. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Tr(A+B) = Tr(A)+Tr(B)$.
   b. Montrer que pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$.

2. Montrer que pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Tr(AB) = Tr(BA)$.

3. En déduire qu'il n'existe pas de couple de matrices A et B appartenants à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $AB - BA = I_n$.

Exercice 13. On note $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. On se propose de calculer les puissances de A de deux façons différentes.

1. 1ère méthode.

   a. Exprimer A comme combinaison linéaire de I et de $N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

   b. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. 2ème méthode

   a. Exprimer A^2 comme une combinaison linéaire de A et I.

   b. En déduire qu'il existe deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = u_n A + v_n I.$$

   Pour cela, on pourra exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_n et faire de même pour v_{n+1}.

   c. Exprimer u_n et v_n en fonction de n.

   d. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

11 Suites réelles

Exercice 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite telle que $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{12 + u_n}$.

1. Montrer que cette suite est bien définie (c'est-à-dire que l'on peut bien calculer tous les u_n).

2. Etudier son sens de variation. On pourra commencer par calculer u_1, u_2, u_3.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 4$.

4. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 2. Etudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme u_0 et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - e^{-u_n}$ (sens de variation et limite éventuelle).

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 \in [0, 12]$ et $u_{n+1} = \sqrt{12 - u_n}$.

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 12]$.

2. En supposant que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ, déterminer ℓ.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3} |u_n - \ell|$.

4. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{3^n} |u_0 - \ell|$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2(u_n + 5)}{3(u_n + 1)}.$$

1. Dresser le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{2(x + 5)}{3(x + 1)}.$$

2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left[\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right]$.
3. Déterminer la seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{3}{5}\,|u_n - \ell|$$

   où ℓ est la seule limite possible trouvée à la question précédente.

   En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$|u_n - \ell| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} |u_1 - \ell|\,,$$

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
5. Retrouver graphiquement ce résultat.

Exercice 5. Donner le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - u_n^2$ et étudier sa convergence. On discutera selon les valeurs de u_0.

Exercice 6. Donner le sens de variation de la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n(1 + u_n)$ et étudier sa convergence. On discutera selon les valeurs de u_0.

Exercice 7. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_0 < v_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad ; \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}.$$

1. Exprimer $u_{n+1} - v_{n+1}$ en fonction $u_n - v_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n$.
2. Exprimer u_n et v_n en fonction de n, u_0 et v_0.
3. Déterminer la limite de chaque suite.

Exercice 8. Déterminer les équivalents simples des suites dont le terme général est donné ci-dessous et en déduire leur limite éventuelle :

1. $\dfrac{n}{n^3 + 1}$.
2. $\dfrac{5n^2 + 1}{n^3}$.

3. $\dfrac{n^7+n^3+1}{n^6+n^2-12}$.

4. $\dfrac{n^4+1}{3n^4+n^3+12n^2-72n+1}$.

5. $\dfrac{e^{-n}+n}{n^2}$.

6. $\dfrac{e^n+n}{n+\ln(n)}$.

Exercice 9. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme général est donné ci-dessous sont-elles équivalentes lorsque n tend vers $+\infty$?

1. $u_n = n^2-2n+1$ et $v_n = 2n^3$.

2. $u_n = n^4+3n^3-2n+1$ et $v_n = n^4+n$.

3. $u_n = n^2-2n+1$ et $v_n = 2n^2-3n+2$.

4. $u_n = n^5-3n^3$ et $v_n = n^4$.

Exercice 10 (Constante d'Euler, un classique)**.** Soient $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ deux suites réelles définies pour tout $n\geqslant 2$ par

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)-\ln(n) \text{ et } v_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)-\ln(n).$$

1. Montrer que pour tout $x\in]-1;+\infty[$, on a $\ln(1+x)\leqslant x$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\geqslant 2}$ et $(v_n)_{n\geqslant 2}$ sont deux suites adjacentes.

3. En déduire que $(v_n)_{n\geqslant 2}$ converge vers une limite que nous noterons γ.

4. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\sim\ln(n)$.

5. En montrant que $\forall n\geqslant 2$, $u_n\leqslant\gamma\leqslant v_n$ écrire une fonction `gamma(eps)` qui renvoie la valeur de γ à `eps` près.

Le nombre γ est appelé constante d'Euler.

Exercice 11. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)-2\sqrt{n+1}$$

et

$$v_n = \left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{p}}\right)-2\sqrt{n}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes. On notera ℓ leur limite commune.

2. Vérifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $|u_n-\ell|\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3. Ecrire un programme en Python qui donne une valeur approchée de ℓ à 10^{-2} près.

4. Déterminer un équivalent de $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ en $+\infty$.

Exercice 12. Soient a et b deux réels strictement positifs avec $a < b$. On pose $u_0 = a$, $v_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{2}{u_{n+1}} = \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}$ et $v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$ et $a \leqslant v_n \leqslant b$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et v_n.
3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ et $u_n \leqslant v_n$.
4. En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}$.
5. Montrer que ces deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 13. Soient $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ avec $a < b$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$ et $a \leqslant v_n \leqslant b$.
2. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$ et $u_n \leqslant v_n$.
3. En déduire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \frac{b-a}{2^n}$.
4. Montrer que ces deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite.

Exercice 14. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue en posant $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n}$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et montrer qu'elle est minorée par 1.
2. Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite
4. Calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, en déduire une conjecture sur la valeur de u_n en fonction de n. Retrouver les résultats précédents.

Exercice 15. Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \geqslant 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout n, $u_n \geqslant 1$.
2. Déterminer le sens de variation de (u_n).
3. Prouver que la suite (u_n) ne converge pas. En déduire $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice 16. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle définie par $u_0 = 0$, $u_1 = \frac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+2} = \frac{1}{3}(1 + u_{n+1} + u_n^3).$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.
2. Etudier le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

On donne $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \simeq 0,618...$

Exercice 17 (Pour s'entrainer à manipuler la définition de limite)**.** On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\ell \in \mathbb{N}$. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la définition de limite en choisissant ε avec pertinence.
2. En déduire qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall n \geqslant n_0$, $u_n = \ell$. On pourra ici encore utiliser la définition de limite avec un ε bien choisi.
3. Conclure.

12 Polynômes

1. Factorisation de polynômes

Exercice 1. Résoudre les équations suivantes d'inconnues x réel :

1. $2x^2 - 24 = 8x$.
2. $2x^2 + (6-2\sqrt{3})x = 6\sqrt{3}$.
3. $7x^2 - 12x + 1 = 0$.
4. $3x^2 + 6x - 8 = x^2 - x + 1$.
5. $x^2 - (2-m)x + 1 = 0$ avec m réel.
6. $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$.

Exercice 2. Factorisez les polynômes suivants au mieux de vos possibilités :

1. $P = X^3 - 2X^2 + X - 2$
2. $P = X^4 - X^3 - X + 1$
3. $P = 2X^3 + 8X^2 - 14X - 20$
4. $P = 2X^3 - 3X^2 + 1$.
5. $P = X^4 - X^3 - 3X^2 + X + 2$
6. $P = 3X^4 + X^3 - 9X^2 - 9X - 2$.
7. $P = 2X^4 + 21X^3 + 50X^2 - 3X - 70$.
8. $P = 6X^3 - 5X^2 - 3X + 2$.
9. $P = X^4 - 4X^3 + 4X^2 + X - 2$
10. $P = 3X^4 + 3X^3 - 3X - 3$
11. $P = 2X^3 + 6X^2 + 3X - 2$

12. $P = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.
13. $P = 2X^4 - 18X^2 + 8X + 24$.
14. $P = X^3 - 8$.
15. $P = 27X^3 - 1$.
16. $P = mX^3 + (1-m)X + 1$ en discutant selon les valeurs de m.

Exercice 3. Etudier le signe des polynômes suivants :

1. $4X^2 + 33X - 27$.
2. $X^2 + (4-\sqrt{2})X - 4\sqrt{2}$.
3. $X^3 + 2X^2 - 7X + 4$.

Exercice 4. Montrez que les polynômes suivants peuvent s'exprimer comme le carré d'un polynôme à déterminer.

1. $P = X^4 + 4X^3 + 12X^2 + 16X + 16$.
2. $Q = X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.
3. $R = X^6 + 2X^5 + 3X^4 + 4X^3 + 3X^2 + 2X + 1$.

2. Exercices plus théoriques

Exercice 5. Soient a, b, c trois réels distincts. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ défini par la relation suivante :

$$P(X) = a\frac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + b\frac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + c\frac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}.$$

1. Soit Q défini par $Q(X) = P(X) - X$. Calculer $Q(a)$, $Q(b)$ et $Q(c)$.
2. Quel peut être le degré maximal de Q ? En déduire une expression simple de Q puis de P.
3. Soient $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{K}^3$. Pouvez-vous donner un polynôme R de degré inférieur ou égal à 2 tel que $R(a) = \alpha, R(b) = \beta$ et $R(c) = \gamma$? Existe-t-il beaucoup de polynômes qui conviennent ?

Exercice 6. On considère la suite de polynômes (P_n) définie par :

$$P_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ P_n = 1 + \frac{X}{1!} + \cdots + \frac{X(X+1) \times \cdots \times (X+n-1)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\prod_{i=0}^{k-1}(X+i)}{k!}$$

1. Écrire P_1, P_2, P_3 sous forme factorisée.
2. En déduire une factorisation de P_n en produits de facteurs irréductibles.

Exercice 7. 1. Déterminer les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(-X) = P(X)$ (c'est-à-dire $\forall\, x \in \mathbb{K},\ P(-x) = P(x)$)

2. Déterminer les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $P(-X) = -P(X)$ (c'est-à-dire $\forall\, x \in \mathbb{K},\ P(-x) = -P(x)$)

3. Déterminer les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que : $P(X+1) = P(X)$ (c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{K},\ P(x+1) = P(x)$)

4. Déterminer les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que : $P(0) = 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = P(1 - \cos(x))$

Exercice 8. Montrez qu'un polynôme non constant $P \in \mathbb{R}[X]$ ne peut être périodique (c'est-à-dire qu'il n'existe pas $T \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout x réel $P(x+T) = P(x)$).

13 Probabilités

1. Avec du dénombrement

Exercice 1. Une urne contient 9 boules numérotées de 1 à 9. On tire deux boules de cette urne. Calculer la probabilité d'obtenir deux numéros de même parité dans les différents cas suivants :

1. On tire les deux boules simultanément.

2. On tire une boule, on ne la remet pas, puis on tire la deuxième (tirage sans remise).

3. On tire une boule, on la remet, puis on tire la deuxième (tirage avec remise).

4. Commentez.

Exercice 2. On lance deux dés équilibrés, l'un après l'autre et on considère les événements suivants :
A : ≪ le premier dé donne un résultat pair ≫.
B : ≪ le deuxième dé donne un résultat impair ≫.
C : ≪ les deux dés donnent des résultats de même parité ≫.

1. Calculer $P(A \cap B \cap C)$ et $P(A)P(B)P(C)$.

2. Calculer $P(A \cap B)$ et $P(A)P(B)$.

3. De la même façon, calculer $P(A \cap C)$ et $P(A)P(C)$ puis $P(B \cap C)$ et $P(B)P(C)$.

4. Commentez.

Exercice 3. On tire successivement sans remise 4 jetons d'une boite qui en contient n, $n \geqslant 4$ numérotés de 1 à n. Quelle est la probabilité des événements suivants :

1. Le plus petit numéro tiré est 1.

2. Le plus petit numéro tiré est 2.

3. Le plus petit numéro est k, $k \in [\![1; n]\!]$.

4. Le plus grand numéro tiré est k.

5. Reprendre les deux dernières questions en supposant que l'on fait des tirages avec remise.

Exercice 4. Une urne contient n boules ($n \geqslant 16$). 10 boules sont rouges, $n - 10$ sont blanches. On tire simultanément et au hasard 10 boules.

1. Quelle est la probabilité p_n de l'événement : ≪ quatre boules exactement sont rouges ≫ ?

2. Pour quelle(s) valeur(s) de n p_n est-elle maximale ? On pourra s'aider d'une simulation informatique avant d'essayer de la trouver.

Exercice 5. Cinq boules numérotées de 1 à 5 sont réparties dans 3 urnes numérotés de 1 à 3. Chaque urne peut contenir entre 0 et 5 boules.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles ?
2. Quelle est la probabilité qu'une seule urne contienne toutes les boules ?
3. Quelle est la probabilité que deux urnes exactement contiennent toutes les boules ?
4. En déduire la probabilité qu'au moins une urne soit vide.
5. Retrouver cette probabilité directement en utilisant les événements U_i : « l'urne i est vide ».

Exercice 6 (Les allumettes de Banach)**.** Le mathématicien Stefan Banach[2] est un peu distrait. Il fume beaucoup et a dans ses poches deux boites de N allumettes chacune. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il en prend une au hasard dans l'une des boites sans jamais se souvenir de la quantité d'allumettes restantes.

1. Quelle est la probabilité que, lorsqu'il prend la dernière allumette d'une boite, l'autre boite en contienne encore k ?
2. Décidément distrait, il se rend compte qu'une boite est vide, non pas quand il prend la dernière allumette, mais quand il essaie d'en prendre une et qu'elle n'en contient plus. Quelle est alors la probabilité qu'il en reste k dans la deuxième boite ?

Exercice 7. Deux joueurs A et B jouent une partie en $2n$ manches indépendantes. La probabilité que A gagne une manche vaut $p \in]0;1[$, la probabilité que B gagne une manche vaut $q = 1 - p$. Le vainqueur est celui qui a gagné le plus de manches.

1. Quelle est la probabilité que la partie soit nulle ?
2. Quelle est la probabilité que A gagne la partie ? On laissera le résultat sous la forme d'une somme.
3. Montrer que $p > \dfrac{1}{2}$ si et seulement si la probabilité que A gagne la partie est strictement supérieure à la probabilité que B gagne la partie.

Exercice 8. En vue d'estimer la taille d'une population de N animaux, on effectue les opérations suivantes : on capture simultanément a animaux que l'on marque et que l'on relâche parmi les autres. Quelques temps plus tard, on capture n animaux et on observe que k d'entre eux sont marqués. On supposera N supérieur à $n + a$.

1. On veut calculer la probabilité $p(N)$ de tirer un échantillon de n animaux parmi lesquels k sont marqués.
   a. Déterminer le nombre d'échantillons de taille n.
   b. Déterminer le nombre d'échantillons de taille n contenant exactement k animaux marqués.

2. Mathématicien polonais célèbre né en 1892 et mort en 1945, dont le nom est associé à beaucoup d'objets et de théorèmes, tous très peu accessibles à votre niveau. Le nom de cet exercice provient d'une référence humoristique à son habitude faite par Hugo Steinhaus lors d'un discours en son honneur.

c. En déduire $p(N)$.

2. On veut déterminer la valeur de N qui rend cette probabilité maximale. On supposera $N \geqslant n + a$.

   a. Calculer, pour $N \geqslant 1$, $q(N) = \dfrac{p(N)}{p(N-1)}$.

   b. Etudier le signe de $q(N) - 1$.

   c. En déduire l'existence d'un N_0 qui maximise $p(N)$.

3. AN : On a marqué 200 vairons. On en capture 150 et parmi, il y en a 15 de marqués. A combien peut-on estimer la population de vairons ?

Exercice 9. Dix paires de chaussures différentes sont rangées dans un placard. On prend au hasard quatre chaussures parmi les vingt. Quelle est la probabilité :

1. d'obtenir deux paires de chaussures ?

2. d'obtenir au moins une paire de chaussures ?

3. d'obtenir exactement une paire de chaussures ?

2. Sans dénombrement

Exercice 10. Deux tireurs A et B visent une même cible. Quand ils tirent ensemble, la probabilité de l'événement ≪ la cible est atteinte ≫ vaut $\dfrac{5}{8}$. A est deux fois plus habile que B. On suppose que les résultats obtenus par A et B sont indépendants.
A et B tirent en même temps. Quelle est la probabilité de l'événement ≪ A a atteint la cible ≫ ?

Exercice 11. Un laboratoire fabrique un alcootest et les essais montrent que :

- Sur 100 personnes controlées, 2 sont en état d'ébriété ;

- 90 fois sur 100, l'alcootest a donné un résultat positif alors que la personne contrôlée était en état d'ébriété ;

- 95 fois sur 100, l'alcootest a donné un résultat négatif alors que la personne n'était pas en état d'ébriété.

1. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est positif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en état d'ébriété ?

2. On essaie l'appareil sur une personne et on constate que le résultat est négatif. Quelle est la probabilité que cette personne soit en réalité en état d'ébriété ?

3. Quelle est la probabilité que le résultat soit faux ?

Exercice 12. On effectue n tirages (avec $n \geqslant 4$) avec remise dans une urne contenant 4 boules numérotées de 1 à 4. On note p_n la probabilité d'obtenir les quatre numéros au moins une fois au cours des n tirages. On définit pour $i \in [\![1;4]\!]$ A_i : ≪ la boule numéro i n'apparait pas au cours des n tirages ≫.

1. Calculer $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)$.

2. En déduire $p_n = 1 - 4\left(\dfrac{3}{4}\right)^n + 6\left(\dfrac{1}{2}\right)^n - 4\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$.

3. Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Commentez.

Exercice 13. On a 5 pièces, 4 pièces normales équilibrées et une pièce truquée ne contenant que des faces. On choisit une pièce au hasard uniforménent et on joue à pile ou face un certain nombre de fois avec cette pièce.

1. Quelle est la probabilité de faire face au premier lancer ?

2. Sachant qu'on a obtenu face, quelle est la probabilité d'avoir utilisé la pièce truquée.

3. Quelle est la probabilité p_n d'avoir joué avec la pièce truquée sachant qu'on a obtenu n faces aux n premiers lancers ?

4. Calculer $\lim_{n \to +\infty} p_n$. Qu'en pensez-vous ?

5. A partir de quel valeur de n la probabilité d'avoir utilisé la pièce truquée sachant qu'on a obtenu successivement n faces est-elle supérieure à $0,95$? Interpréter.

Exercice 14. On dispose de deux pièces, la pièce A donne face avec la probabilité $\frac{1}{2}$, la pièce B avec la probabilité $\frac{2}{3}$. On choisit une pièce au hasard uniformément. On la lance. Si l'on obtient face, on conserve la pièce que l'on vient de lancer, sinon on change de pièce. On effectue ainsi une suite de lancers.

1. On note p_n la probabilité de jouer avec la pièce A au $n$ième lancer. Montrer que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite arithmético-géométrique. En déduire une expression de p_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. En déduire la probabilité d'obtenir face au $n$ème lancer.

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On lance une pièce qui amène pile avec une probabilité $a \in]0,1[$. On marque un point si on obtient pile et deux si on obtient face. On s'arrête lorsqu'on a marqué au moins n points. On note p_n la probabilité de terminer avec exactement n points.

1. Calculer p_1 et p_2.

2. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $p_{n+2} = ap_{n+1} + (1-a)p_n$.

3. En déduire une expression de p_n en fonction de n et de a.

Exercice 16. Un jeu entre deux joueurs A et B est divisé en parties indépendantes. A chaque partie, celui qui perd donne un euro au gagnant. La probabilité que A gagne une partie est $p \in]0;1[$, celle que B gagne une partie est $q = 1-p$. On s'arrête dès que l'un des deux joueurs n'a plus d'argent.
Notons $A_{k,n}$ l'événement « A perd le jeu entier alors qu'il avait k euros après n parties ». Soit k un entier naturel compris entre 0 et N, n un entier naturel quelconque, on note $u_k = P(A_{k,n})$, c'est-à-dire la probabilité que le joueur A perde le jeu entier alors qu'il possède k euros après n parties. On suppose que cette probabilité est indépendante de n, ce qui justifie la notation proposée.

1. Les joueurs A et B possèdent au total une somme de N euros. Le jeu s'arrête dès que l'un des deux joueurs est ruiné.

   a. Calculer u_0 et u_N.

b. Montrer que $u_k = u_{k+1}p + u_{k-1}q$ pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$.

c. Montrer que $u_k = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$ si $p \neq \dfrac{1}{2}$ et que $u_k = \dfrac{N-k}{N}$ si $p = \dfrac{1}{2}$.

d. Déduire de ce qui précède la probabilité v_k qu'a le joueur B, en partant de la somme d'argent $N-k$ de finir ruiné. Calculer $u_k + v_k$. Interpréter.

2. Le joueur B est infiniment riche et le joueur A dispose d'une somme k. Montrer que la probabilité que le joueur A se ruine est :

$$\begin{cases} 1 & \text{si } p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{q}{p}\right)^k & \text{si } p > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Commentez.

Exercice 17 (Un peu de réflexion)**.** 1. Le paradoxe de Monty Hall [3] : dans un jeu télévisé, on a le choix entre trois boites, deux sont vides et une contient une grosse somme d'argent (historiquement, il y avait trois portes, derrière deux des chèvres, et derrière la troisième une voiture). Le candidat choisit une boite, mais ne l'ouvre pas. A cet instant, le présentateur ouvre une des des boites restantes qui est vide, et il propose au candidat de garder sa boite et de l'ouvrir ou de l'échanger avec celle qui reste. Quelle est la meilleure stratégie à opérer ?

2. Alice, Bob et Claire sont en prison. Deux d'entre eux seront exécutés et un sera gracié. Alice demande au gardien de lui désigner un de ses deux compagnons de cellule qui sera exécuté. Le gardien désigne Bob. Sachant cela, quelle est la probabilité qu'Alice soit graciée ?

14 Limites et continuité

Exercice 1. En utilisant la définition de limite, démontrer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to -1} (x^2 + x + 1) = 1.$

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x-1}{x+1} = 2.$

3. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty.$

Exercice 2. Déterminer la limite des fonctions f suivantes en x_0. Il pourra être nécessaire de distinguer limite à gauche et limite à droite.

1. $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+1}$ en $x_0 = -1$, puis en $+\infty$.

2. $f(x) = \dfrac{x^3+1}{x^5+1}$ en $x_0 = -1$ puis en $+\infty$.

3. $f(x) = \dfrac{x-3}{\sqrt{x}-\sqrt{3}}$ en $x_0 = 3$ puis en $+\infty$.

3. Le problème de Monty Hall est un casse-tête probabiliste librement inspiré du jeu télévisé américain Let's Make a Deal. Il porte le nom de celui qui a présenté ce jeu aux États-Unis pendant treize ans, Monty Hall.

4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ en $x_0 = 3$ puis en $+\infty$.

5. $f(x) = \dfrac{x^2-16}{\sqrt{x-1}-\sqrt{3}}$ en $x_0 = 4$ puis en $+\infty$.

6. $\dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}}$ en $x_0 = 1$. Attention, la réponse est encombrante.

7. $f(x) = x\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ en $x_0 = 0$.

8. $f(x) = x - \ln(x)$ en $+\infty$.

9. $f(x) = \dfrac{e^x - x^2}{x^4+1}$ en $+\infty$.

10. $f(x) = x^{-x}$ en 0 puis en $+\infty$.

11. $f(x) = (x+2)^{-x}$ en $+\infty$.

12. $f(x) = 2^{-x^2+2}$ en $+\infty$.

Exercice 3. Calculer $\lim\limits_{x\to -1}\left(\dfrac{a}{x^2-1} - \dfrac{b}{x+1}\right)$ en discutant selon les valeurs de a et b.

Exercice 4. On fera très attention qu'il s'agit d'un exercice différent du suivant, même si techniquement c'est assez proche !

1. Montrer que la fonction f définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ xe^x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction g définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que la fonction h définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ x\ln(x) & \text{si } 0 < x \leqslant e \\ x & \text{si } x > e \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. On fera très attention qu'il s'agit d'un exercice différent du précédent, même si techniquement c'est assez proche !

1. On note f la fonction définie par, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1-\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Montrer que f est continue sur son ensemble de définition et prolonger-la par continuité en 1.

2. On note g la fonction définie par, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$, $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ Montrer que g est continue sur son ensemble de définition et prolonger-la par continuité en 0 et en 1.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application périodique (c'est-à-dire qu'il existe $T > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+T) = f(x)$) possédant une limite finie en $+\infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 7. Etudier la continuité des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition que vous déterminerez.

1. $f(x) = x^2 + 1$.
2. $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2-1}$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x^2+2x-3}$.
5. $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$.
6. $f(x) = x^2 - 2x + \ln(x+1)$.

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on étudie la suite de fonction (f_n) définies par :

$$\begin{cases} f_n(x) = 1 & \text{pour } x \in [0, 1-\frac{1}{n}], \\ f_n(x) = -nx + n & \text{pour } x \in]1-\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

1. Représenter f_1, f_2, f_3 et f_4 sur un même graphe.
2. Etudier la continuité de f_n sur $[0, 1]$.
3. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ a une limite qu'on notera $f(x)$, c'est-à-dire, on pose $f(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. Déterminer $f(x)$.
4. Etudier la continuité de f sur $[0, 1]$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, précisez sur quel ensemble elles sont continues et, si c'est possible, les prolonger par continuité.

1. $f(x) = \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+x^2-2x}$.
2. $f(x) = \dfrac{x-2+\sqrt{x^2-2x}}{x^2-4}$.
3. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2+\sqrt{x^2-2x}}$.
4. $f(x) = \dfrac{x^2-2|x|}{x}$.
5. $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-8x+4}{x^2+x-6}$.

Exercice 10. Soient f et g deux fonctions définies sur l'intervalle I. On définit $\sup(f, g)$ et $\inf(f, g)$ par

$$\forall x \in I, \sup(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)) \text{ et } \inf(f,g)(x) = \min(f(x), g(x)).$$

1. Montrer que $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$.
2. En déduire que si f et g sont continues en x_0, alors il en est de même pour $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$.

Exercice 11. Trouver toutes les fonctions continues f définies sur $\mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, (f(x))^2 = 3f(x) - 2.$$

Exercice 12. Les fonctions suivantes sont-elles bornées sur I ?

1. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1}$ sur $I = \mathbb{R}_+$
2. $f(x) = \dfrac{e^x+1}{x}$ sur $I =]-\infty, -1]$.

Exercice 13. Les fonctions suivantes réalisent-elles des bijections sur I. Si oui, précisez l'ensemble de définition de leur réciproque.

1. $f(x) = x^3 + x + 1$ avec $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-1}$ sur $I =]1, +\infty[$? sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$?
3. $f(x) = x^2 + 2x - 1$ sur $I = [-2, 1]$?

Exercice 14. Soient a et b deux réels avec $a < b$. On note $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-a} + \dfrac{1}{x-b}$. Démontrer que f réalise une bijection de $]a, b[$ sur $\mathbb{R}$. Déterminer ensuite f^{-1}. Il pourra être utile de calculer $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$.

Exercice 15. Montrer que l'équation $x^{15} = x^{11} + 2$ admet au moins une solution réelle.

Exercice 16. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f([a,b]) \subset [a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = c$. Même question si on a $[a,b] \subset f([a,b])$.

Exercice 17. Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, et soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue bornée. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 18. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Supposons f bornée et g continue. Montrer que $f \circ g$ et $g \circ f$ sont bornées.

Exercice 19. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

1. Montrer que si f est périodique, elle est bornée.
2. Montrer que si f possède des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$, alors elle est bornée.
3. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, f admet une borne inférieure qui est atteinte.
4. Montrer que si f possède des limites finies en $+\infty$ et $-\infty$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, alors elle est bornée et sa borne supérieure ou inférieure est atteinte.

Exercice 20. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et injective. Montrer que f est strictement monotone.
On pourra raisonner par l'absurde et commencer par montrer que f n'est pas strictement monotone sur I alors il existe a, b, c trois éléments de I avec $a < b < c$ tels que $f(b) \geqslant \max(f(a), f(c))$ ou $f(b) \leqslant \min(f(a), f(c))$

15 Espaces vectoriels

Exercice 1. Déterminer si les sous-ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^3$ ou $\mathbb{K}^4$.

1. $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - 3z = 0\}$.
2. $B = \{(x + y, x - y, 2y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
3. $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y - z = 2\}$.
4. $D = \{(2x - 3y, x + 1, -x + 3y)/(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.
5. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 2x = y \text{ et } y = 3z\}$.
6. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - t = 0 \text{ et } x - 3y + 9z = 2\}$.
7. $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 - y^2 = 0\}$.
8. $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 0\}$.
9. $H' = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 / x^2 + y^2 = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$?

Exercice 2. Pour chaque question, on note E l'ensemble des triplets $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qui vérifient l'équation ou le système suivant. Lorsque c'est un sous-espace vectoriel, déterminer une base de E dans chacun des cas suivants :

1. $x + 2y = 0$.
2. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x - z &=& 0 \\ y + z &=& 0 \end{array}\right.$
3. $\left\{\begin{array}{rcl} x + 5y - 3z &=& 0 \\ -x - 4y + 2z &=& 0 \end{array}\right.$
4. $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y - 3z &=& 0 \\ 4x + 2y - 5z &=& 0 \end{array}\right.$
5. $\left\{\begin{array}{rcl} 4x - 2y + 6z &=& 0 \\ -2x + y - 3z &=& 0 \end{array}\right.$
6. $\left\{\begin{array}{rcl} 3x + 2y - 3z &=& 0 \\ -2x - 4y &=& 2 \end{array}\right.$
7. $\left\{\begin{array}{rcl} x - 3y - z &=& 0 \\ 2x - 5y + 2z &=& 0 \\ 3x - 7y + 5z &=& 0 \end{array}\right.$
8. $\left\{\begin{array}{rcl} x - 3y - z &=& 0 \\ 2x - 5y + 2z &=& 0 \\ 3x - 7y + 6z &=& 0 \end{array}\right.$

Exercice 3. Déterminer si les familles suivantes sont libres ou liées. Si elles sont liées, déterminer une famille libre qui engendre le même sous-espace vectoriel.

1. $\mathcal{F}_1 = \big((1, 0), (1, 1), (1, -1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.
2. $\mathcal{F}_2 = \big((1, 2, 3), (3, 4, 6), (9, 6, -12), (1, 1, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

3. $\mathcal{F}_3 = \big((1, i, 0), (0, i, 1), (0, i, 0)\big)$ de $\mathbb{C}^3$.

4. $\mathcal{F}_4 = \big((0, 1, i, 0), (0, i, 0, 1), (0, i, 0, 0)\big)$ de $\mathbb{C}^4$.

5. $\mathcal{F}_5 = \big((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 2)\big)$ de $\mathbb{R}^4$.

6. $\mathcal{F}_6 = \big((2, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

7. $\mathcal{F}_7 = \big((2, -3, -1), (1, 0, 1), (-8, 6, -2), (-1, 1, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Déterminer si les familles suivantes sont génératrices ou non. Si c'est le cas, en extraire une base.

1. $\mathcal{F}_1 = \big((1, 0), (1, 1), (1, -1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.

2. $\mathcal{F}_2 = \big((1, 1), (2, 1), (6, 1)\big)$ de $\mathbb{R}^2$.

3. $\mathcal{F}_3 = \big((1, i), (i, 1)\big)$ de $\mathbb{C}^2$.

4. $\mathcal{F}_4 = \big((1, 2, -3), (2, 2, 0), (1, 0, -3)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

5. $\mathcal{F}_5 = \big((0, 1, i, 0), (0, i, 0, 1), (0, i, 0, 0)\big)$ de $\mathbb{C}^4$.

6. $\mathcal{F}_6 = \big((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 1, 2)\big)$ de $\mathbb{R}^4$.

7. $\mathcal{F}_7 = \big((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

8. $\mathcal{F}_8 = \big((2, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

9. $\mathcal{F}_9 = \big((2, -3, -1), (1, 0, 1), (-8, 6, -2), (-1, 1, 0)\big)$ de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5. On considère les vecteurs $u = (3, -1)$ et $v = (1, 2)$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. Montrer que (u, v) est une base de $\mathbb{R}^2$.

2. Quelles sont les coordonnées de $x = (5, -2)$ dans cette nouvelle base ?

Exercice 6. Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$: $((3, 1), (-1, 2), (1, -1))$.

1. Quel est le rang de $\mathcal{F}$? Est-elle génératrice de $\mathbb{R}^2$?

2. Si on note $\mathcal{F}_1$ la famille obtenue en enlevant un vecteur à $\mathcal{F}$ (le premier par exemple), est-elle encore génératrice de $\mathbb{R}^2$?

3. $\mathcal{F}_1$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 7. On considère les vecteurs $u = (2, 5), v = (-3, 2)$ et $w = (3, 1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

1. La famille (u, v, w) est elle une base de $\mathbb{R}^2$?

2. Donner une base construite à partir de la famille (u, v, w).

3. Quelles sont les coordonnées de $x = (5, -2)$ dans cette nouvelle base ?

Exercice 8. On considère dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs $u = (1, 2, 3)$ et $v = (3, 2, 1)$.

1. La famille (u, v) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

2. Quel est le rang de la famille (u, v) ? La famille (u, v) est-elle une base de $F = \mathrm{Vect}(u, v)$?

3. Le vecteur $x = (1, 4, 7)$ appartient-il à F ? Si oui, quelles sont ses coordonnées dans la base (u, v) de F ?

4. Le vecteur $y = (-1, 6, 9)$ appartient-il à F ? Si oui, quelles sont ses coordonnées dans la base (u, v) de F ?

Exercice 9. Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs : $((-1, 2), (3, -8), (1, -1))$.

1. $\mathcal{F}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

2. La famille $\mathcal{G}$ constituée de $((13, 1))$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

3. Notons $\mathcal{G}_1$ la famille de vecteurs constituée par $\mathcal{G}$ et un vecteur de $\mathcal{F}$ (que vous choisirez). $\mathcal{G}_1$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}^2$?

4. Quel est le rang de $\mathcal{G}_1$?

5. $\mathcal{G}_1$ est-elle une base de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10. Plaçons-nous dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.

1. Montrer que la famille $((1, i, -1), (1, 0, -i), (0, i, i))$ est une base de $\mathbb{C}^3$.

2. Déterminer les coordonnées de $x = (0, 0, -1)$ dans cette base.

Exercice 11. Plaçons-nous dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$.

1. Déterminer le rang de la famille $((1, 1, 1), (i, 0, 0), (1 + i, 1, 1), (i, i, i))$.

2. Notons $F = \mathrm{Vect}\big((1, 1, 1), (i, 0, 0), (1 + i, 1, 1), (i, i, i)\big)$. Montrer que $((0, 1, 1), (1, 0, 0))$ est une base de F.

Exercice 12. Rappelons que $\mathbb{K}[X]$ est l'ensemble des polynômes à coefficients réels et que, pour $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{K}_k[X]$ constitue l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à k. On admettra que $\mathbb{K}[X]$ constitue un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. a. Montrer que $\mathbb{K}_2[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   b. Montrer que $(1, X, X^2)$ est une famille génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$ (presque évident).
   c. Montrer que $(1, X, X^2)$ est une famille libre de $\mathbb{K}_2[X]$.
   d. En déduire la dimension de $\mathbb{K}_2[X]$.
   e. Montrer que $(3, 1 - 2X, -2 + X - X^2)$ est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   f. Quel est le rang de la famille $\mathcal{G}$ constituée par les vecteurs $(3, X)$? Est-ce une famille libre ?
   g. Quel est l'espace vectoriel engendré par $\mathcal{G}$? En donner une base.
   h. Donnez une base de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(2, X^2, 1 + X^2) \cap \mathrm{Vect}(3, X)$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   a. Montrer que $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
   b. Montrer que $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
   c. En déduire $\dim(\mathbb{K}_n[X])$.

Dans tous les exercices suivants, on pourra se servir du fait que $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, qu'on appellera base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, ainsi que du fait que $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.

Exercice 13. On rappelle que pour tout $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. On note $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

   a. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   b. Montrer que $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
   c. En déduire $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$.

2. On note $E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$, 0 sinon. (autrement dit, $E_{k,\ell}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne k et colonne ℓ qui vaut 1).

   a. Montrer que $(E_{k,\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p}}$ forme une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
   b. En déduire $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

   Dans tous les exercices suivants, on pourra se servir du fait que $(E_{k,\ell})_{\substack{1 \leqslant k \leqslant n \\ 1 \leqslant \ell \leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ qu'on appellera base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, ainsi que du fait que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Exercice 14. Déterminer l'ensemble des réels k tel que la famille $((1,k,2),(-1,8,k),(1,2,1))$ soit une famille liée de vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 15. On considère les polynômes de $\mathbb{K}[X]$ suivants : $P = 1 + 2X - X^2$, $Q = 3 - X + 2X^2$, $R = 1 + 3X - X^2$ et $S = 2 - 2X + 3X^2$.
Déterminer $\mathrm{Vect}(P,Q) \cap \mathrm{Vect}(R,S)$.

Exercice 16. On note E et F deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ définis par :

$$E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) / y = -2z + t \right\}.$$

1. Rappeler pourquoi E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
2. Déterminer la dimension de E ainsi qu'un système d'équations cartésiennes décrivant E.
3. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ dont on donnera une base et sa dimension.
4. On pose $G = E \cap F$. Déterminer une base de G et sa dimension.

Exercice 17. On considère les vecteurs $u = (-4,4,3), v = (-3,2,1), s = (-1,2,2)$ et $t = (-1,6,7)$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathrm{Vect}(s,t)$.

Exercice 18. On considère les vecteurs $u = (1,2,-1), v = (3,-1,2), s = (1,3,-1)$ et $t = (2,-2,3)$ dans $\mathbb{R}^3$. Déterminer une base de $\mathrm{Vect}(u,v) \cap \mathrm{Vect}(s,t)$.

Exercice 19. On note E et F deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^4$ définis par :

$$E = \mathrm{Vect}\left((-1,2,1,0),(-1,2,0,1)\right) \text{ et } F = \left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / y = -2z + t\right\}.$$

1. Vérifier que E et F sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

2. Déterminer la dimension de E ainsi qu'un système d'équations cartésiennes de E.

3. Déterminer une base de F et sa dimension.

4. On pose $G = E \cap F$. Déterminer une base de G et sa dimension.

Exercice 20. On considère le sous-espace vectoriel E de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$E = \mathrm{Vect}\big((1,-1,3,-3),(2,-2,4,-4),(3,-3,7,-7),(1,-1,1,-1)\big).$$

1. Donner une base et la dimension de E.

2. Déterminer un système d'équations cartésiennes de E.

3. On note $F = \mathrm{Vect}\big((1,0,1,-1),(0,1,2,-2),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\big)$. Montrer que $E \subset F$.

Exercice 21. On note $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} / (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4 \right\}$.

1. On note $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{K})$. Calculer N^2, N^3 et N^4.

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ et donner une base de E.

3. Notons $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Quelle est la matrice représentative de la famille (I_4, M_1, M_2, M_3) où I_4 est la matrice identité de $\mathcal{M}_4(\mathbb{K})$ dans la base que vous venez de déterminer. En déduire le rang de cette famille.

4. Montrer que si A et B sont deux matrices de E, alors AB est aussi une matrice de E.

5. Soit $A \in E$. On note $F = \{B \in E / AB - BA = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}\}$. Déterminer F.

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \left\{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / M = M^\top \right\}$.
Rappelons si c'est nécessaire que $M^\top$ désigne la transposée de la matrice M, c'est-à-dire que si $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $M^\top = (m_{j,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

1. Montrer que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2. On note $E_{k,\ell} = (\delta_{i,k}\delta_{j,\ell})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\delta_{a,b} = 1$ si $a = b$, 0 sinon. (autrement dit, $E_{k,\ell}$ est la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en ligne k et colonne ℓ). On note ensuite $S_{k,\ell} = E_{k,\ell} + E_{\ell,k}$. Montrer que $(S_{k,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

3. En déduire $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}))$.

Exercice 23. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts. On note pour $j \in [\![0, n]\!]$,

$$L_j = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (X - a_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (a_j - a_k)}.$$

1. Montrer que $(L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

2. Déterminer les coordonnées de $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base.

3. En déduire la matrice représentative d'une famille de polynômes $(P_1, \ldots, P_p)$ où $p \in \mathbb{N}^*$ dans la base $(L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$.

Exercice 24. On se place dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. a, b, c désignent trois réels fixés.

1. Soit E le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = by + cz\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer sa dimension.

2. On note de même F et G les sous-espaces vectoriels de R^3 définis par $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / y = ax + cz\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / z = ax + by\}$. Montrer que $(E \subset F \cap G) \Longrightarrow (E = F = G)$. En déduire que $(E \subset F \cap G) \Longrightarrow (a = b = c = -1)$.

3. Montrer que si $2abc + ab + bc + ca \neq 1$ alors $E \cap F \cap G = \{(0, 0, 0)\}$

16 Dérivation

Exercice 1. Calculer la dérivée $n$ième des fonctions suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$).

1. $f(x) = \ln(x + 1)$.

2. $f(x) = \cos(x) - 3$.

Exercice 2. 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^5 - 5x + 2$. Combien f a de zéros ? On pourra étudier f pour répondre à cette question.

2. Montrer que $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 4$ a exactement deux racines réelles.

3. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = (x-1)e^x - ex + 1$. Combien de fois h s'annule-t-elle ?

Exercice 3. Soient sh et ch les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$. Notons en plus la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$.

1. Etudier sh : montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$, déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition, montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, en déduire son sens de variation et son signe (il pourra être judicieux de déterminer $sh(0)$).

2. Même question pour ch.

3. Tracer l'allure de ces deux courbes sur le même graphe (en déterminant avant leurs positions relatives) et en faisant figurer les tangentes horizontales (s'il y en a).

4. Etudier f : montrer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$ (attention en 0, on essaiera de voir f comme un taux d'accroissements bien choisi), déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition, montrer qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, en déduire son sens de variation.

5. Tracer l'allure de f.

Exercice 4. Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, On suppose qu'il existe $\alpha > 1$ et $K \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $(x, y) \in I^2$,

$$|f(y) - f(x)| \leqslant K |y - x|^\alpha .$$

Montrer que f est constante.

Exercice 5. Soit f définie par $f(x) = \sqrt{e^{2x} - 1}$.

1. Etudier f (définition, continuité, dérivation, limite aux bornes, sens de variation et allure de la courbe).

2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui même.

3. Calculer la dérivée de f^{-1}, f^{-1} étant la réciproque de f sans déterminer avant f^{-1}.

4. Calculer explicitement f^{-1} et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 6. Soit f définie par $f(x) = x + 2 + \sqrt{x^2 + 4}$.

1. Etudier f (définition, continuité, dérivation, sens de variation, limite aux bornes et allure de la courbe). On admettra $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$ (mais la preuve est dans la correction, en cas de relecture de cet exercice après le chapitre sur les développements limités)

2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle à déterminer.

3. Calculer la dérivée de f^{-1}, f^{-1} étant la réciproque de f sans déterminer avant f^{-1}.

   On pourra cependant remarquer que $\dfrac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} + \dfrac{2}{x + \sqrt{x^2 + 4}} = \sqrt{x^2 + 4}$.

4. Calculer explicitement f^{-1} et sa dérivée.

Exercice 7. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $]a, b[$ avec $a < b$ deux réels. Etudier la dérivabilité de $|f|$, en particulier aux points c tels que $f(c) = 0$. On pourra regarder si $f'(c)$ est nul ou non.

Exercice 8. Soient I un intervalle ouvert et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Montrer que si f s'annule n fois sur I, f' s'annule au moins $n - 1$ fois sur I.
Si f est $p - 1$ fois dérivable et s'annule p fois, que peut-on en déduire pour $f^{(p-1)}$?

Exercice 9. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que si toutes les racines de P sont réelles (comptées avec leur multiplicité), toutes celles de P' aussi.

Exercice 10. Soit $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a, +\infty[$, telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(a)$.
Montrer qu'il existe un point $c > a$ telle que $f'(c) = 0$.

Exercice 11 (Théorème de Darboux)**.** Soit f une application dérivable sur $[a,b]$ avec $f'(a) \neq f'(b)$. Montrer que quelque soit k strictement compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = k$.
On pourra poser $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - kx$.

Exercice 12. Soit f une fonction $\mathcal{C}^3([0,2],\mathbb{R})$ telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Montrer que pour tout $x \in [0,2]$, il existe $c \in]0,2[$ tel que $f(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{6} f'''(c)$.
On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - \dfrac{t(t-1)(t-2)}{6}\lambda$ en choisissant avec subtilité et finesse λ.

Exercice 13. On considère l'application $f :]-1,+\infty[\setminus\{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

1. Déterminer le sens de variation de f. On pourra introduire la fonction h définie sur $]-1,+\infty[$ telle que $f'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$ et l'étudier pour obtenir son signe.
2. Déterminer les limites de f en -1 et en $+\infty$.
3. f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? On notera aussi f son prolongement s'il est possible.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
6. Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]-1,+\infty[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. Justifier $\alpha \in]0,1[$.
7. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$. Montrer que, pour tout n entier naturel $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$.
8. Montrer que, pour tout entier naturel n, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
9. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
10. Ecrire une fonction en Python qui prend en argument un réel ε et renvoie une approximation à ε près de α. On se servira de l'inégalité démontrée à la question précédente.

Exercice 14. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$.

1. a. Montrer que f est paire.
   b. Etudier les variations de f, ses limites en $+\infty$ et $-\infty$ et tracer sa courbe représentative.
   c. Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.
   d. Montrer que pour tout réel x, $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$. On pourra faire une récurrence.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell|.$$

On pourra utiliser le théorème des accroissements finis.

c. En déduire $|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$.

d. En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

e. Ecrire une fonction Python qui prend en argument un réel positif `eps` et renvoie la valeur de ℓ à `eps` près.

17 Variables aléatoires

Exercice 1. On joue avec un dé pipé. La loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au numéro obtenu est donnée par le tableau suivant :

Valeur x_i de X	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	0,1	0,25	0,25	0,15	0,15	0,1

Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2. On lance un dé à quatre faces numérotées de 1 à 4. La probabilité de chacune des faces est proportionnelle au numéro qu'elle porte. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre obtenu.

1. Déterminer la loi de X.
2. Donner l'espérance de X.
3. Calculer la variance de X.
4. Déterminer $E\left[\frac{1}{X}\right]$.
5. Recommencer les questions précédentes en supposant que le dé possède n faces où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3. Une urne contient 7 boules blanches et 3 boules noires. On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à vider l'urne. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4. Une urne contient 4 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement sans remise et de façon uniforme des boules jusqu'à l'obtention de la première boule noire.

1. On note X le nombre de tentatives nécessaires. Loi, espérance et variance de X ?
2. On note Y le nombre de boules blanches obtenues. Loi, espérance et variance de Y ?

Exercice 5. Une urne contient 4 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement avec remise et de façon uniforme 5 boules.

1. On note X le nombre de boules blanches obtenues. Loi, espérance et variance de X ?

2. On note Y le nombre de boules noires obtenues. Loi, espérance et variance de Y ?

Exercice 6. Une urne contient 4 boules blanches et 4 boules noires. On tire successivement sans remise et de façon uniforme 5 boules.

1. On note X le nombre de boules blanches obtenues. Quelles sont la loi, l'espérance et la variance de X ?

2. On note Y le nombre de boules noires obtenues. Quelles sont la loi, l'espérance et la variance de Y ?

Exercice 7. Une urne contient $2n$ boules numérotées de 1 à $2n$.

1. On tire une boule uniformément. On note X_1 le numéro obtenu. Loi, espérance et variance de X_1 ?

2. On fixe $k \in [\![2, 2n]\!]$. On tire une boule. Si on obtient un numéro supérieur ou égal à k, on arrête ici. Si on obtient un numéro strictement inférieur à k, on la remet puis on tire une nouvelle fois. On note X_2 le numéro de la boule obtenue finalement (donc la première dans le premier cas, la deuxième dans le second). Déterminer la loi de X_2 et son espérance. Quelle valeur de k maximise l'espérance ?

Exercice 8. On considère une urne contenant initialement une boule blanche et une boule noire. On procède à l'expérience suivante : on effectue des tirages successifs d'une boule de cette urne et à chaque pas du tirage on replace la boule tirée dans l'urne et on rajoute une boule de la même couleur. On note X_n la variable aléatoire du nombre de boules blanches obtenues au cours des n premiers tirages.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par X_n.

2. Déterminer la loi de X_1, de X_2.

3. Démontrer que X_n suit une loi uniforme sur $[\![0; n]\!]$. On pourra raisonner par récurrence.

Exercice 9 (Un peu difficile)**.** Soit $a > 0$ On dispose d'un jeu de cartes classiques contenant $2n$ cartes (en général, $n = 16$ ou 26) qui contient deux as noirs. On envisage deux jeux.

1. Premier jeu : On mélange le jeu et on tire les cartes au hasard jusqu'à l'obtention du premier as noir.

   a. On note X le rang d'apparition du premier as noir. Déterminer la loi de X.
   b. Montrer que $E(X) = \dfrac{2n+1}{3}$.
   c. Le joueur paie 1€ chaque fois qu'il tire une carte et gagne a€ lorsqu'il tire un as noir. Déterminer G_1, le gain algébrique du joueur et en déduire $E(G_1)$.
   d. Combien doit-il gagner pour que le jeu soit équilibré (c'est-à-dire quand l'espérance de gain est nulle).

2. Deuxième jeu : Même chose sauf que le joueur peut cette fois-ci tirer pas plus de n cartes (la moitié du jeu).

   a. Déterminer G_2 le gain algébrique.

b. (Question difficile) Comment choisir a pour que le jeu soit équilibré ?

Exercice 10. Soit X une variable aléatoire finie telle que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on a :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k).$$

Exercice 11. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On pioche trois boules successivement avec remise et on note X le numéro le plus petit obtenu.

1. Déterminer, pour $k \in [\![0, n]\!]$, $P(X > k)$.

2. En utilisant le résultat de l'exercice 10, déterminer $E(X)$.

Exercice 12. On lance 20 fois de suite une pièce équilibrée. On note X la variable aléatoire égale à l'apparition du premier pile s'il y en a un, 0 si aucun n'apparait. Déterminer la loi de X et son espérance. On pourra éventuellement s'aider de l'exercice 10 pour calculer l'espérance, ou remarquer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^k} = \left(1 - \frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^{k-1}}$ et développer cette expression.

Exercice 13. Une urne contient deux boules blanches et une noire. On tire uniformément une boule, si elle est noire, on la remet, si elle est blanche on ne la remet pas mais on ajoute une boule noire. On note Y_n le nombre de boules blanches dans l'urne à l'issue du $n$ème tirage.

1. Déterminer la loi de Y_1.

2. Pour $n \geqslant 2$, déterminer la loi de Y_n. On pourra commencer par déterminer $P(Y_n = 2)$, puis $P(Y_n = 1)$.

3. Déterminer $E(Y_n)$.

Exercice 14. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N où $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$. On pioche simultanément et uniformément $n \in \mathbb{N}$ boules avec $1 \leqslant n \leqslant N$. On note X le plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer la loi de X.

2. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$.

3. En déduire $E(X)$.

Exercice 15. 1. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \cdots + \binom{2n}{n} = \binom{2n+1}{n+1}.$$

2. Une urne contient n boules rouges et n boules noires. On effectue dans cette urne des tirages d'une boule sans remise jusqu'à l'obtention de toutes les boules noires. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de tirages nécessaires, c'est-à-dire le rang du tirage de la dernière boule noire.

   Déterminer la loi de X et son espérance.

Exercice 16 (La loi hypergéométrique, exercice difficile)**.** On prend dans tout l'exercice la convention que pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{Z}$ $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = 0$ si $k > n$ ou $k < 0$.

1. L'identité de Vandermonde.

   a. On considère une urne qui contient m boules rouges et n boules vertes. Combien y a-t-il de tirages de k boules simultanées ?

   b. Combien y a-t-il de tirages de k boules simultanées contenant exactement i boules rouges ?

   c. En déduire que, pour $m, n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant m + n$, on a

$$\begin{pmatrix} m+n \\ k \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ k-i \end{pmatrix}.$$

2. Soient n et N des entiers tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ et $p \in]0, 1[$ tel que $Np \in \mathbb{N}$. Notons $q = 1 - p$. On dit que X suit une loi hypergéométrique de paramètre (n, p, N) si $X(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad P(X = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

   On note $X \hookrightarrow \mathcal{H}(n, p, N)$.

   a. Montrer que l'on définit bien une variable aléatoire.

   b. Déterminer $E(X)$.

   c. Que peut modéliser une telle variable aléatoire ?

3. On note $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

   a. Montrer que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\lim_{N \to +\infty} P(X_N = k) = P(Y = k).$$

   b. Commentez.

Exercice 17. On dispose d'un dé équilibré. On cherche le nombre de lancers nécessaires pour affirmer que la face numéro 6 apparait avec une fréquence de $\frac{1}{6}$ au centième près avec une probabilité de 95% en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 18. Un éleveur possède 100 vaches et désire construire deux étables de n places (avec $50 \leqslant n \leqslant 100$) pour que, si chaque vache choisit uniformément et indépendamment son étable, la probabilité que toutes trouvent une place du premier coup soit supérieure ou égale à $0,95$. Déterminer n en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

18 Intégration sur un segment

Exercice 1. Calculer les intégrales suivantes. Un ou plusieurs changements de variable peuvent-être nécessaires, ainsi que des intégrations par parties.

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1}$.

2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{-x+3}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

3. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+5}}$.

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(2x+4)}{x+2}\,\mathrm{d}x$.

5. $\displaystyle\int_0^x (2t+1)e^{2t}\,\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}$.

6. $\displaystyle\int_1^x (t^2+t-1)\ln(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}_+^*$.

7. $\displaystyle\int_1^x (-t^2+t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t,\ x \in \mathbb{R}$.

8. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x^3)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

9. $\displaystyle\int_2^5 \frac{3x^2}{x^3+2}\,\mathrm{d}x$.

10. $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x$.

11. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^3-2x+1}{x^4-x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$.

12. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x^2+2)\,\mathrm{d}x$.

13. $\displaystyle\int_0^2 (3x+1)e^{3x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x$.

14. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{5n+2}}{e+x^3}\,\mathrm{d}x$.

15. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 x^n e^x\,\mathrm{d}x$.

16. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_1^e \frac{\ln^{2n}(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.

17. $\displaystyle\int_0^\pi \sqrt{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$. Il faut connaitre ses formules de trigonométrie...

18. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$. On posera $x=\cos(t)$.

19. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan(x))\,\mathrm{d}x$. On posera $u=\dfrac{\pi}{4}-x$.

Exercice 2. Montrer que les intégrales suivantes existent et les calculer.

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 xe^x\,\mathrm{d}x$.

2. $\displaystyle\int_0^x \sin^3(t)\,\mathrm{d}t$, où $x \in \mathbb{R}$.

3. $\displaystyle\int_0^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ avec $x>0$. (Attention, il y a des pièges...)

Exercice 3. Calculer les limites suivantes.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n}$.

2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(k+n)^2}$.

3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 4. Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\ln(1+x) \leqslant x$. En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Exercice 5. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

4. En déduire la limite de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6. 1. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)$ puis déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)$.

2. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

3. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$.

4. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $x - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x) \leqslant x$.

5. Retrouver le résultat de la première question, à savoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)$. On pourra appliquer l'inégalité précédente à $\dfrac{1}{n+k}$.

Exercice 7. 1. Montrer que la fonction sinus établit une bijection de $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1, 1]$. On notera g sa réciproque.

2. Montrer que g est dérivable sur $]-1,1[$ et montrer que, $\forall x \in]-1,1[$, $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$.

Exercice 8 (Comparaisons Séries-Intégrales)**.** 1. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} \sqrt{k}$. Montrer que $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{3} n\sqrt{n}$. On posera f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. On comparera chaque terme de la somme entre des intégrales de f sur des intervalles bien choisis.

2. On note $T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Montrer que $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. On s'inspirera de la question précédente.

3. On note $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Montrer que $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. On s'inspirera de la technique employée dans cet exercice et non de l'exercice sur la constante d'Euler du chapitre sur les suites.

Exercice 9. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.$$

1. Etude de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   a. Calculer J_1.

   b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

   c. Etudier la convergence de la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. Etude de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1} J_{n+2}.$$

   b. Etudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

   c. Déterminer un équivalent simple de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 10. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$.

1. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

2. On pose $J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^k}$. Calculer $J - I_n$. On laissera le résultat sous forme de somme.

3. En déduire $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{kn+1}$ (que nous ne calculerons pas).

4. En déduire $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 11. On note pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$ $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n} - x^{4n}}{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n existe et que $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+2k+1}$.

2. Etablir, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k} \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+2k}.$$

3. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$ et en déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

4. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 12. On pose, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$. On pourra noter, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g_x : t \longmapsto \dfrac{t^x}{1+t}$.

1. Montrer que f est une fonction bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier le sens de variation de f.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

4. a. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $0 \leqslant \displaystyle\int_0^1 \frac{1-t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{x}{x+1}$.
   b. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$.

Exercice 13. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$.

1. Justifier l'existence de f.

2. Montrer que f est dérivable et étudier les variations de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. a. Montrer que $\forall u \geqslant 0$, $\ln(1+u) \leqslant u$.
   b. Déterminer la limite de f en 0 par valeurs positives si elle existe.

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   a. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $t \in [x, 2x]$, on a

   $$\frac{1}{\ln(1+4x^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+t^2)} \leqslant \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

   En déduire que

   $$\frac{x}{\ln(1+4x^2)} \leqslant f(x) \leqslant \frac{x}{\ln(1+x^2)}.$$

   b. Montrer que, en $+\infty$, on a $f(x) \sim \dfrac{x}{2\ln(x)}$.

5. Etudier la parité de f.

6. En déduire le tableau de variation de f, limites comprises.

7. Donner l'allure de la courbe représentative de f.

Exercice 14 (Intégrales de Wallis, un classique indémodable)**.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x$.

2. Etudier le sens de variation de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Donner une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n.

4. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$.

5. En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$. On commencera par montrer que $I_n \sim I_{n+1}$.

19 Géométrie

Exercice 1 (A propos des droites et des plans.)**.** On se placera dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ et le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1,2)$ passant par $(0,0)$, puis du plan de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1,2,3)$ et passant par $(0,0,0)$. Donner une représentation paramétrique de ces deux objets.

2. Déterminer une équation cartésienne de la droite de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1,2)$ passant par $(3,2)$, puis du plan de vecteur normal $\overrightarrow{n} = (1,2,3)$ et passant par $(3,2,1)$. Donner une représentation paramétrique de ces deux objets.

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,2)$ passant par $(1,1)$, puis du plan engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u} = (1,2,3)$ et $\overrightarrow{v} = (2,1,0)$ passant par $(1,1,1)$. Donner une équation cartésienne de ces deux objets.

Exercice 2. Pour s'entrainer et vérifier qu'on a bien compris les représentations paramétriques ou par équations caractéristiques. Caractériser les ensembles suivants et en donner une autre représentation :

1. $E_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / y - 2x = 0\}$

2. $E_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2x = 0\}$

3. $E_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2x + z = 0\}$

4. $E_4 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2x + z = 3\}$

5. $E_5 = \{(2\lambda, 3\lambda, -\lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

6. $E_6 = \{(2\lambda - 1, 3\lambda + 2, -\lambda) / \lambda \in \mathbb{R}\}$

7. $E_7 = \{(2a - b, a + 2b, a) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

8. $E_8 = \{(2a - b - 2, a + 2b + 1, a + 6) / (a,b) \in \mathbb{R}^2\}$

9. $E_9 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / y - 2x + z = 0 \text{ et } -2y + 4x - 2z = 0\}$.

10. $E_{10} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + z = 0 \text{ et } x - y + z = 2\}$.

11. $E_{11} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 = 0\}$.

Exercice 3. On considère la droite D d'équation $2x+3y = 1$ et le point A de coordonnées $(3,-6)$.

1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{n}$ normal à D.

2. En déduire une équation de la droite passant par A et orthogonale à D.

3. En déduire les coordonnées de H, le projeté orthogonal de A sur D.

4. Déterminer une représentation paramètrique de la droite D et caractériser-la.

5. En déduire un vecteur directeur de D de norme 1 et retrouvez les coordonnées de H.

Exercice 4. On considère la droite D passant par le point $A(2,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(1,2)$. On note par ailleurs le point B de coordonnées $(-3,4)$. On note enfin H le projeté orthogonal de B sur D.

1. Déterminer un vecteur directeur de D de norme 1 et déterminer les coordonnées de H.

2. Déterminer une équation cartésienne caractérisant la droite D.

3. En déduire une équation de la droite D' passant par B et orthogonale à D.

4. Retrouver les coordonnées de H, le projeté orthogonal de A sur D.

Exercice 5. On considère la droite D passant par le point $A(2,-1,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}=(1,1,2)$. On note par ailleurs le point B de coordonnées $(3,3,0)$. On note enfin H le projeté orthogonal de B sur D.

1. Déterminer un vecteur directeur de D de norme 1 et déterminer les coordonnées de H.

2. Déterminer un système d'équations cartésiennes caractérisant la droite D.

3. Déterminer une autre équation vérifiée par les coordonnées du point H, et déduire les coordonnées de H.

Exercice 6. On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation caractéristique $x-2y+z=2$.
On note par ailleurs le point B de coordonnées $(-1,2,1)$. On note enfin H le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.

1. Déterminer un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$ que l'on notera $\overrightarrow{n}$.

2. En déduire une description de la droite D passant par B et orthogonale à $\mathcal{P}$.

3. Déterminer les coordonnées de H.

4. Déterminer un système directeur $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ de $\mathcal{P}$ ainsi qu'un point $A\in\mathcal{P}$.

5. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v'}$ coplanaire à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

6. En déduire un système directeur du plan $\mathcal{P}$ formés par deux vecteurs de norme 1 et retrouver les coordonnées de H.

Exercice 7. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point A de coordonnées $(1,1,1)$ et de système directeur $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u}=(1,1,2)$ et $\overrightarrow{v}=(-1,1,1)$.
On note par ailleurs le point B de coordonnées $(2,-6,5)$. On note enfin H le projeté orthogonal de B sur $\mathcal{P}$.

1. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{v'}$ coplanaire à $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$ et orthogonal à $\overrightarrow{u}$.

2. En déduire un système directeur $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_1})$ du plan $\mathcal{P}$ formés par deux vecteurs orthogonaux de norme 1

3. Déterminer les coordonnées de H.

4. Déterminer une équation caractérisant le plan $\mathcal{P}$.

5. Déterminer un système d'équation décrivant la droite D passant B et orthogonale à $\mathcal{P}$.

6. Retrouver les coordonnées de H.

Exercice 8. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}_1$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = & 1+t \\ y = & 2-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et de la droite $\mathcal{D}_2$ passant par O et dirigée par $\overrightarrow{u} = (1, 2)$.

2. On note $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $x + y - 2 = 0$. Donner un point de cette droite, un vecteur directeur, un vecteur normal et une représentation paramétrique.

3. On note Δ la droite d'équation cartésienne $2x - y + 2 = 0$. Déterminer la projection orthogonale du point $M = (2, 1)$ sur la droite Δ. En déduire la distance de M à Δ.

Exercice 9. 1. Déterminer le projeté orthogonal du point $U(1, 1)$ sur la droite d'équation $2x - 3y = 0$.

2. Déterminer le projeté orthogonal du point $U = (1, 2)$ sur la droite d'équation $-x + 2y = 1$.

3. Déterminer le projeté orthogonal du point $U = (1, 1, -1)$ sur la droite définie par le système d'équations : $\begin{cases} x + y + z & = & 0 \\ 2x - z & = & 3 \end{cases}$

4. Déterminer le projeté orthogonal du point $U = (1, 2, 0)$ sur le plan d'équation $2x + 2y - z = 0$.

Exercice 10. On considère le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

1. Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ l'ensemble des points $M = (x, y)$ du plan tels que $x^2 + y^2 - 4x + y + m = 0$. Lorsque c'est un cercle, en donner une représentation paramétrique.

2. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre $A(3, 0)$ et de rayon 1. Déterminer les éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{D}$ la droite d'équation cartésienne $px - y + 1 = 0$ où $p \in \mathbb{R}$. On discutera selon les valeurs du paramètre p.

3. Pour $m > 0$, on note $\mathcal{C}_m$ le cercle d'équation cartésienne $x^2 + (y-2)^2 = m$. Déterminer le nombre d'éventuels points d'intersection de $\mathcal{C}_m$ avec $\mathcal{C}$ de centre $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ et de rayon $\frac{3}{2}$. On fera particulièrement attention à factoriser les expressions manipulées du mieux possible pour que les calculs restent faisables manuellement.

Exercice 11. On considère l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère le point $A(1, 2, 3)$ et la droite $\mathcal{D}$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = & 1 + 2\lambda \\ y = & 3\lambda \\ z = & -1 + \lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. et les plans $\mathcal{P}_1$ d'équation $x + y + z = 3$ et $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x - y + z = 2$.

1. Trouver le plan $\mathcal{P}_1'$ parallèle à $\mathcal{P}_1$ et passant par A.
2. On note Δ l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ contenue dans $\mathcal{P}_1$ et sécante avec $\mathcal{D}$.

Exercice 12. On considère l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère quatre points $A(1,1,1)$, $B(0,2,2)$, $C(-1,2,0)$ et $D(0,-3,1)$.

1. Montrer que les points A, B et C définissent un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation cartésienne.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par D et orthogonale à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer les coordonnées du point D' symétrique de D par rapport à $\mathcal{P}$.

Exercice 13. Soit $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan.

1. Montrer que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|$.
2. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour qu'un parallélogramme $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 14. On considère l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. On considère les droite $\mathcal{D}_1 = \{(3+t, -2-t, 1+t)/t \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{D}_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/ x + 2y + z = -x + 2y - z = 0\}$.

1. Donner un point A_1 de $\mathcal{D}_1$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{v_1}$ de $\mathcal{D}_1$. De même, donner un point A_2 de $\mathcal{D}_2$ et un vecteur directeur $\overrightarrow{v_2}$ de $\mathcal{D}_2$.
2. Déterminer un vecteur $\overrightarrow{u}$ non nul orthogonal à $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.
3. Montrer que $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}$, et $\overrightarrow{v_2}$ sont deux à deux orthogonaux.
4. Pour $i \in \{1,2\}$, on note $\mathcal{P}_i$ le plan passant par A_i et parallèle au plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_i}$. Montrer que $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ est une droite $\mathcal{D}$, que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes ainsi que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2$, que $\mathcal{D}$ est perpendiculaire à $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

Exercice 15. Dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ si on est dans $\mathbb{R}^2$ ou $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ si on est dans $\mathbb{R}^3$, déterminer le projeté orthogonal de M sur l'ensemble demandé. Vous pourrez vous inspirer des techniques vues dans les premiers exercices.

1. $M = (2,1)$ sur la droite D passant par $(0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (0,1)$.
2. $M = (2,1)$ sur la droite D passant par $(0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,0)$.
3. $M = (2,1)$ sur la droite D passant par $(0,0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,1)$.
4. $M = (1,0)$ sur la droite D passant par $(-1,-1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,0)$.
5. $M = (3,1)$ sur la droite D passant par $(3,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1,2)$.
6. $M = (5,-3)$ sur la droite D passant par $(3,1)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (-1,2)$.
7. $M = (-1,-2)$ sur la droite D passant par $(-2,-3)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = (1,0)$.
8. $M = (2,1,1)$ sur le plan P contenant le point $(0,0,0)$ de base $((1,0,0),(0,0,1))$.

9. $M = (-1, 1, 2)$ sur le plan P contenant le point $(0, 1, 1)$ de base $((1, 0, -1), (1, -1, 1))$.

10. $M = (3, 2, 2)$ sur le plan P contenant le point $(1, 1, 1)$ de base $((1, 0, 0), (0, -1, 1))$.

11. $M = (3, 2, 2)$ sur le plan P contenant le point $(1, 1, 1)$ de base $((1, 0, 0), (1, -1, 1))$.

20 Applications linéaires

Exercice 1. Déterminer les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ qui sont linéaires. Donner les matrices associées aux applications linéaires dans les bases canoniques correspondantes lorsque c'est possible.

1. $f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (0, 2x - z). \end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - z, 2z + x). \end{array}$

3. $f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - z, y + 1). \end{array}$

4. $f_4 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (z, xy). \end{array}$

5. $f_5 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (y - x, z^2). \end{array}$

6. $f_6 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x - y + z, z). \end{array}$

Exercice 2. Soit f l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y) & \longmapsto & (x + 2y, x + 3y) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.
4. Donner la matrice représentative de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit f l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x, y) & \longmapsto & (x - y, x + y, 2y - x) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. f est-elle surjective ?
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.
4. Donner la matrice M de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 4. Soit f l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (2x - z, y + 2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.
3. f est-elle surjective ?
4. Donner la matrice M de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit f l'application

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x+2y-z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f)$. Est-elle surjective ?
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.

Exercice 6. Soit f l'application

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-iy+z, y+(2+i)z, x-y) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice M de f relativement à la base canonique de $\mathbb{C}^3$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.
4. f est-elle surjective ?

Exercice 7. Soit f l'application

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (ix+z, (1+i)y+2z) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice M de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}^3$ et de $\mathbb{C}^2$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.
4. f est-elle surjective ?

Exercice 8. Soit f l'application

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+iy, x+y) \end{array}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Donner la matrice M de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{C}^2$ (même base à l'arrivée et au départ).
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.
4. f est-elle surjective ?

Exercice 9. Soit p l'application

$$p: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & \dfrac{1}{4}(2x+y, 4x+2y) \end{array}$$

1. Montrer que p est un endomorphisme.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(p)$. p est-elle injective ?
3. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(p)$.
4. Déterminer $p \circ p$ sans passer par la représentation matricielle de p.
5. Déterminer la matrice A représentative de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (même base arrivée et départ).
6. Calculer A^2. Etait-ce prévisible ?
7. Pourquoi ce nom p ?
8. Montrer que $\big((1,-2),(1,2)\big)$ forme une base de $\mathbb{R}^2$. Quelle est la matrice de p relativement à cette base ? Certains résultats vus précédemment auraient-ils été plus facile à démontrer avec cette matrice ?

Exercice 10. Soit f l'application

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{C}^3 & \longrightarrow & \mathbb{C}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+2y+(-2+i)z, 0, iz) \end{array}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Montrer que $\big((1,0,0),(1,0,1),(-1,1,0)\big)$ est une base de $\mathbb{C}^3$.
3. Donner la matrice M de f relativement à cette base.
4. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$ et préciser si f est injective.
5. f est-elle surjective ?

Exercice 11. Soit f l'application $f: \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a-b & a-d \\ c & c \end{pmatrix} \end{array}$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f.
3. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 12. Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & P' + P(0) \end{array}$ où P' désigne la dérivée de P.

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Donner une base de $\mathrm{Im}(f)$ et le rang de f. f est-elle surjective ?
3. En déduire que f n'est pas injective.

Exercice 13. Soit $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n+1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1) - P(X). \end{array}$

1. Vérifier que f est bien à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$ et montrer que f est une application linéaire.

2. Déterminer $\mathrm{Ker}(f)$. f est-elle injective ?

3. En déduire que f est surjective.

Exercice 14. On note $E = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de E et :

$$u_1 = (1, 1), u_2 = (1, -1), v = (2, 3).$$

1. Montrer que (u_1, u_2) est une base de E.

2. On note $F = \mathbb{R}^3$ et on considère l'application linéaire $f : E \longrightarrow F$ définie par

$$f(u_1) = (1, 1, 0) \text{ et } f(u_2) = (1, 0, 1).$$

   Calculer $f(e_1), f(e_2), f(v)$.

3. Quelle est la matrice de f dans les bases canoniques respectives de E et F (c'est-à-dire de la base canonique de E dans celle de F) ?

4. Trouver au moins un élément de F n'ayant pas d'antécédent par f.

Exercice 15. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que les images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ soient respectivement $(1, -1, 2), (-3, 2, -1)$ et $(-7, 4, 1)$.

1. Donner la matrice M de f relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

2. Déterminer tous les antécédents de $u = (-1, -1, 8)$, et tous ceux de $v = (-2, 1, 3)$.

3. f est-elle surjective ? injective ?

Exercice 16. On considère la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{K})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$. On note de plus f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^3$ canoniquement associé à A.
On rappellera que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^n = f \circ \ldots \circ f$, la composition de f par lui même n fois.

1. A quelle condition f est un isomorphisme ?

2. Montrer que $f^3 - cf^2 - bf - aid_{\mathbb{R}^3} = 0$.

3. En déduire une expression de f^{-1} lorsque f est un isomorphisme.

4. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ lorsqu'il n'est pas réduit au vecteur nul.

Exercice 17. On rappellera que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^n = f \circ \ldots \circ f$, la composition de f par lui même n fois.
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^3)$ tel que $f^3 = 0$ (l'endomorphisme nul) mais $f^2 \neq 0$.

1. Montrer qu'il existe $u \in \mathbb{K}^3$ tel que $(f^2(u), f(u), u)$ soit une base de $\mathbb{K}^3$.

2. Quelle est la matrice de f dans cette base ?

Exercice 18. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

On rappellera que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^n = f \circ \ldots \circ f$, la composition de f par lui même n fois.

1. Vérifier que $f^2 - 3f + 2id = 0$ (l'endomorphisme nul).
2. En déduire que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dans lui même (on parle d'automorphisme) et déterminer sa réciproque.
3. Montrer qu'il existe deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n f + b_n id$.
4. En déduire l'expression de f^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
5. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f^{-n} = (f^{-1})^n$. Est-ce que le résultat trouvé en question précédente reste vrai pour $n \in \mathbb{Z}$?

Exercice 19. On note $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$.

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à A, c'est-à-dire l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice représentative relativement à la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ est A.

1. Expliciter f.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = ((1,1), (-1,1))$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
3. On note P la matrice représentative de la famille $\mathcal{B}'$ relativement à la base canonique. Déterminer P puis P^{-1}.
4. Donner la matrice D de f relativement à cette base $\mathcal{B}'$ et calculer PDP^{-1}.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
6. En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, A^n.

Exercice 20. Soit A la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

On considère l'application $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & AM. \end{array}$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer C la matrice représentative de φ relativement à la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ notée $\mathcal{B}$.

   On rappelle que $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
3. On définit la famille $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \right)$. Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Déterminer D la matrice représentative de φ relativement à la base $\mathcal{B}'$.

5. Donner P la matrice représentative de $\mathcal{B}'$ relativement à la base $\mathcal{B}$. Calculer, PDP^{-1}.

Exercice 21. On note φ_n l'application définie sur $\mathbb{K}[X]$ par, $\forall P \in \mathbb{K}[X]$, $\varphi_n(P) = (P(0), P(1), \dots, P(n))$.

1. Montrer que φ_n est linéaire.
2. Déterminer $\mathrm{Ker}(\varphi_n)$. Est-ce que φ_n est injective ?
3. On considère désormais ψ_n la restriction de φ_n à $\mathbb{K}_n[X]$, c'est-à-dire l'application définie sur $\mathbb{K}_n[X]$ par, $\forall P \in \mathbb{K}_n[X]$, $\psi_n(P) = (P(0), P(1), \dots, P(n))$. Montrer que ψ_n est injective. Est-ce que ψ_n est un isomorphisme ?
4. Déterminer P_0 tel que $\psi_n(P_0) = (1, 0, 0, 0, \dots, 0)$.
5. Déterminer P_1 tel que $\psi_n(P_1) = (0, 1, 0, 0, \dots, 0)$.
6. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, déterminer P_k tel que $\psi_n(P_k) = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ où le 1 apparait en position $k + 1$.
7. On se place dans le cas où $n = 2$. En déduire ψ_2^{-1}.
8. Et dans le cas général, décrire ψ_n^{-1} en fonction des $(P_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$.

Exercice 22. On note $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A.

1. Déterminer une base et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$, ainsi que de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ telles que $\mathrm{rg}(f - \lambda Id) < 3$.
3. On pose $u = (0, 1, -1)$, $v = (1, 1, -1)$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(v)$ sont les seules droites vectorielles stables par f. (On rappelle qu'on dit que F est stable par f si et seulement si $\forall x \in F$, $f(x) \in F$.)

Exercice 23. Soient f et g deux endomorphismes de $\mathbb{K}^n$.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$ et $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$.
2. Montrer que $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f(Ker(g \circ f))$.
3. Si $f \circ g = g \circ f$, montrer que $\mathrm{Ker}(g)$ et $\mathrm{Im}(g)$ sont stables par f. On rappelle qu'on dit que F est stable par f si et seulement si $\forall x \in F$, $f(x) \in F$.
4. Si $f \circ g = g \circ f$ et $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$, montrer que $f \circ g = g \circ f = 0$ (l'endomorphisme nul).

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$. On notera, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $f^p = f \circ f \circ f \circ \ldots \circ f$ p fois et $f^0 = id_{\mathbb{K}^n}$.

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$ et $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$.
2. On note $(u_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'entiers convergente vers $\ell \in \mathbb{R}$.

    a. Montrer que $\ell \in \mathbb{N}$. On pourra raisonner par l'absurde et utiliser la définition de limite en choisissant ε avec pertinence.

b. En déduire qu'il existe un $p_0 \in \mathbb{N}$, tel que $\forall p \geqslant p_0$, $u_p = \ell$. On pourra ici encore utiliser la définition de limite avec un ε bien choisi.

3. a. Montrer qu'il existe un entier $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geqslant p_0$, $\dim(Ker(f^p)) = \dim(Ker(f^{p_0}))$.
   b. En déduire que pour tout $p \geqslant p_0$, $\mathrm{Ker}(f^p) = Ker(f^{p_0})$.

4. a. Etablir que pour tout $p \geqslant p_0$, $\dim(Im(f^p)) = \dim(Im(f^{p_0}))$.
   b. En déduire que pour tout $p \geqslant p_0$, $\mathrm{Im}(f^p) = Im(f^{p_0})$.

5. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) \cap \mathrm{Im}(f^{p_0}) = \{0\}$.

21 Compléments sur les variables aléatoires finies

Exercice 1. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. On pose $Z = X - Y$.
Déterminer $E(Z)$ et $V(Z)$.
Déterminer ensuite la loi de Z et vérifier vos résultats obtenus ci-dessus.

Exercice 2. Soient X et Y deux variables aléatoires suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ indépendantes.
Déterminer $P(X = Y)$.
On aura besoin de démontrer l'identité de Vandermonde, soit que pour $m, n, k \in \mathbb{N}$ avec $k \leqslant m + n$, on a

$$\binom{m+n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i}.$$

Exercice 3. Une urne contient 20 boules numérotées de 1 à 20. On tire deux boules au hasard avec remise. On désigne par X et Y les variables aléatoires égales aux numéros obtenus. On pose $Z = X + Y$ et $T = X - Y$.

1. Calculer les espérances et les variances de Z et de T.

2. Calculer $P(ZT = 48)$.

Exercice 4. On lance 3 fois de suite une pièce équilibrée. On note X la variable qui prend la valeur 1 si on a obtenu pile au premier lancer, 0 sinon. Y compte le nombre de faces obtenues au cours des trois lancers.

1. Déterminer les lois de X et Y.

2. Déterminer la loi de (X, Y).

Exercice 5. Soient $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$, $q = 1 - p$ et (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeur dans $[\![0, N]\!]^2$ dont la loi jointe est donnée par

$$\forall (i, j) \in [\![0, N]\!]^2, P([X = i] \cap [Y = j]) = Ap^i q^{N-j}.$$

1. Déterminer A pour que ce soit une loi jointe de probabilité.

2. Déterminer les lois de X et Y. Sont-elles indépendantes ?

3. Quelle est la loi de $X + Y$?

Exercice 6. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires à valeur dans $\mathbb{N}^2$. On suppose que l'ensemble des valeurs prises par ce couple est :

$$(X, Y)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 ; 0 \leqslant i \leqslant N \text{ et } i \leqslant j \leqslant i + N\}$$

et pour tout couple $(i, j) \in (X, Y)(\Omega)$ on a

$$P(X = i \cap Y = j) = \frac{1}{(N+1)^2}.$$

Montrer que l'on définit bien une loi de probabilité pour le couple (X, Y) et déterminer les lois marginales de X et Y. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 7. Une urne contient 2 boules numérotées 0, 2 numérotées 1, 2 numérotées 2. On tire simultanément 2 boules. X est le plus petit numéro obtenu, Y le plus grand.

1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Déterminer la loi jointe et retrouver les lois marginales.
3. Sachant qu'une des boules porte le numéro 2, quelle est la probabilité que l'autre porte le 0 ?

Exercice 8. Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On pioche n boules sans remise, avec $n \in [\![1, N]\!]$. On note X le plus petit numéro tiré et Y le plus grand.

1. Déterminer $P(X \geqslant k)$ et $P(Y \leqslant k)$ pour $k \in [\![1, N]\!]$.
2. En déduire les lois de X et Y.
3. $\forall (i, j) \in [\![1, N]\!]^2$, déterminer $P((X = i) \cap (Y = j))$. En déduire la loi du couple (X, Y).

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On effectue n tirages successifs d'une boule. Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note X_k la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si l'on tire au k-ième tirage la boule numérotée k et 0 sinon.

1. Interpréter la somme $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.
2. On suppose que les tirages ont lieu avec remise.
   a. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.
   b. En déduire l'espérance et la variance de X.
3. On suppose que les tirages ont lieu sans remise.
   a. Déterminer la loi de X_k, son espérance et sa variance.
   b. En déduire l'espérance de X.

Exercice 10 (Attention à mener les calculs soigneusement)**.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $p \in]0, 1[$. On considère un élève qui répond à un QCM de n questions. Il a une probabilité p de répondre correctement à chaque question, chaque question étant indépendante des autres. On notera $q = 1 - p$ si besoin d'alléger certaines écritures.

1. On note X la variable aléatoire égale au nombre de questions auxquelles il a répondu correctement.

   a. Quelle est la loi de X ?
   b. Rappeler l'espérance et la variance de X.
   c. Ecrire une fonction `qcm(n,p)` qui simule cette variable aléatoire.

2. On donne à l'élève la possibilité de se corriger en répondant à nouveau aux questions auxquelles il s'est trompé. Malheureusement, il répond encore une fois de la même façon (c'est-à-dire correctement avec la même probabilité p et indépendamment de tout le reste, pas un élève très sérieux donc). On note Z le nombre de questions auxquelles il répond correctement au deuxième test.

   a. Ecrire une fonction `qcm2(n,p)` qui simule la variable aléatoire Z.
   b. Déterminer la loi conditionnelle de Z sachant $(X = k)$, pour $k \in [\![0, n]\!]$.
   c. Montrer que, pour tous ℓ, n, k entiers naturels tels que $\ell + k \leqslant n$, on a
   $$\binom{n-k}{\ell}\binom{n}{k} = \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k}.$$
   d. En déduire la loi de Z puis son espérance et sa variance.
   e. Aurait-on pu le deviner ?

3. On pose $S = X + Z$.

   a. Que représente S ?
   b. Ecrire une fonction `qcm3(n,p)` qui simule S.
   c. Quelle est la loi de S ? Son espérance ? Sa variance ?
   d. Aurait-on pu le deviner ?

Exercice 11. On dispose de n, $n \geqslant 1$, urnes $U_1, U_2, \ldots, U_n$. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. On choisit une urne au hasard puis on tire une boule dans cette urne. On note X la variable aléatoire égale au numéro de l'urne choisie et Y la variable aléatoire égale au numéro de la boule tirée.

1. Ecrire une fonction Python qui simule la variable aléatoire Y en prenant en argument l'entier $n \geqslant 1$.

2. En déduire une fonction Python qui approche $E[Y]$. On prendra $n = 1$, $n = 5$ et $n = 9$. Pouvez-vous conjecturer la valeur théorique de $E[Y]$ en supposant qu'il s'agit d'une fonction affine de n ?

3. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.

4. Sachant que $(X = k)$, quelle est la loi de Y ?

5. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y), puis la loi de Y (qu'on gardera sous forme de somme simplifiée).

6. Déterminer $E(Y)$ et $V(Y)$ en fonction de n.

Exercice 12. On dispose de n boules numérotés de 1 à n dans une urne. On pioche une boule au hasard (uniformément). Si son numéro est égal à k, pour n'importe quel $k \in [\![1, n]\!]$, on la remet dans l'urne en ajoutant k autres boules portant le même numéro k. On pioche ensuite une deuxième boule. On note X_n le premier numéro obtenu et Y_n le second.

1. Quelle est la loi de X_n ? Son espérance ? Sa variance ?

2. Déterminer la loi de Y_n. On l'exprimera en fonction de $a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

3. Déterminer $\lim_{n\to\infty} a_n$.

4. Déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n$ avec $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n+\ell}$.

5. Déterminer $E(Y_n)$. On l'exprimera en fonction de S_n.

6. Montrer que, en $+\infty$, $E(Y_n) \sim \frac{3\ln(2)-1}{2} n$.

Exercice 13. Lors d'une suite de lancers indépendants de pile ou face (d'une pièce équilibrée), on note X_n le nombre de fois où le résultat est différent du précédent lors des n premiers lancers. On prendra $X_1 = 0$.

1. Déterminer la loi de X_2 et de X_3.

2. Déterminer la loi de X_n, pour $n \geqslant 2$ en fonction de celle de X_{n-1}. Pour alléger les notations, on ne s'interdira pas d'utiliser $P(X_n = k) = 0$ lorsque $k \notin X_n(\Omega)$.

3. On note $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)x^k$. Calculer $\varphi_n(1)$, $\varphi_n'(1)$, $\varphi_n''(1)$.

4. Pour $n \geqslant 1$, montrer que $\varphi_{n+1}(x) = \frac{1+x}{2}\varphi_n(x)$. En déduire une expression de $\varphi_n(x)$ en fonction de n et de x.

5. En déduire l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 14. On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on note X_k la variable aléatoire égale au nombre de boules distinctes obtenues lors de k tirages successifs avec remise.

1. Déterminer $P(X_k = 1)$.

2. Déterminer $P(X_k = k)$.

3. Déterminer la loi de X_{k+1}, en fonction de celle de X_k.

4. En déduire, pour tout $k \geqslant 1$, $E(X_{k+1}) = \frac{n-1}{n}E(X_k) + 1$.

5. Montrer que $E(X_k) = n\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^k\right]$.

6. Déterminer $\lim_{k\to+\infty} E(X_k)$. Qu'en pensez-vous ?

7. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(X_k)$. Qu'en pensez-vous ? Cette question nécessite d'avoir vu les équivalents classiques ou les développements limités.

22 Etude locale de fonctions

1. Limites, équivalents, développements limités et asymptotiques

Exercice 1 (Exercice fondamental utilisant les développements limités)**.** Il est probable que sorti d'un calcul de limites ou deux, on ne vous en demande pas de savoir faire beaucoup plus avec les développements limités...

1. On note $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable, donner la tangente à f en 0 ainsi que la position relative de la tangente et de la courbe.

2. On note $g :]-1,0[\cup]0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0, que ce prolongement est dérivable, donner la tangente à g en 0 ainsi que la position relative de la tangente et de la courbe.

Exercice 2. Donner un équivalent simple des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \ln(1 + 2x + 2x^2)$ au voisinage de 0.

2. $f(x) = \ln\left(\dfrac{1 + x + x^2}{1 - 2x}\right)$ au voisinage de 0.

3. $f(x) = e^{3x} - 1 + 2x^2$ au voisinage de 0.

4. $f(x) = \ln\left(1 + \dfrac{3}{x}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

5. $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{x+1}{x^2-1}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

6. $f(x) = \exp\left(\dfrac{1}{x+1}\right) - 1$ au voisinage de $+\infty$.

7. $f(x) = \exp\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) - \dfrac{x+1}{x+2}$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 3. Trouver l'équation de la tangente à la courbe représentative de f en x_0 et préciser si la courbe est au-dessus ou au-dessous de la tangente.

1. $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$.

2. $f(x) = e^x$ en $x_0 = 2$.

3. $f(x) = \ln(1 + x)$ en $x_0 = 0$.

4. $f(x) = \ln(x)$ en $x_0 = 1$.

5. $f(x) = \cos(x)$ en $x_0 = 0$.

6. $f(x) = \sin(x)$ en $x_0 = 0$.

7. $f(x) = \cos(x) - 1$ en $x_0 = 2\pi$.

8. $f(x) = xe^x$ en 0.

9. $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ en 0.

Exercice 4. Déterminer des équivalents simples lorsque n tend vers $+\infty$ des suites de terme général :

1. $(n+1)^p - (n-1)^p$ avec p réel non nul fixé.
2. $e^{(n+1)^p} - e^{(n-1)^p}$ avec p réel non nul fixé.

Exercice 5. Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x))$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x - x^2$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-x}$.
5. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x^{-x}$.
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) - x$.
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x}$.
8. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)-x}{x}$.
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.
10. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.
11. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x-1-x}{x^2}$.
12. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{e^{x^2+x}-e^{2x}}{e^{x+1}-e^{4x-2}}$.
13. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(e^x+x)}{x}$.
14. $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x+2}+x$.
15. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin(x)}{x^2}$.
16. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$.
17. $\lim\limits_{x\to0} (2^x+3^x-5^x)^{1/x}$.
18. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)}$.
19. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{1}{e}-\exp\left(x\ln\left(\dfrac{x}{1+x}\right)\right)\right)$.

2. Suites implicites

Les trois exercices suivants ne sont pas à proprement parler des exercices d'application de ce chapitre stricto sensu, mais ils se servent de toutes les notions d'analyse vues jusque là, exceptée l'intégration. Ils font donc d'excellents bilans de connaissance. Sans compter que les suites implicites tombent régulièrement aux concours et les candidats sont rarement à l'aise sur le sujet.
Une suite implicite est une suite dont chaque terme est défini comme solution d'une équation, mais on ne sait pas forcément résoudre cette équation. Si on le sait, la suite devient très explicite, et donc plus facile à étudier... et donc ne rentre pas dans le cas des suites implicites.
Le premier peut se résoudre très simplement en utilisant le théorème de la bijection, les autres ne permettent pas une utilisation aussi efficace. Prenez vote temps pour bien les travailler.

Exercice 6. Notons $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x + \ln(x)$.

1. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(u_n) = n$.
2. Etudier le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
4. Montrer que, en $+\infty$, $u_n \sim n$.
5. Montrer que $\dfrac{u_n - n}{\ln(n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} -1$.

Exercice 7. Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[, f_n(x) = x^{n+1} - x^n.$$

1. a. Dresser le tableau de variations de la fonction f_n sur $[0, +\infty[$ en faisant figurer la limite en $+\infty$.
   b. Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$.
   c. Montrer que,
   $$\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leqslant \alpha_n \leqslant 2.$$
2. a. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$ pour tout entier naturel n et tout réel positif x. En déduire la monotonie de la suite (α_n).
   b. Prouver que la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente vers une limite notée ℓ.
   c. Montrer que $\ell = 1$. On pourra raisonner par l'absurde.
3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \alpha_n - 1$.
   a. Etablir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(1 + u_n)^n u_n = 1$.
   b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = e^{-n\ln(1+u_n)}$.
   c. En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} nu_n = +\infty$.
   d. Montrer que $u_n \sim \dfrac{-\ln(u_n)}{n}$.
   e. Montrer que si $v_n \sim w_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\ln(v_n) \sim \ln(w_n)$.
   f. Montrer que $\ln(n) \sim -\ln(u_n)$ et en déduire $u_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.

g. Etablir, $\alpha_n = 1 + \dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$. Question légèrement hors programme (seuls les $o(x^n)$ sont au programme).

Exercice 8. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^{2n} + x^3 - 1.$$

1. Dresser le tableau de variations de f_n, $n \geqslant 2$, en faisant figurer les limites et $f(0)$.

2. Montrer que, pour tout $n \geqslant 2$, f_n s'annule exactement deux fois, une fois sur $\mathbb{R}_-$, et une fois sur $\mathbb{R}_+$. On notera α_n l'élément de $\mathbb{R}_+$ tel que $f_n(\alpha_n) = 0$ et on notera β_n l'élément de $\mathbb{R}_-$ tel que $f_n(\beta_n) = 0$. On définit ainsi deux suites, $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.

3. Étude de $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$.

   a. Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$, $\alpha_n \in]0, 1[$.

   b. A l'aide de l'algorithme de dichotomie, écrire une fonction qui prend en argument n et retourne α_n à 10^{-9} près.

   c. Étudier le sens de variation de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$. En déduire la convergence de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 2}$, et déterminer sa limite si elle existe.

   d. Montrer que si $v_n \sim w_n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\ln(v_n) \sim \ln(w_n)$.

   e. On pose, pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 1 - \alpha_n$. Déterminer un équivalent de $\ln(u_n)$ en $+\infty$.

   f. En déduire un équivalent de u_n. Il s'agit d'une question difficile.

4. Étude de $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.

   a. Justifier que, pour tout $n \geqslant 2$, $\beta_n \in] -2, -1[$.

   b. Étudier le sens de variation de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$.

   c. Étudier la convergence de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$, et déterminer sa limite si elle existe.

23 Fonctions réelles de deux variables réelles

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$. Que dire du point $(0, 0)$? On pourra regarder $f(x, x)$ et $f(x, 0)$.

Exercice 2. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) = x^3 - 3xy^2.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f.

2. Déterminer le point (x, y) tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

3. Est-ce que f atteint un extremum en ce point ? On pourra déterminer $f(x, x)$ avant de conclure.

4. Pourquoi le graphe de la courbe s'appelle « selle de singe » ? Il peut être utile de le tracer à l'aide d'une calculatrice, de Geogebra, de Grapher (sous mac).

Exercice 3. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f et montrer qu'elle admet un unique point critique que vous déterminerez.
2. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) \geqslant xe^x$.
3. Etudier les variations de $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto xe^x$. En déduire que, $\forall x \in \mathbb{R},\ xe^x \geqslant -e^{-1}$.
4. En déduire que f admet un minimum global en $(-1,0)$.

Exercice 4. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 2y + 3.$$

1. Calculer les dérivées partielles de f.
2. Déterminer les points (x,y) tels que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$. On ne trouvera qu'un couple noté (α,β) à déterminer.
3. Montrer que $f(x,y) - f(\alpha,\beta) = (x - \dfrac{3}{2}y + 2)^2 - \dfrac{1}{4}(y-8)^2$.
4. Est-ce que, en (α,β), f atteint un minimum ? Un maximum ?

Exercice 5. On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 8x - 2y + 8.$$

Nous allons montrer que cette fonction admet un minimum global en (a,b) que nous allons déterminer.

1. Une première méthode :
   a. A x fixé, étudier les variations de $g : y \mapsto f(x,y)$. Montrer que g admet un minimum, atteint en un seul point, noté $t(x)$ à déterminer.
   b. Déterminer $f(x,t(x))$.
   c. En déduire le couple (a,b) recherché.
2. Une deuxième méthode :
   a. Déterminer les deux dérivées partielles de f.
   b. Déterminer les points où elles s'annulent simultanément. On ne trouvera qu'un seul couple, (α,β) à déterminer.
   c. Calculer $f(x,y) - f(\alpha,\beta)$ et conclure. On pourra essayer d'utiliser la forme canonique d'un trinôme en considérant x puis y constant.

Exercice 6. Déterminer les fonctions f qui vérifient :

1. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & xy^2 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & x^2 y. \end{cases}$

2. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$

3. Pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & \dfrac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{cases}$

Exercice 7. On considère un nuage de points $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_i \neq x_j$. (On veut que le nuage ne soit pas sur une droite verticale, auquel cas tout ça n'a aucun intérêt.)
On notera $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax+b$.
Le but de cet exercice est de déterminer a et b pour que la somme des carrés des distances entre (x_i, y_i) et $(x_i, f(x_i))$ soit minimale. On appelle l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés ou droite de régression linéaire la courbe représentative de f pour les choix de a et b qui minimisent la quantité :

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} ((ax_i+b) - y_i)^2.$$

On notera $x = (x_1, \dots, x_n)$, $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, la moyenne de $(x_1, \dots, x_n)$.
De plus, on notera $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\overline{y} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_i$ la moyenne de $(y_1, \dots, y_n)$.
De plus, on notera $\operatorname{cov}(x,y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ et $V(x) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, autrement dit la covariance empirique et la variance empirique.

1. Commençons par quelques considérations pour simplifier nos futurs calculs.
   a. Montrer que $V(x) > 0$.
   b. Montrer que $V(x) = \dfrac{1}{n}\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2$.
   c. Montrer que $\operatorname{cov}(x,y) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i) - \overline{x}\overline{y}$.
2. Montrer que la fonction d n'admet qu'un seul point critique (a_0, b_0).
3. Montrer que la droite d'équation $y = a_0 x + b_0$ passe par le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$.
4. Montrer que le coefficient directeur de cette droite est $a_0 = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}$.
5. En déduire l'équation de cette droite.
6. Montrer que d admet un minimum global en ce point critique en procédant par double minimisation comme dans l'exercice 5.
7. Conclure.