# Correction des exercices

Matthieu Marouby

2024-2025

Ce recueil est un travail en cours, ne l'imprimez pas. Il sera complété au fur et à mesure que l'année avance et les éventuelles (voire très certaines) coquilles seront corrigées au fur et à mesure que vous me les signalerez.

## Table des matières

# 1 Généralités

## 1. Un peu de logique

**Exercice 1.** 1. On sait que $x \in \mathbb{Q}$, donc il existe $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $x = \dfrac{p}{q}$.

Si $y \in \mathbb{Q}$, alors il existe $(p',q') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que $y = \dfrac{p'}{q'}$.

Ainsi, $x + y = \dfrac{p}{q} + \dfrac{p'}{q'} = \dfrac{pq' + p'q}{qq'}$ où $pq' + p'q \in \mathbb{Z}$ et $qq' \in \mathbb{N}^*$, donc $x + y \in \mathbb{Q}$.

Ça se fait directement. □

2. Partir de $x + y \in \mathbb{Q}$, comme $- \in \mathbb{Q}$, on a d'après la question précédente, $x + y - x = y \in \mathbb{Q}$. On a donc démontré par contraposée que $y \notin \mathbb{Q} \Rightarrow x + y \notin \mathbb{Q}$. □

3. C'est déjà fait : on a fait une disjonction de cas sur $y \in \mathbb{Q}$ ou $y \notin \mathbb{Q}$. □

**Exercice 2.** Soit $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $a + b\sqrt{2} = 0$. Si $b \neq 0$, on a $\sqrt{2} = -\dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, ce qui est impossible. Ainsi, on a forcément $b = 0$. Il vient immédiatement alors que $a = 0$. □

**Exercice 3.** Raisonnons par contraposée. Soit $x \neq 0$. On a bien $|x| > \varepsilon$, donc il existe bien $\varepsilon$ (on prend $\varepsilon = \frac{|x|}{2} > 0$) tel que $|x| > \varepsilon$.
Par contraposée, on a donc montré que $\forall \varepsilon > 0, |x| \leqslant \varepsilon \Rightarrow x = 0$.
Et si on prend des inégalités strictes, ça ne change absolument rien, simplement il suffit de prendre des inégalités larges dans la rédaction ci-dessus (mais attention, on continue à prendre $\varepsilon > 0$.)
$\square$

**Exercice 4.** C'est le théorème de la division euclidienne.
On procède par analyse-synthèse : à savoir que nous allons chercher quelles valeurs sont susceptibles d'être valables, puis on essaiera de vérifier qu'elles fonctionnent bien. Nous nous attaquerons à l'unicité ensuite.
Supposons que l'on a l'existence de $(q, r) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ avec $0 \leqslant r \leqslant b - 1$ tel que $a = bq + r$. Alors on a

$$\frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}.$$

Comme $0 \leqslant \frac{r}{b} < 1$, on a $q \leqslant q + \frac{r}{b} < q + 1$. Ainsi, $q = \lfloor q + \frac{r}{b} \rfloor \in \mathbb{N}$, autrement dit $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$.
Ensuite remarquons que $r = a - bq = a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ semble convenir.
Vérifions que cela fonctionne. Prenons $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ et $r = a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. On a bien évidemment

$$bq + r = b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor + a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = a.$$

De plus, $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \in \mathbb{N}$.
Enfin,

$$\frac{a}{b} - 1 < \lfloor \frac{a}{b} \rfloor \leqslant \frac{a}{b}$$

donc en multipliant par $-b < 0$ et en ajoutant $a$, on a

$$-a + b + a = b > r \geqslant -a + a = 0$$

ce qui est équivalent à $0 \leqslant r < b - 1$ car $r$ est un entier. Autrement dit $r = a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor \in [\![0, b - 1]\!]$.
Maintenant, démontrons l'unicité. Supposons qu'il existe deux couples $(q, r)$ et $(q', r')$ qui satisfont ce résultat.
On a alors $bq + r = bq' + r$. Ainsi, $b(q - q') = r' - r$.
Or, on a $0 \leqslant r' < b$, donc $-r \leqslant r - r' \leqslant b - r$. Comme $0 \leqslant r < b$, on a $0 \geqslant -r > -b$, donc

$$-b < r - r' < 0.$$

Cependant, $q - q' \neq 0$, comme $q - q' \in \mathbb{Z}$, on a $b(q - q') \geqslant b$ ou $b(q - q') \leqslant -b$. Il est donc impossible que $r - r' = b(q - q')$ sauf si $q - q' = 0$. Ainsi, on a $q = q'$, donc $r = r'$. Il y a donc bien unicité du couple. $\square$

## 2. Quelques résolutions d'équations pour voir si on a perdu la main

**Exercice 5.** $(E_1)$ $x^2 - 8x + 11 = 4$

L'équation $x^2 - 8x + 11 = 4$ est équivalente à l'équation $x^2 - 8x + 7 = 0$. On applique la méthode vue en cours (et en terminale) pour résoudre celle-ci

Le discriminant de cette équation vaut $64 - 28 = 36 = 6^2$. Puisque le discriminant est positif, on sait que cette équation admet deux solutions réelles qui sont

$$\frac{8+6}{2} = 7 \qquad \text{et} \qquad \frac{8-6}{2} = 1$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $E_1$ est $S_1 = \{1, 7\}$.

*Remarque de rédaction :* l'énoncé ne mentionne pas de coefficients $a$, $b$ et $c$. Vous êtes donc fortement priés de ne pas écrire de chose du style $\Delta = b^2 - 4ac$, $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ qui n'ont ici aucun sens puisque $a$,$b$, $c$, $x_1$, $x_2$ n'ont jamais été définis.

$(E_2)$ $|x-1| = 2x-3$

On a $|x-1| = \begin{cases} x-1 \text{ si } x \geqslant 1 \\ -x+1 \text{ si } x < 1 \end{cases}$

Pour le cas $x < 1$ l'équation devient $-x+1 = 2x-3 \iff 3x = 4 \iff x = \dfrac{4}{3}$. Or cette valeur n'est pas dans le cas qui nous intéresse. Ainsi, il n'y a pas de solution sur $]-\infty, 1[$.

Pour le cas $x \geqslant 1$ l'équation devient $x - 1 = 2x - 3 \iff x = 2$. Or cette valeur est bien dans le cas qui nous intéresse.

Il n'y a donc qu'une seule solution, $x = 2$. Ainsi l'ensemble des solutions de l'équation $E_2$ est $S_2 = \{2\}$.

$(E_3)$ $|x-5| = |4-x^2| \iff \begin{cases} x-5 = & 4-x^2 \\ & \text{ou} \\ x-5 = & x^2-4 \end{cases}$

La première équation est $x-5 = 4-x^2$, c'est-à-dire $x^2+x-9 = 0$. Le discriminant de cette équation est 37, elle a donc deux solutions réelles qui sont $\frac{-1+\sqrt{37}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{37}}{2}$.

La deuxième équation est $x - 5 = x^2 - 4$, c'est-à-dire $x^2 - x + 1 = 0$, dont le discriminant est $-3$. Ainsi, elle n'a pas de solution réelle.

En conclusion l'ensemble des solutions de $E_3$ est $S_3 = \left\{\frac{-1-\sqrt{37}}{2}, \frac{-1+\sqrt{37}}{2}\right\}$.

$(E_4)$ $\sqrt{x-3} + \sqrt{x} = 3$

On va raisonner ici par implication (ou par analyse-synthèse). Soit $x$ une solution de l'équation $E_4$, remarquons que nécessairement $x \geqslant 3$. Alors

$$(\sqrt{x-3} + \sqrt{x})^2 = 9$$

i.e.

$$x - 3 + x + 2\sqrt{x^2-3x} = 9$$

Ainsi

$$2x - 12 = -2\sqrt{x^2-3x}$$

Soit

$$x - 6 = -\sqrt{x^2-3x}$$

Et, par suite

$$(x-6)^2 = (x^2-3x)$$

Ainsi, en développant et regroupant les termes, $x$ vérifie

$$36x = 144$$

C'est-à-dire $x = 4$. Ainsi, si $x$ est une solution de $E_4$ alors $x = 4$

Vérifions maintenant que 4 est bien solution de l'équation $E_4$. On a $\sqrt{4-3}+\sqrt{4} = 1+2 = 3$. 4 est bien solution de $E_4$. L'ensemble des solutions de l'équation $E_4$ est donc $S_4 = \{4\}$

$(E_5)$ $x^4 - 2x^2 - 15 = 0$

Soit $x$ une solution de l'équation $E_5$, et notons $X = x^2$. $X$ vérifie alors

$$X^2 - 2X - 15 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $4+60 = 64 = 8^2$. Cette équation admet donc deux solutions qui sont

$$\frac{2+8}{2} = 5 \qquad \text{et } \frac{2-8}{2} = -3$$

Ainsi, $x$ est solution de l'équation $E_5$ si et seulement si $\{x^2 \in \{-3, 5\}$. Comme $x^2 \geqslant 0$ on en déduit que $x^2 = 5$, c'est-à-dire $x \in \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

En conclusion l'ensemble des solutions de l'équation $E_5$ est $S_5 = \{-\sqrt{5}, \sqrt{5}\}$

□

**Exercice 6.** (I$_1$)$x^2 - x > 2$

L'inéquation $x^2 - x > 2$ est équivalente à l'inéquation $x^2 - x - 2 > 0$.

Les racines du polynôme $x^2 - x - 2$ sont $-1$ et 2. Ainsi $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$. Notre inéquation est donc équivalente à

$$(x+1)(x-2) > 0$$

On sait qu'un produit de deux termes est strictement positif si et seulement si les termes sont non-nuls et de même signe. Ici on a donc

$$(x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow ((x > -1 \text{ et } x > -2) \text{ ou } (x < -1 \text{ et } x < 2))$$

Ainsi l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S_1 = ]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[$.

(I$_2$)$\sqrt{x-1} \geqslant \sqrt{4x-1}$

Remarquons que si $x$ est solution de cette inéquation alors $x \geqslant 1$. Mais, si $x \geqslant 1$ alors $4x > x$, d'où $4x - 1 > x - 1 \geqslant 0$ et, par suite, $\sqrt{x-1} < \sqrt{4x-1}$.

Ainsi l'inéquation $I_2$ n'a pas de solutions sur $\mathbb{R}$. L'ensemble des solutions de $I_2$ est donc $I_2 = \emptyset$.

(I$_3$)$\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}} < 1$

Remarquons que si $x$ est solution de cette inéquation alors $x \neq -2$ et $\dfrac{x+1}{x+2} \geqslant 0$, i.e $x \geqslant -1$ ou $x < -2$.

Comme tous les éléments sont positifs, comme la fonction carrée est strictement croissante, on a

$$\frac{x+1}{x+2} < 1 \Longleftrightarrow \frac{x+1}{x+2} - 1 < 0 \Longleftrightarrow \frac{-1}{x+2} < 0 \Longleftrightarrow x+2 > 0 \Longleftrightarrow x > -2.$$

L'ensemble des solutions de l'inéquation $I_3$ est donc $S_3 = ]-1, +\infty[$.

□

**Exercice 7.** 1. On commence par remarquer que pour que l'équation ait un sens, on doit avoir $x-2 \neq 0$, $x+2 \neq 0$ et $x^2-4 \neq 0$. Ainsi, on doit avoir $x \in D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$.

Une fois ceci remarqué, on peut tout multiplier par $(x-2)(x+2) = x^2 - 4 \neq 0$. L'équation est donc équivalente à

$$(x+2)^2 - (x-2)^2 = 8x.$$

Ce qui se simplifie en $0 = 0$.

Tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ est solution. $\square$

2. Remarquons là encore qu'il faut que $3 + x \neq 0$, $2 + x \neq 0$ et $1 + x \neq 0$. Ainsi, on a forcément $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$.

Ensuite, le plus simple est encore une fois de faire disparaitre les dénominateurs en multipliant tout par $(1 + x)(2 + x)(3 + x) \neq 0$.

Ainsi, l'équation est équivalente à

$$(3-x)(2+x)(1+x)-(3+x)(2+x)(1+x) = (2-x)(1+x)(3+x)+(1-x)(2+x)(3+x).$$

En factorisant à gauche et à droite, on trouve l'équation équivalente

$$-2x(2 + x)(1 + x) = (3 + x)[(2 + x - x^2) + (2 - x - x^2)]$$

soit

$$-2x(2 + 3x + x^2) = (3 + x)(4 - 2x^2).$$

En développant, on obtient l'équivalence avec

$$-4x - 6x^2 - 2x^3 = 12 + 4x - 6x^2 - 2x^3.$$

Après simplification, l'équation équivalente est

$$8x + 12 = 0.$$

Seul $-\dfrac{3}{2}$ est solution. $\square$

3. Appelons $(E)$ cette équation. Elle n'a de sens que si $x - 1 \neq 0$, donc $x \neq 1$ et si $1 - \dfrac{x}{x-1} \neq 0$, c'est-à-dire si $\dfrac{x}{x-1} \neq 1$ ce qui n'arrive jamais.

Ainsi, l'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ensuite, arrangeons un peu l'écriture. On a

$$(E) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x-1-x} + x = 0,$$

donc

$$(E) \Leftrightarrow 1 - x + x = 0.$$

Pour finir $(E) \Leftrightarrow 1 = 0$ donc l'équation n'admet aucune solution. $\square$

4. Notons $(I)$ cette inéquation.

L'inéquation n'a de sens que lorsque $x^2-3x+2 \neq 0$. Comme $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$ (à détailler si besoin) c'est lorsque $x \notin \{1, 2\}$.

**Attention : l'idée catastrophique est de multiplier par $x^2 - 3x + 2$ pour faire disparaitre le dénominateur, puisque le signe de cette quantité change en fonction de $x$ !**

On a $(I) \Leftrightarrow \dfrac{3x+2}{x^2-3x+2} - 1 < 0$.

Autrement dit
$$(I) \Leftrightarrow \frac{3x+2-(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2} < 0.$$

Ce qui s'arrange en
$$(I) \Leftrightarrow \frac{-x^2+6x}{x^2-3x+2} < 0.$$

En factorisant
$$(I) \Leftrightarrow \frac{-x(x-6)}{(x-1)(x-2)} < 0.$$

Le plus simple pour se convaincre de la fin est de faire un tableau de signe. On trouve alors que l'ensemble solution est $]-\infty, 0[\cup]1,2[\cup]6,+\infty[$. $\square$

5. Il y a en réalité deux inéquations qui n'existent que si $x-5 \neq 0$, soit sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$.

   La première $(I_1) : 2 < \dfrac{x-3}{x-5}$. On a
$$(I_1) \Leftrightarrow \frac{x-3-2(x-5)}{x-5} > 0.$$

   On simplifie en
$$(I_1) \Leftrightarrow \frac{7-x}{x-5} > 0.$$

   L'ensemble solution de $(I_1)$ est donc $]5,7[$ (faire un tableau de signe si vous avez le moindre doute).

   La deuxième $(I_2) : \dfrac{x-3}{x-5} < 3$. On a
$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{x-3-3(x-5)}{x-5} \leqslant 0.$$

   On simplifie en
$$(I_2) \Leftrightarrow \frac{2(6-x)}{x-5} \leqslant 0.$$

   L'ensemble solution de $(I_2)$ est donc $]-\infty, 5[\cup[6,+\infty[$ (ici aussi, faire un tableau de signe si vous avez le moindre doute).

   Les deux doivent être vraies simultanément, donc l'ensemble solution est $[6,7[$. $\square$

6. Notons $(I)$ cette inéquation.

   On peut distinguer les cas selon le signe de $x^2-5x+4 = (x-1)(x-4)$.

   En effet, pour $x \in ]-\infty;1] \cap [4;+\infty[$, on a $x^2-5x+4 \geqslant 0$, donc l'équation devient $(I) : x^2-3x \geqslant x^2-5x+4$ autrement dit $2x \geqslant 4$ soit $x \geqslant 2$.

   Ainsi, tout $[4;+\infty[$ est solution.

   Par ailleurs, pour le cas où $x \in ]1,4[$, on a
$$x^2-3x \geqslant -x^2+5x-4,$$

   ce qui se traduit en
$$x^2-4x+2 \geqslant 0.$$

   Regardons le discriminant $\Delta = 16-4\times 2 = 8$. Les deux racines sont $x_1 = 2-\sqrt{2}$ et $x_2 = 2+\sqrt{2}$.

Donc l'inéquation est vérifiée si $x \in ]-\infty; 2-\sqrt{2}] \cup [2+\sqrt{2}; +\infty[$. Mais n'oublions pas que dans ce cas, $x \in ]1, 4[$. Ainsi tout $x \in [2+\sqrt{2}, 4[$ est solution.

Le bilan est donc que $[2+\sqrt{2}, +\infty[$ est l'ensemble solution. □

**Exercice 8.** 1. On peut penser à tout développer et à étudier le trinôme du second degré obtenu. Ou alors, en nommant $(E_m)$ cette équation on peut remarquer que

$$(E_m) \Leftrightarrow (2mx-3)^2 - (x+m)^2 = 0.$$

En reconnaissant une identité remarquable,

$$(E_m) \Leftrightarrow ((2m-1)x-3-m)((2m+1)x-3+m) = 0.$$

Ainsi,

$$(E_m) \Leftrightarrow (2m-1)x = 3+m \text{ ou } (2m+1)x = 3-m.$$

Si $m = \frac{1}{2}$, une solution $\frac{5}{4}$. Si $m = -\frac{1}{2}$, une solution $-\frac{5}{4}$. Si $m$ est différent de ces deux valeurs, deux solutions $\frac{3+m}{2m-1}$ et $\frac{3-m}{2m+1}$. □

2. Une bonne idée est de tout multiplier par $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$ (parce que les réels $a, b$ et $c$ sont deux à deux distincts), ce qui nous donner l'équation équivalente :

$$[a(b-c) - b(a-c) + c(a-b)]x = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Cela se simplifie en

$$0 = (a-b)(a-c)(b-c).$$

Comme dit précédemment, on a $(a-b)(a-c)(b-c) \neq 0$, donc il n'y a pas de solutions. □

3. Pas forcément besoin de factoriser pour une fois. En développant tout on obtient

$$2(m+p)x + m^2 - p^2 = m+p.$$

On arrange cette équation en

$$2(m+p)x = (m+p)(1-m+p).$$

Si $m = -p$, tout $x \in \mathbb{R}$ est solution (c'est l'équation $0 = 0$). Sinon, une seule solution $\frac{1+p-m}{2}$. □

**Exercice 9.** 1. Notons $(E_m)$ cette équation.

Il est déjà clair que si $\alpha \in \{-2, 1\}$, alors l'équation n'a pas de sens, donc on ne peut pas trouver de réel $m$ tel que $\alpha$ soit solution.

En supposant $x \notin \{-2, 1\}$, on a $(E_m) \Leftrightarrow 2m(x-1) = (m-5)(x+2)$, soit

$$(E_m) \Leftrightarrow m(2x-2-x-2) = -5(x+2).$$

Autrement dit

$$(E_m) \Leftrightarrow m(x-4) = -5(x+2).$$

Ainsi, 4 ne peut jamais être solution de cette équation, et si $\alpha \notin \{-2, 1, 4\}$ alors $\alpha$ peut-être solution de $(E_m)$. Pour être complet (même si ce n'est pas demandé), on prend $m = \frac{-5(\alpha+2)}{\alpha-4}$. □

2. Pour obtenir deux racines réelles distinctes, il faut déjà que le discriminant de ce trinôme soit strictement positif. Or $\Delta = 25 - 4 \times 3(m+7) = -59 - 12m$. Ainsi, on doit avoir $m < -\frac{59}{12}$.

   Dans ce cas, les deux racines sont $\frac{5-\sqrt{\Delta}}{6}$ et $\frac{5+\sqrt{\Delta}}{6}$. Pour qu'elles soient toutes les deux strictement positives, il faut en plus que
   $$5 - \sqrt{\Delta} > 0$$
   pour que la plus petite des deux le soit.

   On a alors a avoir $\sqrt{\Delta} < 5$, ce qui est équivalent à $\Delta < 25$ (puisque tous les termes sont positifs).

   Cela devient tout simplement $-12(m+7) < 0$ c'est-à-dire $m > -7$.

   Ainsi, l'équation admet deux racines strictement positives si et seulement si $m \in \left]-7, -\frac{59}{12}\right[$. $\square$

3. Si $m = 3$, on a une infinité de solutions, on peut donc exclure ce cas. Si $m \neq 3$, c'est le même principe en plus calculatoire que la question précédente. Le discriminant doit être strictement positif, soit
   $$\Delta = (1-2m)^2 - 4(m-3)(m+1) = 1 - 4m + 4m^2 - 4(m^2 - 2m - 3) = 4m + 13.$$
   On doit avoir $m > -\frac{13}{4}$ pour avoir deux racines réelles distinctes.

   Ensuite, les deux racines sont $\frac{2m-1-\sqrt{\Delta}}{2(m-3)}$ et $\frac{2m-1+\sqrt{\Delta}}{2(m-3)}$.

   Dans le cas où $m > 3$, la plus petite des deux est : $\frac{2m-1-\sqrt{\Delta}}{2(m-3)}$, donc on doit avoir $2m - 1 + \sqrt{\Delta} > 0$, ce qui est toujours vrai (somme de termes strictement positifs).

   Dans le cas où $m < 3$, la plus petite des deux est : $\frac{2m-1+\sqrt{\Delta}}{2(m-3)}$, donc on doit avoir $2m - 1 + \sqrt{\Delta} < 0$. Si $2m - 1 \geqslant 0$, soit $m \geqslant \frac{1}{2}$, c'est impossible Dans le cas où $m < \frac{1}{2}$, multiplions par $(2m-1) - \sqrt{\Delta} < 0$ cette condition, ce qui transforme en condition équivalente $(2m-1)^2 - \Delta > 0$, soit
   $$4m^2 - 4m + 1 - 4m - 13 > 0$$
   soit $4(m^2 - 2m - 3) > 0$, ce qui est vrai si $m < -1$ ou $m > 3$. Le deuxième cas étant exclu, il ne reste que $m < -1$.

   En conclusion, on trouve que $m$ doit être dans $\left]-\frac{13}{4}, -1\right[ \cup \left]3, +\infty\right[$. $\square$

4. Pour que cette inéquation admette $\mathbb{R}$ comme solution, il faut avoir un trinôme du second degré (donc $m \neq -3$) il faut que le discriminant soit strictement négatif (pour éviter l'annulation ou le changement de signe) et que le coefficient dominant soit strictement positif (donc $m > -3$).

   Regardons le discriminant : $\Delta = 4(m+1)^2 + 4(m+3)(m+1) = 4(m^2 + 2m + 1 + m^2 + 4m + 3) = 8(m^2 + 3m + 2)$.

   Les deux racines du discriminant sont $-1$ et $-2$, donc il est strictement négatif lorsque $-2 < m < -1$.

   En conclusion, on doit avoir $-2 < m < -1$. $\square$

**Exercice 10.** 1. Pour que cette équation que nous appellerons $(E)$ ait un sens, il faut que $x^2 - 3x + 8 \geqslant 0$. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = 9 - 32 = -23 < 0$, donc cette quantité est toujours strictement positive. Ainsi, cette équation a un sens pour tout $x$ réel.

Elevons au carré, on a
$$(E) \Rightarrow x^2 - 3x + 8 = (x-4)^2.$$
Donc
$$(E) \Rightarrow x^2 - 3x + 8 = x^2 - 8x + 16.$$
Ainsi,
$$(E) \Rightarrow 5x = 8.$$
Donc
$$(E) \Rightarrow x = \frac{8}{5}.$$

**Cependant, comme nous avons élevé cette équation au carré, nous avons perdu l'équivalence. Nous devons donc vérifier cette solution.**

On a $\frac{8}{5} - 4 < 0$ alors que $\sqrt{\left(\frac{8}{5}\right)^2 - 3\left(\frac{5}{8}\right) + 8} > 0$ : peu importe la valeur, ces deux quantités ne peuvent pas être égales.

Cette équation n'a donc pas de solutions. □

2. Remarquons que le discriminant de $x^2 + x + 4$ est $1 - 4 \times 4 = -15 < 0$, donc cette quantité est positive pour tout $x$ réel. L'inéquation que nous noterons $(I)$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

Ensuite, on remarque que $(I) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + x + 4} - 3 > 0$.

Multiplions tout ça par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2 + x + 4} + 3 > 0$ donc sans changer le sens de l'inégalité.

On a alors, $(I) \Leftrightarrow x^2 + x + 4 - 9 > 0$. Autrement dit
$$(I) \Leftrightarrow x^2 + x - 5 > 0$$

Notons $\Delta$ le discriminant de ce trinôme : on a $\Delta = 21$ donc il admet deux racines $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$ et $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$. L'ensemble solution est $\left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{21}}{2}\right[ \cup \left]\frac{-1+\sqrt{21}}{2}, +\infty\right[$.

**Il faut faire attention à vérifier auparavant que tout est du même signe si vous tenter d'appliquer la fonction carrée (et selon le cas, changer ou non le sens de l'inégalité). L'avantage de la quantité conjuguée est que son signe étant évident, il n'y a pas besoin de se poser de questions.** □

3. Notons $(E)$ cette équation.

Elevons la au carré. On a
$$(E) \Leftarrow 4 + \sqrt{x^4 + x^2} = 4 - 4x + x^2$$
puis
$$(E) \Leftarrow \sqrt{x^4 + x^2} = x^2 - 4x$$
que nous élevons une nouvelle fois au carré
$$(E) \Leftarrow x^4 + x^2 = x^4 - 8x^3 + 16x^2.$$

$$(E) \Leftarrow 8x^3 - 15x^2 = 0.$$

En factorisant, on a

$$(E) \Leftarrow x^2(8x - 15) = 0.$$

Ainsi, les solutions de $(E)$ sont à chercher parmi les solutions de cette dernière équation. On trouve 0 et $\dfrac{15}{8}$.

0 fonctionne bien dans $(E)$, mais $2 - \dfrac{15}{8} = \dfrac{1}{8}$, alors que $\sqrt{4 + \sqrt{\left(\dfrac{15}{8}\right)^4 + \left(\dfrac{15}{8}\right)^2}} > 2$, ainsi $\dfrac{15}{8}$ n'est pas solution.

En conclusion, 0 est l'unique solution. □

4. Notons $(I)$ cette inéquation. Elle n'a de sens que si $x+1 \geqslant 0$ et $x \geqslant 0$, donc si $x \in \mathbb{R}_+$. On a

$$(I) \Leftrightarrow 2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} - 1 \geqslant 0.$$

En multipliant tout ça par $2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x} + 1 > 0$, on obtient l'inéquation

$$(I) \Leftrightarrow 4(x+1) - 8\sqrt{x(x+1)} + 4x - 1 \geqslant 0.$$

Soit

$$(I) \Leftrightarrow 8x + 3 - 8\sqrt{x(x+1)} \geqslant 0.$$

En multipliant tout ça par $8x + 3 + 8\sqrt{x(x+1)} > 0$, on obtient l'inéquation

$$(I) \Leftrightarrow 64x^2 + 48x + 9 - 64x(x+1) \geqslant 0.$$

Autrement dit,

$$(I) \Leftrightarrow -16x + 9 \geqslant 0.$$

L'ensemble solution est $\left[0; \dfrac{9}{16}\right]$. □

5. Aucune difficulté là-dessous, juste un gros tableau de signe à faire après avoir factorisé chaque terme du mieux de vos possibilités.

On a $\dfrac{(x^4 + 2x^2 - 3)(x^5 + x^3 - 2x)}{x^4 + 3x^2 - 10} = x\dfrac{(x^4 + 2x^2 - 3)(x^4 + x^2 - 2)}{x^4 + 3x^2 - 10}$.

On pose $X = x^2$, comme ça $x^4 + 2x^2 - 3 = X^2 + 2X - 3$. On factorise ce terme en utilisant les techniques habituelles.

On a alors $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$ donc $x^4 + 2x^2 - 3 = (x^2 - 1)(x^2 + 3) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 3)$.

De même, on trouve que $x^4 + x^2 - 2 = (x^2 - 1)(x^2 + 2) = (x - 1)(x1)(x^2 + 2)$.

Pour finir, on trouve que $x^4 + 3x^2 - 10 = (x^2 - 2)(x^2 + 5) = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 5)$.

Ainsi, on a

$$\frac{(x^4 + 2x^2 - 3)(x^5 + x^3 - 2x)}{x^4 + 3x^2 - 10} = x\frac{(x - 1)^2(x + 1)^2(x^2 + 2)(x^2 + 3)}{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})(x^2 + 5)}.$$

Finalement, un rapide tableau de signe permettra de conclure, étant donné que pas mal de termes sont positifs (attention à bien exclure 1 et $-1$ de l'ensemble solution puisque la quantité s'annule pour ces valeurs).

L'ensemble solution est $] - \sqrt{2}, 0] \cup ]\sqrt{2}, +\infty[ \cup \{-1, 1\}$. □

**Exercice 11.** 1. Pour que l'équation ait un sens on doit avoir $x(3x+5) > 0$, soit $x < -\frac{5}{3}$ ou $x > 0$ ainsi que $2(x+3)(x-7) > 0$ soit $x < -3$ ou $x > 7$.

Ainsi, cette équation n'est définie que pour $x \in ]-\infty; -3[\cup]7; +\infty[$.

Ensuite, on prend l'exponentielle, pour obtenir l'équation équivalente

$$x(3x+5) = 2(x+3)(x-7).$$

On l'arrange en

$$x^2 + 13x + 42 = 0.$$

Posons l'encombrant discriminant $\Delta = 169 - 4 \times 42 = 1$. On a donc deux solutions $-6$ et $-7$ qui sont toutes deux dans l'intervalle de définition. □

2. Poser $X = x^2$, l'équation équivalente d'inconnue $X$

$$2X^2 + 5X - 8 = X^2 + 4X + 4.$$

Soit,

$$X^2 + X - 12 = 0.$$

On trouve deux solutions $X = 3$ ou $X = -4$, ce qui devient $x^2 = 3$ ou $x^2 = -4$. La deuxième est impossible, mais la première entraine deux solutions $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{3}$. □

3. Remarquons que cette équation n'est définie que pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $X = \ln(x)$.

On trouve l'équation équivalente $X^2 - 4X + 3 = 0$ qui a deux solutions 1 et 3. Ainsi, on a $\ln(x) = 1$ ou $\ln(x) = 3$. En prenant l'exponentielle, on trouve deux solutions $e$ et $e^3$. □

4. Cette fois-ci, on pose $X = e^x$ pour obtenir

$$X^2 - 2X - 8 = 0.$$

On trouve deux solutions $X = 4$ et $X = -2$, ce qui se transforme en

$$e^x = 4 \text{ ou } e^x = -2.$$

Seule la première donne une solution, $x = \ln(4) = 2\ln(2)$. □

5. Multiplions tout ça par $e^x$ pour obtenir

$$e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0.$$

Posons $X = e^x$, ce qui donne

$$X^2 - (e+1)X + e = 0.$$

Le discriminant est $\Delta = (e+1)^2 - 4e = (e-1)^2$. On trouve deux solutions, 1 et $e$.

On doit donc avoir

$$e^x = 1 \text{ ou } e^x = e.$$

En prenant le logarithme de ces quantités, on trouve

$$x = 0 \text{ ou } x = 1$$

qui sont les deux solutions de cette équation. □

6. Le cas $x = 0$ est bien solution.

   Pour $x > 0$, passons en notation exponentielle, l'équation se réécrit

$$e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})}.$$

   En prenant le logarithme de cette équation, on arrive à

$$\sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x).$$

   Ce qui est équivalent à

$$\frac{1}{2}\ln(x)\sqrt{x}\,(2 - \sqrt{x}) = 0.$$

   Ce qui est équivalent à

$$\ln(x) = 0 \text{ ou} \sqrt{x} = 0 \text{ ou } \sqrt{x} = 2.$$

   La première donne $x = 1$, la seconde n'a pas de solution (puisque $x > 0$), la troisième une seule $x = 4$ (car $x > 0$).

   En n'oubliant pas la toute première, on trouve trois solutions : $0, 1$ et $4$. □

## 3. Pour s'assurer qu'on maitrise bien les réels

**Exercice 12.**

- 0 est un majorant de $E$.

$$\forall x \in E, \quad x \leqslant 0$$

  Par exemple $\mathbb{R}_-$ ou $\{-2\}$

- 1 n'est pas un minorant de $E$.

$$\exists x \in E, \quad x < 1$$

  Par exemple $\mathbb{R}$ ou $]0, 2[$

- $\pi$ est le maximum de $E$.

$$\pi \in E, \quad \forall x \in E, \quad x \leqslant \pi$$

  Par exemple $]-\infty, \pi]$ ou $\{\pi\}$

- $E$ est majoré.

$$\exists M \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E, \quad x \leqslant M$$

  Par exemple $\{0\}$ ou $\{\frac{2}{n+1}\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$

- $E$ n'est pas minoré.

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in E, \quad x < m$$

  Par exemple $\mathbb{R}$ ou $\{\ln\left(\frac{1}{n}\right)\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\}$

- $E$ est borné.

$$\exists R \in \mathbb{R}_+, \quad \forall x \in E, \quad |x| \leqslant R$$

  Par exemple $[0, 1]$ ou $\{1, 2, 10^{99}\}$

- $E$ n'est pas borné.
$$\forall R \in \mathbb{R}_+, \quad \exists x \in E, \quad |x| > R$$
Par exemple $\mathbb{Q}$ ou $\{(-1)^n \times n\ ,\ n \in \mathbb{N}\}$.

□

**Exercice 13.** On a $2 \leqslant y \leqslant 4$, donc $2 + x \leqslant x + y \leqslant 4 + x$. Or comme $-1 \leqslant x \leqslant 2$, on a $1 \leqslant 2 + x$ et $4 + x \leqslant 6$, donc
$$1 \leqslant x + y \leqslant .6$$
Ensuite, on a $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Comme $2 \leqslant y \leqslant 4$, on a $y > 0$ donc $-y \leqslant xy \leqslant 2y$. De plus $-y \geqslant -4$ et $2y \leqslant 8$, donc
$$-4 \leqslant xy \leqslant 8.$$
**Attention à ne pas multiplier par $x$ l'inégalité de $y$ car $x$ n'est pas de signe constant. Par ailleurs, comme dit en cours, multiplier des inégalités terme à terme est une énorme bêtise que vous ne commettrez bien entendu jamais.**
Ensuite, on a $-1 \leqslant x \leqslant 2$. Comme $2 \leqslant y \leqslant 4$, on a $y > 0$ donc $\frac{1}{4} \leqslant \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{2}$. Comme $\frac{1}{y} > 0$, on a $-\frac{1}{y} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant \frac{2}{y}$. Et comme $-\frac{1}{y} \geqslant -\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{y} \leqslant 1$, donc
$$-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{y} \leqslant 1.$$
Pour finir, on a $-1 \leqslant x \leqslant 2$, et $x \neq 0$. On va diviser le problème en deux : si $-1 \leqslant x < 0$, alors $\frac{1}{x} \leqslant -1$, donc comme $2 \leqslant y \leqslant 4$, on a $\frac{2}{x} \geqslant \frac{y}{x} \geqslant \frac{4}{x}$ donc $\frac{y}{x} \leqslant -2$.
Si $0 < x \leqslant 2$, on a $\frac{1}{x} \geqslant \frac{1}{2}$. Et comme $2 \leqslant y \leqslant 4$, on a $\frac{2}{x} \leqslant \frac{y}{x} \leqslant \frac{4}{x}$, on a simplement $\frac{y}{x} \geqslant 1$.
Ainsi on a
$$\frac{y}{x} \leqslant -2 \text{ ou } \frac{y}{x} \geqslant 1.$$
**Pour les divisions aussi, la division terme à terme d'inégalité est une énormité [1].**

□

**Exercice 14.**
- $A$ est majorée et minorée. $\sup(A) = \max(A) = 10$, $\inf(A) = 2$ $A$ n'a pas de minimum.
- $B$ n'est ni majorée, ni minorée. En effet si $n \in \mathbb{N}$ on a $4n \cos\left(\frac{4n\pi}{2}\right) = 4n$ et $(4n+2)\cos\left(\frac{(4n+2)\pi}{2}\right) = -(4n+2)$. D'où, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $4n \in B$ et $-(4n+2) \in B$
- $C$ est majorée et minorée. $\sup(C) = \max(C) = \frac{1}{9}$, $\inf(C) = 0$, $C$ n'a pas de minimum.
- $D$ est minorée mais pas majorée. $\inf(D) = 0$. $D$ n'a pas de minimum.
- $E$ est majorée et minoré. $\sup(E) = \max(E) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\inf(E) = \min(E) = -1$.
- $F$ est majoré et minoré. $\sup(F) = \frac{1}{2}$, $\inf(F) = 0$. $F$ n'a ni maximum, ni minimum.

1. On peut imaginer écrire des théorèmes là-dessus, mais comme évoqué en cours, il y a tellement de règles qu'il est aussi simple de le faire directement.

- $G$ est majoré et minoré. $\sup(G) = \max(G) = \dfrac{\cos(1)}{1}$, $\inf(G) = \min(G) = \dfrac{cos(3)}{3}$.

□

**Exercice 15.** Soit $(a, b) \in \mathbb{R}$. On a, par définition

$$\max(a, b) = \begin{cases} a \text{ si } a \geqslant b \\ b \text{ si } a < b \end{cases}$$

On va alors étudier $\frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$ quand $a \geqslant b$ et quand $a < b$.

- Si $a \leqslant b$

  Alors $a - b \leqslant 0$ d'où $|a - b| = b - a$ Ainsi

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + b - a) = b$$

- Si $a > b$

  Alors $a - b > 0$ d'où $|a - b| = a - b$ Ainsi

$$\frac{1}{2}(a + b + |a - b|) = \frac{1}{2}(a + b + a - b) = a$$

On a donc bien

$$\max(a, b) = \frac{1}{2}(a + b + |a - b|)$$

□

**Exercice 16.** 1. On remarque qu'il va falloir distinguer selon la position de $x$ par rapport à $-8$, $0$ et $3$ soit 4 cas.

On a alors $A(x) = \begin{cases} -5 - 3x & \text{si } x < -8 \\ 11 - x & \text{si } -8 \leqslant x < 0 \\ 11 + x & \text{si } 0 \leqslant x < 3 \\ 3x + 5 & \text{si } 3 \leqslant x \end{cases}$ □

2. a. Il faut résoudre cette équation dans chaque cas ($x < -8$, $-8 \leqslant x < 0$, $0 \leqslant x < 3$ et $3 \leqslant x$). On découvre alors que les solutions ne sont jamais dans l'intervalle sur lequel on est placé.

   b. C'est impossible, car $\forall x \in \mathbb{R}, A(x) \geqslant 0$.

   c. C'est aussi impossible, car pour que la somme de trois termes positifs soit nulle, tous doivent être simultanément nuls, ce qui n'arrive que si $x$ est en même temps égal à $-8$, $0$ et $3$.

   d. Comme pour le premier cas, il faut résoudre 4 équations.

      (i) Dans le cas $x < -8$, cela revient à résoudre $-5 - 3x = 4x - 20$ soit $x = \frac{15}{7}$ qui n'est pas dans l'intervalle considéré.

      (ii) Dans le cas $-8 \leqslant x < 0$, cela revient à résoudre $11 - x = 4x - 20$ soit $x = \frac{31}{5}$ qui n'est pas dans l'intervalle considéré.

      (iii) Dans le cas $0 \leqslant x < 3$, cela revient à résoudre $11 + x = 4x - 20$ soit $x = \frac{31}{3}$ qui n'est pas dans l'intervalle considéré.

      (iv) Dans le cas $3 \leqslant x$, cela revient à résoudre $3x + 5 = 4x - 20$ soit $x = 25$ qui est dans l'intervalle considéré.

   L'unique solution est donc 25.

□

**Exercice 17.** 1. C'est équivalent à deux équations

$$2x + 7 = 1 \text{ ou } 2x + 7 = -1.$$

On trouve

$$x = -3 \text{ ou } x = -4.$$

□

2. C'est équivalent à deux équations

$$3x - 9 = x - 1 \text{ ou } 3x - 9 = -x + 1.$$

On trouve

$$x = 4 \text{ ou } x = \frac{5}{2}.$$

□

3. Soit on utilise la technique de l'exercice précédent (on divise ça en trois cas, $x < 1$, $1 \leqslant x < 4$ et $x \geqslant 4$), soit on peut faire, en notant $(E)$ l'équation

$$(E) \Rightarrow 2x - 8 = 9 - |x - 1| \text{ ou } 2x - 8 = -9 + |x - 1|.$$

On perd l'équivalence car rien n'assure la positivité de $9 - |x - 1|$.

Ce qui s'arrange en

$$(E) \Rightarrow |x - 1| = -2x + 17 \text{ ou } |x - 1| = -2x - 1.$$

Et donc

$$(E) \Rightarrow x - 1 = -2x + 17 \text{ ou } x - 1 = 2x - 17 \text{ ou } x - 1 = -2x - 1 \text{ ou } x - 1 = 2x + 1.$$

$$(E) \Rightarrow x = 6 \text{ ou } x = 16 \text{ ou } x = 0 \text{ ou } x = -2.$$

En vérifiant les 4 candidats précédents, on trouve que uniquement 0 et 6 sont solutions.

La technique utilisée dans l'exercice précédent nous aurait évité la vérification au pris de réécrire proprement les équations avec leur domaine de validité. □

**Exercice 18** (A propos de la partie entière)**.** 1. Revenons à la définition de croissance. Soit $x$ et $y$ deux réels tels que $x \leqslant y$.

On a alors $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$, autrement dit $\lfloor x \rfloor \leqslant x \leqslant y < \lfloor y \rfloor + 1$.

Ce qui nous intéresse est simplement $\lfloor x \rfloor < \lfloor y \rfloor + 1$. Comme $\lfloor x \rfloor$ et $\lfloor y \rfloor$ sont des entiers relatifs, cette inégalité est équivalente à $\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor y \rfloor$.

Attention, la dernière étape n'est vraie que parce qu'il s'agit d'entiers ! □

2. On pourrait croire que ça fait 0, d'ailleurs, si $x \in \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor = x$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = 0$ car $-x \in \mathbb{Z}$.

Si $x \notin \mathbb{Z}$, $\lfloor x \rfloor$ est l'unique entier tel que $\lfloor x \rfloor < x < \lfloor x \rfloor + 1$, donc $-\lfloor x \rfloor - 1 < -x < -\lfloor x \rfloor$.

Ainsi, si $x \notin \mathbb{Z}$, $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor - 1$, donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = -1$.

On a donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{si } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$ □

3. a. $\lfloor 2x+7\rfloor$ est l'unique entier relatif tel que $\lfloor 2x+7\rfloor \leqslant 2x+7 < \lfloor 2x+7\rfloor+1$ ce qui revient à
$$1 \leqslant 2x+7 < 2$$
soit
$$-3 \leqslant x < -\frac{5}{2}.$$
L'ensemble solution est donc $\left[-3;-\frac{5}{2}\right[$. □

b. $\lfloor -4x+2\rfloor$ est l'unique entier relatif tel que $\lfloor -4x+2\rfloor \leqslant -4x+2 < \lfloor -4x+2\rfloor+1$ ce qui revient à
$$10 \leqslant -4x+2 < 11$$
soit
$$-2 \geqslant x > -\frac{9}{4}.$$
L'ensemble solution est donc $\left]-\frac{9}{4};-2\right]$. □

4. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x\rfloor$ est l'unique entier relatif tel que $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor+1$, donc $2\lfloor x\rfloor \leqslant 2x$. Par ailleurs, $\lfloor 2x\rfloor \leqslant 2x < \lfloor 2x\rfloor+1$.

Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $2\lfloor x\rfloor \leqslant 2x < \lfloor 2x\rfloor+1$, soit
$$2\lfloor x\rfloor < \lfloor 2x\rfloor+1.$$
Comme il s'agit d'entiers, cette dernière inégalité est équivalente à
$$2\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor 2x\rfloor+1.$$
□

**Exercice 19.** On a
$$\begin{aligned}\frac{n^3}{n+1} &= \frac{n^3+n^2-n^2}{n+1}\\ &= \frac{n^3+n^2}{n+1}-\frac{n^2}{n+1}\\ &= n^2-\frac{n^2+n-n-1+1}{n+1}\\ &= n^2-\frac{n^2+n}{n+1}+\frac{n+1}{n+1}-\frac{1}{n+1}\\ &= n^2-n+1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$
Ainsi
$$\left\lfloor\frac{n^3}{n+1}\right\rfloor = \left\lfloor n^2-n+1-\frac{1}{n+1}\right\rfloor = n^2-n+1+\left\lfloor-\frac{1}{n+1}\right\rfloor = n^2-n$$
□

**Exercice 20.** Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
On a $n\lfloor x\rfloor \leqslant nx$. Ainsi $n\lfloor x\rfloor$ est un entier inférieur à $nx$, d'où $n\lfloor x\rfloor \leqslant \lfloor nx\rfloor$.
De plus on sait que $x < \lfloor x\rfloor+1$, d'où $nx < n\lfloor x\rfloor+n$.

Ainsi $\lfloor nx\rfloor - n\lfloor x\rfloor < n$. Or $\lfloor nx\rfloor - n\lfloor x\rfloor$ est un entier et on rappelle que, si $k$ est un entier alors l'inégalité $k < n$ est équivalente à $k \leqslant n-1$. On a donc $\lfloor nx\rfloor - n\lfloor x\rfloor \leqslant n-1$.

Si $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + \frac{1}{2}$ et $\lfloor y\rfloor \leqslant y < \lfloor y\rfloor + \frac{1}{2}$ alors
$\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor$, $\lfloor 2x\rfloor = 2\lfloor x\rfloor$ et $\lfloor 2y\rfloor = 2\lfloor y\rfloor$. On en déduit alors l'inégalité recherchée
Si $\lfloor x\rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor y\rfloor \leqslant y < \lfloor y\rfloor + \frac{1}{2}$ alors
$\lfloor x+y\rfloor \leqslant \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 1$ ,$\lfloor 2x\rfloor = 2\lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor 2y\rfloor = 2\lfloor y\rfloor$. On en déduit alors l'inégalité recherchée
Si $\lfloor x\rfloor \leqslant x < \lfloor x\rfloor + \frac{1}{2}$ et $\lfloor y\rfloor + \frac{1}{2} \leqslant y < \lfloor y\rfloor + 1$ on procède de manière similaire au cas précédent
Enfin si $\lfloor x\rfloor + \frac{1}{2} \leqslant x < \lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor y\rfloor + \frac{1}{2} \leqslant y < \lfloor y\rfloor + 1$ alors
$\lfloor x+y\rfloor = \lfloor x\rfloor + \lfloor y\rfloor + 2$, $\lfloor 2x\rfloor = 2\lfloor x\rfloor + 1$ et $\lfloor 2y\rfloor = 2\lfloor y\rfloor + 1$ On en déduit alors l'inégalité recherchée.
Dans tous les cas l'inégalité recherchée est vérifiée. □

**Exercice 21.** 1. Ne serait-ce pas une identité remarquable ?

En effet, cette inégalité est équivalente à $\frac{(a-b)^2}{2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{2} \geqslant 0$ qui est évidemment toujours vraie. □

2. Il faut remarque que comme $x, y, z$ sont des réels positifs, $xyz = \sqrt{xyz}^2 = (\sqrt{x}\sqrt{y})(\sqrt{x}\sqrt{z})(\sqrt{y}\sqrt{z})$ puis appliquer le résultat précédent trois fois.

On a $2(\sqrt{x}\sqrt{y}) \leqslant (x+y)$ donc $4(\sqrt{x}\sqrt{y})(\sqrt{x}\sqrt{z}) \leqslant (x+y)2(\sqrt{x}\sqrt{z}) \leqslant (x+y)(x+y)$ et il suffit de refaire cette démarche avec le troisième terme. □

## 4. Récurrences

**Exercice 22** (Suite de Fibonacci)**.** Pas de difficulté particulière... sauf dans l'énonciation !
L'idée est de poser $\mathcal{P}(n)$ : « $F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2$ et $F_{2n+2} = F_{n+1}(F_n + F_{n+2})$ ».
On calcule rapidement les premiers termes $F_2 = 1$, $F_3 = 2$, $F_4 = 3$ et $F_5 = 5$ d'après la relation de récurrence.
On voit alors immédiatement que $F_0^2 + F_1^2 = 1 = F_1$ et $F_1(F_0 + F_2) = F_2$ ce qui permet de voir que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a alors $F_{2(n+1)+1} = F_{2n+3} = F_{2n+2} + F_{2n+1}$.
En utilisant $\mathcal{P}(n)$, on a

$$F_{2n+3} = F_{n+1}(F_n + F_{n+2}) + F_n^2 + F_{n+1}^2.$$

Or $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$, donc

$$F_{2n+3} = F_{n+1}(2F_{n+2} - F_{n+1}) + (F_{n+2} - F_{n+1})^2 + F_{n+1}^2.$$

Autrement dit

$$F_{2n+3} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2.$$

Ensuite, on a $F_{2(n+1)+2} = F_{2n+4} = F_{2n+3} + F_{2n+2}$. En utilisant $\mathcal{P}(n)$ et ce qu'on vient de démontrer, on a

$$F_{2n+4} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+1}(F_n + F_{n+2}).$$

Or $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$, donc

$$F_{2n+4} = F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 + F_{n+1}(2F_{n+2} - F_{n+1}).$$

$$F_{2n+4} = F_{n+2}(F_{n+2} + 2F_{n+1}).$$

Or $F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$, donc

$$F_{2n+4} = F_{n+2}(F_{n+3} + F_{n+1}).$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_{2n+1} = F_n^2 + F_{n+1}^2 \text{ et } F_{2n+2} = F_{n+1}(F_n + F_{n+2}).$$

□

**Exercice 23.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n = (1+\sqrt{2})^{(2^n)} + (1-\sqrt{2})^{(2^n)}$ ».
On a $u_1 = 6$ et $(1+\sqrt{2})^{(2^1)} + (1-\sqrt{2})^{(2^1)} = 1 + 2\sqrt{2} + 2 + 1 - 2\sqrt{2} + 2 = 6$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a $u_{n+1} = u_n^2 - 2$. Donc d'après $\mathcal{P}(n)$, on a

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \left((1+\sqrt{2})^{(2^n)} + (1-\sqrt{2})^{(2^n)}\right)^2 - 2 \\
&= \left((1+\sqrt{2})^{(2^n)}\right)^2 + 2(1+\sqrt{2})^{(2^n)}(1-\sqrt{2})^{(2^n)} + \left((1-\sqrt{2})^{(2^n)}\right)^2 - 2 \\
&= (1+\sqrt{2})^{(2^{n+1})} + 2(1+\sqrt{2})^{(2^n)}(1-\sqrt{2})^{(2^n)} + (1-\sqrt{2})^{(2^{n+1})} - 2 \\
&= (1+\sqrt{2})^{(2^{n+1})} + 2\left[(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})\right]^{(2^n)} + (1-\sqrt{2})^{(2^{n+1})} - 2 \\
&= (1+\sqrt{2})^{(2^{n+1})} + 2\,[1]^{(2^n)} + (1-\sqrt{2})^{(2^{n+1})} - 2 \\
&= (1+\sqrt{2})^{(2^{n+1})} + (1-\sqrt{2})^{(2^{n+1})}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (1+\sqrt{2})^{(2^n)} + (1-\sqrt{2})^{(2^n)}$.
□

**Exercice 24.** 1. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$. □

2. Donc $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$. On se pose donc la question de démontrer que $3n^2 + 3n + 1 \leqslant 2n^3$.

   Le plus agréable est encore de poser une fonction $f$ définie sur $[3;+\infty[$ définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x - 1$. Cette fonction $f$ est un polynôme que l'on peut dériver pour obtenir $f'(x) = 6x^2 - 6x - 3 = 3(2x^2 - 2x - 1)$.

   Or le discriminant de $2x^2 - 2x - 1$ est un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta = 4 + 8 = 12$. Il a donc deux racines $\dfrac{2 - 2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{1 - \sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{1 + 1\sqrt{3}}{2}$. Ces deux racines sont inférieures à 3, donc $\forall x \in [3, +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $[3, +\infty[$.

   On a alors $f(3) = 54 - 27 - 9 - 1 = 17$, donc $\forall x \in [3, +\infty[$, $f(x) \geqslant f(3) = 17 > 0$.

   Ainsi, $\forall n \geqslant 3$, $f(n) \geqslant 0$ ce qui est équivalent à $(n+1)^3 \leqslant 3n^3$. □

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « $3^n \geqslant n^3$ ».

   Remarquons que c'est évidemment vrai pour $n = 3$ (c'est la même chose de chaque côté).

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a, d'après la question précédente, $(n+1)^3 \leqslant 3n^3$. Or d'après $\mathcal{P}(n)$ (comme $n \geqslant 3$), on a $n^3 \leqslant 3^n$, donc $3n^3 \leqslant 3^{n+1}$. Ainsi, on a

$$(n+1)^3 \leqslant 3^{n+1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a démontré que pour tout $n \geqslant 3$, $3^n \geqslant n^3$

Il reste à voir si c'est vrai pour $n = 0$ (oui c'est $1 \geqslant 0$), $n = 1$ (oui aussi, c'est $3 \geqslant 1$) et $n = 2$ (oui c'est $9 = 3^2 \geqslant 2^3 = 8$).

Ainsi, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**On fait une récurrence en se servant de la question précédente pour démontrer l'hérédité. Les étourdis oublieront de vérifier le domaine de validité de l'inégalité qu'ils ont démontré à la question précédente qui n'était vraie que pour $n \geqslant 3$, d'où le traitement à part de certains cas.** $\square$

**Exercice 25.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « il existe $a$ et $b$ tels que $n = 9a + 4b$ ».
Remarquons que $0 = 9 \times 0 + 4 \times 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Il existe $a$ et $b$ tels que $n = 9a + 4b$, donc on a

$$n + 1 = 9a + 4b + 1 = 9a + 4b + 9 - 2 \times 4 = 9(a + 1) + 4(b - 2).$$

Ainsi $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
On a donc démontré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux entiers relatifs $a$ et $b$ tels que $n = 9a + 4b$.
On aurait pu remarquer que $1 = 9 - 2 \times 4$ et donc $n = 9n - 4 \times 2n$... Mais l'objectif est de faire une récurrence. $\square$

**Exercice 26.** Commençons par montrer l'existence. On note $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, n = 2^p(2q + 1)$ ».
Pour $n = 1$, on a $1 = 2^0(2 \times 0 + 1)$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$, quelconque fixé. Supposons $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ vraie.
Si $n + 1$ est impair, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $n + 1 = 2q + 1 = 2^0(2q + 1)$.
Si $n + 1$ est pair, alors $\dfrac{n+1}{2}$ est en entier inférieur ou égal à $n$ car $\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{n}{2}$. Ainsi, d'après $\mathcal{P}\left(\dfrac{n+1}{2}\right)$, il existe deux entiers $p$ et $q$ tels que $\dfrac{n+1}{2} = 2^p(2q + 1)$, donc $n + 1 = 2^{p+1}(2q + 1)$.
Donc $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
Ainsi, on a démontré par récurrence forte que, pour tout $n$ entier naturel non nul, il existe deux entiers $p$ et $q$ tels que $n = 2^p(2q + 1)$.
Montrons désormais l'unicité.
Supposons qu'il existe deux couples d'entiers $(p, q)$ et $(p', q')$ tels que $n = 2^p(2q + 1) = 2^{p'}(2q' + 1)$. Supposons que $p' < p$, alors on a

$$2^{p-p'}(2q + 1) = 2q' + 1.$$

Ainsi, $2^{p-p'}(2q + 1) = 2q' + 1$ est pair puisque $p - p' > 0$ mais pas $2q' + 1$. Ainsi, on ne peut pas avoir $p' < p$ et de même $p < p'$. On a donc $p = p'$, et donc

$$2^p(2q + 1) = 2^p(2q' + 1)$$

ce qui se simplifie immédiatement en $2q + 1 = 2q' + 1$ donc $q = q'$.
L'unicité est donc démontrée. $\square$

## 2 Sommes et produits

**Exercice 1.** 1. Comme on a les résultats, on peut faire des récurrences pour chacune de ces questions, mais ici ça peut se montrer directement.

En effet,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! &= \sum_{k=1}^{n}(k+1-1)k! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k+1)\cdot k! - \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= \sum_{k=1}^{n}(k+1)! - \sum_{k=1}^{n} k! \\
&= \sum_{\ell=2}^{n+1} \ell! - \sum_{k=1}^{n} k! \text{ en posant dans la première } \ell = k+1 \\
&= \sum_{\ell=2}^{n} \ell! + (n+1)! - \left(1! + \sum_{k=2}^{n} k!\right) \\
&= (n+1)! - 1.
\end{aligned}$$

□

2. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n(n^2+n)}{2}$. ».

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k^2 = (-1)^1 1^2 = -1$ et $\frac{(-1)^1(1^2+1)}{2} = -1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \\
&= \frac{(-1)^n(n^2+n)}{2} + (-1)^{n+1}(n+1)^2 \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\left(-n^2-n+2(n+1)^2\right)}{2} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n^2+3n+2)}{2}.
\end{aligned}$$

Or, on a $(n+1)^2 + n + 1 = n^2 + 3n + 2$, donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^{n+1}((n+1)^2+n+1)}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^2 = \frac{(-1)^n(n^2+n)}{2}.$$

□

3. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^3 = \frac{(-1)^n(4n^3+6n^2-1)+1}{8}$. ».

   On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(-1)^k k^3 = (-1)^1 1^3 = -1$ et $\frac{(-1)^1(4\times1^3+6\times1^2-1)+1}{8} = -1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^3 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^3 + (-1)^{n+1}(n+1)^3 \\
&= \frac{(-1)^n(4n^3+6n^2-1)+1}{8} + (-1)^{n+1}(n+1)^3 \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \frac{(-1)^{n+1}\left(-4n^3-6n^2+1+8(n+1)^3\right)+1}{8} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(-4n^3-6n^2+1+8(n^3+3n^2+3n+1))+1}{8} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(4n^3+18n^2+24n+9)+1}{8}
\end{aligned}$$

   Or, on a

$$4(n+1)^3+6(n+1)^2-1 = 4(n^3+3n^2+3n+1)+6(n^2+2n+1)-1 = 4n^3+18n^2+24n+9$$

   donc

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k k^3 = \frac{(-1)^{n+1}(4(n+1)^3+6(n+1)^2-1)+1}{8}.$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^3 = \frac{(-1)^n(4n^3+6n^2-1)+1}{8}.$$

   □

4. Il s'agit d'une récurrence pénible à écrire (il faut faire des formules du binôme jusqu'au degré 6, donc écrivez votre triangle de Pascal dans un coin, ça servira).

   Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ « $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} k^6 = (-1)^{n-1}\frac{n^6+3n^5-5n^3+3n}{2}$. ».

   On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{1}(-1)^{k-1} k^6 = (-1)^0 1^6 = 1$ et $(-1)^0\frac{1^6+3\times1^5-5\times1^3+3\times1}{2} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1} k^6 &= \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} k^6 + (-1)^n(n+1)^6 \\
&= (-1)^{n-1}\frac{n^6+3n^5-5n^3+3n}{2} + (-1)^n(n+1)^6 \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= (-1)^n\frac{-n^6-3n^5+5n^3-3n+2(n+1)^6}{2} \\
&= (-1)^n\frac{-n^6-3n^5+5n^3-3n+2(n^6+6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1)}{2} \\
&= (-1)^n\frac{n^6+9n^5+30n^4+45n^3+30n^2+9n+2}{2}
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}(n+1)^6+3(n+1)^5-5(n+1)^3+3(n+1) &= (n^6+6n^5+15n^4+20n^3+15n^2+6n+1)\\ &\quad + 3(n^5+5n^4+10n^3+10n^2+5n+1) - 5(n^3+3n^2+3n+1) + 3(n+1)\end{aligned}$$

donc

$$(n+1)^6+3(n+1)^5-5(n+1)^3+3(n+1) = n^6+9n^5+30n^4+45n^3+30n^2+9n+2.$$

On obtient alors :

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}k^6 = (-1)^n \frac{(n+1)^6+3(n+1)^5-5(n+1)^3+3(n+1)}{2}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^6 = (-1)^{n-1}\frac{n^6+3n^5-5n^3+3n}{2}.$$

□

**Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} 4k^2 \\ &= 4\sum_{k=0}^{n} k^2 \\ &= 4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$. □

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{k=0}^{n}\left((2k)^2+4k+1\right) \\ &= S_n + 4\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1 \text{ par linéarité} \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + 4\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{6n(n+1)}{3} + \frac{3(n+1))}{3} \\ &= \frac{(n+1)[2n(2n+1)+6n+3]}{3} \\ &= \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3}. \end{aligned}$$

Si on développe, on trouve $T_n = \dfrac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + 2n(n+1) + (n+1)$ qu'on factorisera bien entendu par $(n+1)$. □

3. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_n + T_n &= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} + \frac{(n+1)(4n^2+8n+3)}{3} \\
&= \frac{(n+1)[2n(2n+1)+4n^2+8n+3]}{3} \\
&= \frac{(n+1)(8n^2+10n+3)}{3}.
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu remarquer que, $S_n$ est la somme des carrés des entiers pairs et que $T_n$ est la somme des carrés des entiers impairs, ainsi

$$S_n + T_n = \sum_{k=0}^{2n+1} k^2 = \frac{(2n+1)(2n+2)[2(2n+1)+1]}{6} = \frac{(2n+1)(n+1)(4n+3)}{3}.$$

Comme $(2n+1)(4n+3) = 8n^2+10n+3$, les valeurs coïncident bien. □

**Exercice 3.** 1. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 2 - \frac{1}{2^n}.
\end{aligned}$$

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} (-3)^k &= -3\sum_{k=1}^{n+1} (-3)^{k-1} \\
&= -3\sum_{\ell=0}^{n} (-3)\ell \text{ en posant } \ell = k-1 \\
&= -3\frac{1-(-3)^{n+1}}{1-(-3)} \\
&= \frac{3}{4}((-3)^{n+1}-1).
\end{aligned}$$

3. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n+1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell} \text{ en posant } \ell = k-1 \\
&= \frac{1}{2}\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}}{1-\frac{1}{2}} \\
&= 1 - \frac{1}{2^{n+2}}
\end{aligned}$$

4. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} 2^{2k} &= 2^4 \sum_{k=2}^{n+1} 2^{2k-4} \\
&= 2^4 \sum_{k=2}^{n+1} (2^2)^{k-2} \\
&= 2^4 \sum_{\ell=0}^{n-1} (2^2)^{\ell} \text{ en posant } \ell = k-2 \\
&= 2^4 \frac{1-(2^2)^n}{1-2^2} \\
&= 2^4 \frac{(2^{2n}-1)}{3} \\
&= \frac{2^{2n+4}-16}{3}.
\end{aligned}$$

5. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{3^{k-1}} &= 3 \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2}{3}\right)^k \\
&= 3 \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} \\
&= 9 \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right).
\end{aligned}$$

6. Le but est ici de bien comprendre la technique qui marchera toujours quand on a une somme dont l'indice de sommation apparait uniquement dans les puissances : on factorise par le premier terme et, après un changement d'indice qui devrait être relativement naturel, on obtiendra ensuite une somme classique. Il arrive que cette technique aide dans d'autres cas, mais je ne le garantis pas.

   On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+3} \frac{2^{2k-1}}{5^{k+3}} &= \frac{2^3}{5^5} \sum_{k=2}^{n+3} \frac{2^{2(k-2)}}{5^{k-2}} \\
&= \frac{2^3}{5^5} \sum_{\ell=0}^{n+1} \frac{2^{2\ell}}{5^{\ell}} \text{ en posant } \ell = k-2 \\
&= \frac{2^3}{5^5} \sum_{\ell=0}^{n+1} \left(\frac{2^2}{5}\right)^{\ell} \\
&= \frac{2^3}{5^5} \frac{1-\left(\frac{2^2}{5}\right)^{n+2}}{1-\frac{4}{5}} \\
&= \frac{2^3}{5^4} \left(1-\left(\frac{4}{5}\right)^{n+2}\right).
\end{aligned}$$

□

**Exercice 4.** 1. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k(k+1) &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + \sum_{k=0}^{n} k \text{ par linéarité} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)[(2n+1)+3]}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+4)]}{6} \\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}
\end{aligned}$$

□

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} (\ln(k+1) - \ln(k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \text{ par linéarité} \\
&= \sum_{\ell=2}^{n+1} \ln(\ell) - \sum_{k=1}^{n} \ln(k) \text{ en posant } \ell = k+1 \\
&= \sum_{\ell=2}^{n} \ln(\ell) + \ln(n+1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(k) - \ln(1) \\
&= \ln(n+1).
\end{aligned}$$

□

3. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1-1}{(k+1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)!} \text{ par linéarité} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{\ell=2}^{n+1} \frac{1}{\ell!} \text{ en posant } \ell = k+1 \\
&= \frac{1}{1!} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k!} - \sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell!} - \frac{1}{(n+1)!} \\
&= 1 - \frac{1}{(n+1)!}.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 5.** A.On a, pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
A = & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} \\
= & \sum_{k=2}^{n} \frac{1-k+k}{k(k-1)} \\
= & \sum_{k=2}^{n} \left( -\frac{k-1}{k(k-1)} + \frac{k}{k(k-1)} \right) \\
= & \sum_{k=2}^{n} \frac{k}{k(k-1)} - \sum_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k(k-1)} \text{ par linéarité} \\
= & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \\
= & \sum_{\ell=1}^{n-1} \frac{1}{\ell} - \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \text{ en posant dans la première } \ell = k-1 \\
= & 1 + \sum_{\ell=2}^{n-1} \frac{1}{\ell} - \left( \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n} \right) \\
= & 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

B.On va essayer de faire apparaitre un télescopage, mais ça va être un peu plus compliqué. Pour $k \geqslant 2$, cherchons $a, b$ et $c$ trois réels tels que

$$\frac{4k-2}{k(k^2-1)} = \frac{a}{k-1} + \frac{b}{k} + \frac{c}{k+1}.$$

En multipliant tout par $k(k^2-1)$, on a

$$4k-2 = ak(k+1) + b(k-1)(k+1) + ck(k-1).$$

En faisant $k=1$, on trouve $2 = 2a$ donc $a = 1$. En faisant $k = 0$, on trouve $-2 = -b$ donc $b = 2$. En faisant $k = -1$, on trouve $-6 = 2c$ donc $c = -3$.

Ainsi, si ces trois réels existent, on a

$$\frac{4k-2}{k(k^2-1)} = \frac{1}{k-1} + \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1}.$$

Vérifions-le :

$$\frac{1}{k-1} + \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} = \frac{k(k+1) + 2(k-1)(k+1) - 3k(k-1)}{k(k-1)(k+1)} = \frac{4k-2}{k(k^2-1)}.$$

Remarquons que d'autres méthodes sont possibles : en particulier, on aurait pu tout développer et ≪ identifier ≫ les coefficients, ce qui nous aurait évité la vérification, mais nous reviendrons là-dessus dans un chapitre ultérieur.

On a alors :

$$\begin{aligned}
B = & \sum_{k=2}^{n} \frac{4k-2}{k(k^2-1)} \\
= & \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{1}{k-1} + \frac{2}{k} - \frac{3}{k+1} \right) \\
= & \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k+1} \text{ par linéarité.}
\end{aligned}$$

On pose alors $i = k - 1$ dans la première somme et $j = j + 1$ dans la troisième.

$$\begin{aligned}
B = & \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} + 2\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - 3\sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{j} \\
= & 1 + \frac{1}{2} + \sum_{i=3}^{n-1} \frac{1}{i} + 2\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-1} \frac{1}{k} + \frac{1}{n}\right) - 3\left(\sum_{j=3}^{n-1} \frac{1}{j} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \\
= & \frac{5}{2} - \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1}
\end{aligned}$$

Si on souhaite mettre la réponse sur le même dénominateur, on trouve

$$B = \frac{5n(n+1) - 2(n+1) - 6n}{2n(n+1)} = \frac{5n^2 - 3n - 2}{2n(n+1)}.$$

C.On a pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
C = & \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{k}\right) \\
= & \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} \\
= & \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (k+1)}{\prod\limits_{k=1}^{n} k} \\
= & \frac{\prod\limits_{\ell=2}^{n+1} \ell}{\prod\limits_{k=1}^{n} k} \text{ en posant au numérateur } \ell = k+1 \\
= & \frac{\left(\prod\limits_{\ell=2}^{n} \ell\right)(n+1)}{1 \times \prod\limits_{k=2}^{n} k} \\
= & \frac{n+1}{1} \\
= & n+1
\end{aligned}$$

Remarquons que nous aurions pu remarquer un peu avant de conclure que $C = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$.

D.On a pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} D = & \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \\ = & \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} 2k}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1)} \\ = & \frac{\left(\prod\limits_{k=1}^{n} 2k\right)^2}{\prod\limits_{k=1}^{n} 2k \prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1)} \\ = & \frac{2^{2n}\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k\right)^2}{\prod\limits_{\ell=2}^{2n+1} \ell} \\ = & \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} \end{aligned}$$

On peut encore écrire $D = \dfrac{(2^n n!)^2}{(2n+1)!}$

E.On a pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} E = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} (i+j) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} j \text{ par linéarité} \end{aligned}$$

D'un côté, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i+1}^{n} i = & \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=i+1}^{n} 1 \\ = & \sum_{i=1}^{n} (n-i)i \\ = & n\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} i^2 \\ = & \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ = & \frac{n(n+1)(3n-2n-1)}{6} \\ = & \frac{n(n+1)(n-1)}{6} \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} j = & \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{i} j\right) \\
= & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) \\
= & \sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i \text{ par linéarité} \\
= & \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} - \frac{n(n+1)}{4} \\
= & \frac{n(n+1)(6n-2n-1-3)}{12} \\
= & \frac{n(n+1)(n-1)}{3}
\end{aligned}$$

Autre façon de calculer ce terme :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} j = & \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} j \\
= & \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} j \\
= & \sum_{j=2}^{n}(j^2 - j) \\
= & \sum_{j=1}^{n} j^2 - j \text{ le terme en } j=1 \text{ est nul} \\
= & \sum_{j=1}^{n} j^2 - \sum_{j=1} nj \text{ par linéarité} \\
= & \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)}{2} \\
= & \frac{n(n+1)(2n+1-3)}{6}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
E = & \frac{n(n+1)(n-1)}{6} + \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \\
= & \frac{n(n+1)(n-1)}{2}
\end{aligned}$$

F.On a, pour $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
F = \quad & \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} i(n-j) \\
= \quad & \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i(n-j) \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i(n-j) \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}(n-j)\sum_{i=1}^{j} i \\
= \quad & \sum_{j=1}^{n}(n-j)\frac{j(j+1)}{2} \\
= \quad & \frac{1}{2}\left((n-1)\sum_{j=1}^{n} j^2 + n\sum_{j=1}^{n} j - \sum_{j=1}^{n} j^3\right) \\
= \quad & \frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n^2(n+1)^2}{4}\right) \\
= \quad & \frac{n(n+1)[2(n-1)(2n+1)+6n-3n(n+1)]}{24} \\
= \quad & \frac{n(n+1)(n^2+n-2)}{24} \\
= \quad & \frac{(n-1)n(n+1)(n+2)}{24}.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 6.** 1. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $k = i - j$,

$$\begin{aligned}
\sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} 2^p = \quad & \sum_{q=0}^{n} \frac{1-2^{q+1}}{1-2} \text{ car } 2 \neq 1 \\
= \quad & \sum_{q=0}^{n} 2^{q+1} - \sum_{q=0}^{n} 1 \text{ par linéarité} \\
= \quad & 2\sum_{q=0}^{n} 2^q - (n+1) \\
= \quad & 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - (n+1) \\
= \quad & 2^{n+2} - n - 3.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{q=0}^{n}\sum_{p=0}^{q} 2^p = 2^{n+2} - n - 3$. □

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$, en posant $k = i - j$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^{i-j} &= \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-j} 2^k \\
&= \sum_{j=0}^{n} \frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} \text{ car } 2 \neq 1 \\
&= \sum_{j=0}^{n} 2^{n-j+1} - \sum_{j=0}^{n} 1 \text{ par linéarité} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} 2^{\ell+1} - (n+1) \text{ en posant dans la première } \ell = n-j \\
&= 2\sum_{\ell=0}^{n} 2^{\ell} - n - 1 \\
&= 2\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - n - 1 \\
&= 2^{n+2} - n - 3.
\end{aligned}$$

Remarquons que vu la question d'avant, il aurait été plus direct de remarquer que

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=j}^{n} 2^{i-j} &= \sum_{0 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} 2^{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 2^{i-j} \\
&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} 2^{k} \text{ en posant } k = i - j
\end{aligned}$$

soit la même chose que la question précédente. □

3. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} \frac{1}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{j}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= n.
\end{aligned}$$

□

4. On a, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n}\frac{i}{j} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j}\frac{i}{j} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\sum_{i=1}^{j} i \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}\frac{j(j+1)}{2} \\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{j+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} \\
&= \frac{n(n+1+2)}{4} \\
&= \frac{n(n+3)}{4}
\end{aligned}$$

□

**Exercice 7.** Tout d'abord, remarquons que l'on doit avoir $x \neq -1$ pour que cette équation ait un sens.
Ensuite, on remarque que pour tout $x \neq -1$, $\dfrac{x}{x+1} \neq 1$, donc l'équation est équivalente à

$$\frac{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^8}{1-\frac{x}{x+1}} = 0$$

et ainsi, toujours sans oublier que $x \neq -1$, en

$$\left(\frac{x}{x+1}\right)^8 = 1.$$

Il reste à résoudre $X^8 = 1$, ce que nous reverrons en détail plus tard, mais ici, on a

$$\begin{aligned}
X^8 = 1 &\Leftrightarrow X^8 - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (X^4-1)(X^4+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (X^2-1)(X^2+1)(X^4+1) = 0 \\
&\Leftrightarrow (X-1)(X+1)(X^2+1)(X^4+1) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi, les deux seules possibilités sont

$$\frac{x}{x+1} = 1 \text{ ou } \frac{x}{x+1} = -1.$$

Mais comme le premier est exclu, il ne reste que $\dfrac{x}{x+1} = -1$, ce qui est équivalent à

$$x = -x - 1$$

Donc $x = -\dfrac{1}{2}$ est la seule solution. □

**Exercice 8.** 1. Pour expliciter les choses, on a

$$S_0 = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} 1^p 1^{n-p} = (1+1)^n = 2^n.$$

On trouve $S_0 = 2^n$. $\square$

2. Un peu moins évident. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, (le cas $n = 0$ donne $S_1 = 0$)

$$\begin{aligned}
S_1 &= \sum_{p=0}^{n} p \binom{n}{p} \\
&= \sum_{p=1}^{n} p \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ le premier terme étant nul} \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} \text{ car } p \neq 0 \\
&= \sum_{p=1}^{n} \frac{(n-1)!n}{(p-1)!(n-p)!} \\
&= n \sum_{p=1}^{n} \binom{n-1}{p-1} \\
&= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \text{ en posant } k = p-1 \\
&= n2^{n-1} \text{ d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

Il est important d'évacuer le terme en $p = 0$ pour simplifier le coefficient binomial.

Remarquons que le résultat est cohérent avec celui obtenu lorsque $n = 0$ $\square$

3. On a pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, (les cas $n = 0$ ou $n = 1$ donnent $S_2 = 0$)

$$\begin{aligned}
S_2 &= \sum_{p=0}^{n} p(p-1) \binom{n}{p} \\
&= \sum_{p=2}^{n} p(p-1) \frac{n!}{p!(n-p)!} \text{ les deux premiers termes étant nuls} \\
&= \sum_{p=2}^{n} p(p-1) \frac{n!}{p(p-1)(p-2)!(n-p)!} \text{ car } p \neq 0 \text{ et } p-1 \neq 0 \\
&= \sum_{p=2}^{n} \frac{(n-2)!n(n-1)}{p!(n-p)!} \\
&= n(n-1) \sum_{p=2}^{n} \binom{n-2}{p-2} \\
&= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \text{ en posant } k = p-2 \\
&= n(n-1)2^{n-2} \text{ d'après la première question.}
\end{aligned}$$

Il est important d'évacuer le terme en $p = 0$ et celui en $p = 1$ pour simplifier le coefficient binomial.

Remarquons que le résultat est cohérent avec celui obtenu lorsque $n = 0$ et $n = 1$.

$\square$

4. Remarquons astucieusement que $S_1 + S_2 = S_3$, ce qui nous donne $S_3 = n(n+1)2^{n-2}$.

   Si nous ne l'avions pas fait, il aurait fallu écrire $p^2 = p(p-1) + p$ puis développer pour pouvoir faire des simplifications avec la factorielle du dénominateur. □

5. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_4 = & \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\binom{n}{p} \\
= & \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p+1}\frac{n!}{p!(n-p)!} \\
= & \sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{(p+1)!(n-p)!} \\
= & \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{n+1}\frac{(n+1)!}{(p+1)!(n-p)!} \\
= & \frac{1}{n+1}\sum_{p=0}^{n}\binom{n+1}{p+1} \\
= & \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k} \text{ en posant } k = p+1 \\
= & \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} - 1\right) \\
= & \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right) \\
= & \frac{2^{n+1}-1}{n+1}.
\end{aligned}$$

□

6. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_5 = & \sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k} \\
= & \sum_{k=0}^{p}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{(n-k)!}{(p-k)!(n-p)!} \\
= & \frac{n!}{(n-p)!}\sum_{k=0}^{p}\frac{1}{k!(p-k)!} \\
= & \frac{n!}{(n-p)!p!}\sum_{k=0}^{p}\frac{p!}{k!(p-k)!} \\
= & \binom{n}{p}\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k} \\
= & \binom{n}{p}2^p.
\end{aligned}$$

□

7. On a pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
S_6 &= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\binom{n}{n-p}\binom{n-p}{n-k} \\
&= \sum_{p=0}^{k}(-1)^p\frac{n!}{p!(n-p)!}\frac{(n-p)!}{(n-k)!(k-p)!} \\
&= \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{p=0}^{k}\frac{1}{p!(k-p)!}(-1)^p \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!}\sum_{p=0}^{k}\frac{k!}{p!(k-p)!}(-1)^p \\
&= \binom{n}{k}\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}(-1)^p \\
&= \binom{n}{k}(-1+1)^k.
\end{aligned}$$

Ainsi, on trouve $S_6 = 0$ sauf si $k = 0$, auquel cas $S_6 = 1$. □

**Exercice 9.** Remarquons que $S_n$ contient la somme de tous les termes entre 0 et $2n$ dont la puissance est paire, alors que ceux de $T_n$ sont ceux où la puissance est paire. Ainsi, $S_n + T_n = \sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}x^p = (1+x)^{2n}$ mais $S_n - T_n = \sum_{p=0}^{2n}\binom{2n}{p}(-1)^p x^p = (1-x)^{2n}$. Ainsi, en ajoutant les deux et en divisant par deux, on trouve $S_n = \dfrac{(1+x)^{2n} + (1-x)^{2n}}{2}$ et en les retranchant, on a $T_n = \dfrac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2}$.
□

**Exercice 10.** Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.
On a $2^{1-1} = 1 \leqslant 1! = 1 \leqslant 1^1$. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors

$$2^n = 2 \times 2^{n-1} \leqslant 2n!$$

d'après $\mathcal{P}(n)$. Or $2 \leqslant n+1$ car $1 \leqslant n$ (d'où le démarrage à $n = 1$ pour la récurrence), donc $2! \leqslant (n+1)!$
Par ailleurs,

$$(n+1)! = n!(n+1) \leqslant n^n(n+1)$$

d'après $\mathcal{P}(n)$. Par ailleurs, comme $n \leqslant n+1$, $n^n \leqslant (n+1)^n$.
Ainsi,

$$(n+1)! \leqslant (n+1)^n(n+1) = (n+1)^{n+1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est démontrée.
On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$.
De plus, on a bien $2^{-1} \leqslant 1 = 0! \leqslant 1 = 0^0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^{n-1} \leqslant n! \leqslant n^n$
Notons que cela implique que $n!$ croit moins vite que $n^n$ mais plus que $2^n$. □

**Exercice 11.** Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n = (n-1)!$.
On a $u_1 = 1 = (1-1)!$ et $u_2 = 1 = (2-1)!$, donc $\mathcal{P}(1)$ et $\mathcal{P}(2)$ sont vraies.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$, quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies. On a alors

$$u_{n+2} = n(u_{n+1} + u_n).$$

D'après $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$, on a

$$u_{n+2} = n[(n+1-1)! + (n-1)!] = n[n! + (n-1)!] = n[(n-1)!(n+1)] = (n+1)!$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est démontrée.
On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (n-1)!$. $\square$

**Exercice 12.** Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$ est un entier naturel ≫.
C'est évidemment vrai pour $n = 0$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Notons

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^5}{5} + \frac{(n+1)^4}{2} + \frac{(n+1)^3}{3} - \frac{n+1}{30}.$$

Montrons que $u_{n+1} \in \mathbb{N}$ en développant les termes à l'aide de la formule du binôme. On a

$$u_{n+1} = \frac{(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1)^5}{5} + \frac{n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1}{2} + \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1}{3} - \frac{n+1}{30}.$$

Ainsi

$$u_{n+1} = \frac{n^5}{5} + n^4 + 2n^3 + 2n^2 + n + \frac{1}{5} + \frac{n^4}{2} + 2n^3 + 3n^2 + 2n + \frac{1}{2} + \frac{n^3}{3} + n^2 + n + \frac{1}{3} - \frac{n}{30} - \frac{1}{30}.$$

En arrangeant un peu

$$u_{n+1} = \frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} + n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + \frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30}.$$

Or, d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{N}$.
De plus, $n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n \in \mathbb{N}$.
Et pour finir $\frac{1}{5} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{30} = \frac{6 + 15 + 10 - 1}{30} = 1 \in \mathbb{N}$.
Ainsi, on a bien $u_{n+1} \in \mathbb{N}$, soit $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30} \in \mathbb{N}$. $\square$

# 3 Trigonométrie

**Exercice 1.** Donner les valeurs exactes des quantités suivantes : L'idée est de se ramener entre $0$ et $2\pi$, ou $-\pi$ et $\pi$ grâce à la $2\pi$-périodicité puis entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$ grâce aux symétries. $\square$

1. $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$. $\square$

2. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$. $\square$

3. $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$

4. $\cos\left(\frac{13\pi}{6}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. $\square$

5. $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

6. $\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}$. $\square$

7. $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)=\cos\left(4\pi-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. $\square$

8. $\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right)=\tan\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{3}$. $\square$

9. $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. $\tan\left(\frac{5\pi}{6}\right)=\tan\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$. $\square$

**Exercice 2.** 1. Cette équation est équivalente à $\cos(x)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Elle est donc équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\begin{cases} x = & \frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}, \\ x = & -\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc $\left\{-\frac{\pi}{4}+2k\pi, \frac{\pi}{4}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$. $\square$

2. Cette équation est équivalente à $\sin(x)=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Elle est donc équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\begin{cases} x = & -\frac{\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}, \\ x = & -\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc $\left\{-\frac{\pi}{6}+2k\pi, -\frac{5\pi}{6}+2k\pi / k\in\mathbb{Z}\right\}$. $\square$

3. Cette équation est équivalente à $\cos(3x)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$.

Elle est donc équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\begin{cases} 3x = & \frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}, \\ 3x = & -\frac{5\pi}{6}+2k\pi, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce qui se reformule en

$$\begin{cases} x = & \frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z}, \\ x = & -\frac{5\pi}{18}+k\frac{2\pi}{3}, k\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc $\left\{\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3}, -\frac{5\pi}{18}+\frac{2k\pi}{3} / k\in\mathbb{Z}\right\}$. $\square$

4. Cette équation est équivalente à $\sin(2x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

   Elle est donc équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x = & \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = & \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

   Ce qui se reformule en

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & \frac{\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = & \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

   L'ensemble solution est donc $\left\{\frac{\pi}{8} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$. $\square$

5. Cette équation est équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x = & x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 2x = & -x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

   Ce qui se reformule en

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = & k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

   L'ensemble solution est donc $\left\{2k\pi, \frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{2k\pi}{3} / k \in \mathbb{Z}\right\}$. $\square$

6. Cette équation est équivalente à $\sin(3x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

   Ce qui est là encore équivalent à $\sin(3x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

   Elle est donc équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\left\{\begin{array}{rl} 3x = & x - \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 3x = & \pi - x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} 2x = & -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ 4x = & \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

   Ce qui se reformule en

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = & \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

   L'ensemble solution est donc $\left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{3\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\right\}$. $\square$

7. Cette équation est équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie au système

$$\begin{cases} \cos(x) = & \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) \\ \cos(x) = & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{cases} x = & \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = & -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = & \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = & -\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc $\left\{-\dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$. □

**Exercice 3.** 1. On a $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ainsi, on a $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, autrement dit

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

□

2. On peut faire la même technique, On a $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

Or $\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Ainsi, on a $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, autrement dit

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

□

**Exercice 4.** 1. On a $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\dfrac{\pi}{8}\right)$.

Or $\cos\left(2\dfrac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1$.

Ainsi, on a $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1$, autrement dit

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}+2}{4}.$$

Ainsi,

$$\left|\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$.

On peut donc affirmer,

$$\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{2}+2}}{2}.$$

□

2. On peut soit faire la même technique, soit remarquer que

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

Ainsi,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 1 - \frac{\sqrt{2}+2}{4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}.$$

Ainsi, on a

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right| = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) \geqslant 0$.

On peut donc affirmer,

$$\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

Une remarque en passant, cette technique est moins élégante dans l'exercice précédent car on obtient une écriture exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ moins élégante (sauf à réussir à simplifier élégamment un terme un peu encombrant). □

**Exercice 5.** 1. On a $b = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1$. On peut donc écrire

$$b = 2a^2 - 1.$$

□

2. a. On a $c = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{5}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -a$. □

   b. On a $c = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \cos\left(2\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1 = 2b^2 - 1$. □

   c. On a alors tout simplement

$$-a = 2b^2 - 1.$$

□

3. On a, en utilisant les deux relations précédentes,

$$a+b=(1-2b^2)+(2a^2-1)=2(a^2-b^2).$$

Or, en simplifiant, on a

$$a+b=2(a+b)(a-b).$$

De plus, comme $\frac{\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et $\frac{2\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a $a>0$ et $b>0$.

Ainsi, $a+b\neq 0$. On peut donc simplifier et on obtient $1=2(a-b)$, autrement dit

$$a-b=\frac{1}{2}.$$

$\square$

4. On a $b=2a^2-1$ et $b=a-\frac{1}{2}$, ainsi,

$$a-\frac{1}{2}=2a^2-1.$$

Cette équation est équivalente à

$$4a^2-2a-1=0.$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est

$$\Delta=(-2)^2-4\times 4\times(-1)=20.$$

On a donc $a=\frac{2-\sqrt{20}}{8}=\frac{1-\sqrt{5}}{4}$ ou $a=\frac{2+\sqrt{20}}{8}=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Cependant $\frac{\pi}{5}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, donc $a>0$.

Ainsi

$$\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

$\square$

5. On a

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right).$$

Ainsi,

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right)=1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2=1-\frac{6+2\sqrt{5}}{16}=\frac{10-2\sqrt{5}}{16}.$$

Ainsi, on a

$$\left|\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right|=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

Comme $\frac{\pi}{5}\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\geqslant 0$.

On peut donc affirmer,

$$\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}.$$

$\square$

**Exercice 6.** 1. On a $\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)}=\frac{\cos(a)}{\sin(a)}=\frac{1}{\tan(a)}$.

On note parfois $cotan(a)=\frac{\cos(a)}{\sin(a)}$. □

2. a. Soient de tels réels $a$ et $b$, cela implique, entre autres, que $\cos(a)$ et $\cos(b)$ sont tous deux non nuls.

On a alors

$$\begin{aligned}\tan(a+b) &= \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}\\ &= \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}\\ &= \frac{\cos(a)\cos(b)\left(\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}\right)}{\cos(a)\cos(b)\left(1-\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}\right)}\\ &= \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}.\end{aligned}$$

□

b. Notons $D=\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$.

On doit avoir $a\in D$, $b\in D$ et $a+b\in D$.

Si $\tan(a)\tan(b)=1$, d'après la question précédente, cela veut dire que, lorsque $\tan(a)\neq 0$, $\tan(b)=\frac{1}{\tan(a)}=\tan\left(\frac{\pi}{2}-a\right)$, autrement dit $b\notin\left\{\frac{\pi}{2}-a+k\pi/k\in\mathbb{Z}\right\}$ ce qui revient à $a+b\in D$. Si $\tan(a)=0$, il faut simplement que $\tan(b)$ existe, soit $b\in D$. □

c. En déduire $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (sans chercher les valeurs correspondantes pour le sinus et le cosinus). On a

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Souvenons nous que, $\tan(-a)=-\tan(a)$ et donc que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1+\tan\left(\frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

Ainsi,

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}=\frac{1-2\sqrt{3}+3}{3-1}=2-\sqrt{3}.$$

□

3. a. On a, en utilisant la formule de la question précédente,

$$\tan(2a)=\frac{2\tan(a)}{1-\tan^2(a)}.$$

□

b. On a alors

$$\tan\left(2\frac{\pi}{8}\right) = \frac{2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)}{1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right)}.$$

Or, comme $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, on retrouve

$$1-\tan^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2\tan\left(\frac{\pi}{8}\right).$$

$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est donc solution de l'équation d'inconnue $X$ :

$$1-X^2 = 2X \Longleftrightarrow X^2+2X-1=0.$$

Ce trinôme du second degré admet comme discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times(-1) = 8$. Elle admet donc deux solutions

$$X_1 = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2} \text{ et } X_2 = -1+\sqrt{2}.$$

Comme $\frac{\pi}{8} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.
Ainsi, on a

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1.$$

□

# 4 Ensembles et dénombrement

## 1. Théorie des ensembles

**Exercice 1.** En essayant de faire un dessin, on se rend vite compte que l'on doit avoir $A = B$.
On le montre ensuite car $A \subset A\cup B = A\cap B \subset B$, ainsi, $A \subset B$.
De la même façon, on a $B \subset A$.
Par double inclusion, on a donc $A = B$. □

**Exercice 2.** 1. a. On trouve $A = X\cap(Y\cup\overline{Y})$ (on « factorise » par $X$).
Mais comme $Y\cup\overline{Y} = \mathcal{E}$ et que $X\cap\mathcal{E} = X$, on a

$$A = X.$$

□

b. On trouve $B = X\cup(Y\cap\overline{Y})$.
Mais comme $Y\cap\overline{Y} = \emptyset$ et que $X\cup\emptyset = X$, on a

$$B = X.$$

□

c. D'après la première question, $(X\cap Y)\cup(X\cap\overline{Y}) = X$ et de même, $(\overline{X}\cap Y)\cup(\overline{X}\cap\overline{Y}) = \overline{X}$.
Ainsi,

$$C = X\cup\overline{X} = \mathcal{E}.$$

□

d. D'après la deuxième question, $(X \cup Y) \cap (X \cup \overline{Y}) = X$ et de même, $(\overline{X} \cup Y) \cap (\overline{X} \cup \overline{Y}) = \overline{X}$.
Ainsi,
$$D = X \cap \overline{X} = \emptyset.$$
$\square$

2. a. Pour la première implication. Soit $x \in X$. Comme $X \subset Y$, on a $x \in Y$ donc $x \in X \cap Y$. Ainsi, $X \subset X \cap Y$.
On a toujours $X \cap Y \subset X$. Donc $X \subset Y \Longrightarrow X = X \cap Y$.
Concernant l'implication réciproque, si $X = X \cap Y$, alors si $x \in X$, alors $x \in X \cap Y$, car $X = X \cap Y$, donc $x \in Y$.
Ainsi, $X = X \cap Y \Longrightarrow X \subset Y$.
Par double implication, on a démontré que
$$X \subset Y \Longleftrightarrow X = X \cap Y.$$
$\square$

b. On a $X \cap Y = (X \cap Y) \cap (Z \cup \overline{Z})$.
En développant, on a
$$X \cap Y = (X \cap Y \cap Z) \cup (X \cap Y \cap \overline{Z}).$$
Or $X \cap Y \cap Z \subset Y \cap Z$ et $X \cap Y \cap \overline{Z} \subset X \cap \overline{Z}$.
Ainsi,
$$X \cap Y \subset (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z).$$
$\square$

c. On a
$$\begin{aligned}(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = & \ (X \cap (Y \cup \overline{Z})) \cup (Z \cap (Y \cup \overline{Z})) \\ = & \ (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z).\end{aligned}$$
Or $(X \cap Y) \subset (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$ d'après la question précédente, donc d'après la première question, $(X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$.
Ainsi, $(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$. $\square$

d. D'après le 2*b*. appliqué à $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, on a
$$\overline{X} \cap \overline{Y} \subset (\overline{X} \cap \overline{Z}) \cup (\overline{Y} \cap Z)$$
En prenant le complémentaire, on obtient
$$\overline{(\overline{X} \cap \overline{Z}) \cup (\overline{Y} \cap Z)} \subset \overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}.$$
En utilisant les lois de Morgan, on a
$$\overline{(\overline{X} \cap \overline{Z})} \cap \overline{(\overline{Y} \cap Z)} \subset X \cup Y.$$
Que l'on continue à simplifier en
$$(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) \subset X \cup Y.$$
Ainsi, d'après la 2*a*., on a
$$(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) \cap (X \cup Y) = (X \cup Z) \cap (Y \cap \overline{Z}).$$

Autre solution, plus directe : on a, d'après la question précédente $(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$. Or

$$(X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z) = (X \cup (Y \cap Z)) \cap (\overline{Z} \cup (Y \cap Z)).$$

Ce qui donne

$$(X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \cap (\overline{Z} \cup Y) \cap (\overline{Z} \cup Z).$$

Ainsi,

$$(X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \cap (\overline{Z} \cup Y).$$

Or, rappelons nous que nous avions $(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$, on a donc,

$$(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \cap (\overline{Z} \cup Y).$$

□

**Exercice 3.** 1. On a $A \subset (B \cap C) \subset B$, donc $A \subset B$.

De plus on a $B \subset B \cup C \subset A$, donc $B \subset A$.

Par double inclusion, on a démontré que $A = B$.

De la même façon, en échangeant les rôles de $B$ et $C$ on a $A = C$, ainsi $A = B = C$.

□

2. On a $B = B \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$.

Or $B \cap A = A \cap C$.

De plus, $B \cup A = C \cup A$, donc $(B \cup A) \cap \overline{A} = (C \cup A) \cap \overline{A}$.

Ainsi, $(B \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A}) = (C \cap \overline{A}) \cup (A \cap \overline{A})$.

Mais comme $A \cap \overline{A} = \emptyset$, on a $B \cap \overline{A} = C \cap \overline{A}$.

Ainsi, $B = (C \cap A) \cup (C \cap \overline{A}) = C \cap (A \cup \overline{A})$.

Mais comme $A \cup \overline{A} = \mathcal{E}$, on a $C \cap (A \cup \overline{A}) = C$.

On a donc démontré que $B = C$. □

**Exercice 4.** 1. Soit $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. On a alors $X \subset A \cap B$. Comme $A \cap B \subset A$, on a $X \subset A$, et de même $X \subset B$. Ainsi, $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

On a donc $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Réciproquement, si $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, alors $X \subset A$ et $X \subset B$, donc $X \subset A \cap B$. Ainsi, $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$.

On a donc $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$.

On a donc montré par double inclusion que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. □

2. Soit $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, alors on a $X \in \mathcal{P}(A)$ ou $X \in \mathcal{P}(B)$.

Autrement dit $X \subset A$ ou $X \subset B$, donc $X \subset A \cup B$. On a ainsi $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.

On a donc $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Cependant, si on a ni $A \subset B$, ni $B \subset A$, alors $A \cup B \in \mathcal{P}(A \cup B)$, mais $A \cup B \notin \mathcal{P}(A)$ et $A \cup B \notin \mathcal{P}(B)$.. Donc $A \cup B \notin \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Ainsi on a toujours $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$, mais l'inverse n'est vrai que si $A$ est inclus dans $B$ ou $B$ dans $A$ (auquel cas $A \cup B = A$ ou $B$ selon le cas et tout devient trivial).

□

## 2. Les dénombrements classiques

**Exercice 5.** 1. L'expérience se modélise par une 10-liste de réponses prises dans l'ensemble {oui, non}, donc il y a $2^{10}$ façons de répondre. □

2. L'expérience se modélise par une 10-liste de réponses prises dans l'ensemble {oui, non, ne se prononce pas}, donc il y a $3^{10}$ façons de répondre. □

**Exercice 6.** Considérons que les élèves sont numérotés de 1 à 48. Plusieurs façons de voir les choses :

- On peut se dire qu'une poignée de main est représentée par une paire d'éléments de $[\![1, 48]\!]$. Auquel cas, il y en a $\binom{48}{2}$.
- On peut se dire qu'il y a autant de poignées de main qu'il y a de couples de $[\![1, 48]\!]$ en n'oubliant pas de diviser par 2 (en comptant les couples, on compte deux fois chaque poignée de main selon quel est le premier). On en a donc $\dfrac{48 \times 47}{2} = \dbinom{48}{2}$.
- Plus compliqué : on peut dire que l'élève 1 serre 47 mains, le deuxième en serre 46 (on enlève le premier), le troisième 45, etc. Autrement dit, formellement, l'ensemble des poignées de mains est $\displaystyle\bigcup_{k=1}^{47} \{(k, \ell)/\ell \in [\![k+1, 48]\!]\}$.

  Comme il s'agit d'une union disjointe,

  $$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{47} \{(k, \ell)/\ell \in [\![k+1, 48]\!]\}\right) = \sum_{k=1}^{47} \operatorname{Card}(\{(k, \ell)/\ell \in [\![k+1, 48]\!]\}) = \sum_{k=1}^{47} (48-k).$$

  En posant $i = 48 - k$, on obtient

  $$\operatorname{Card}\left(\bigcup_{k=1}^{47} \{(k, \ell)/\ell \in [\![k+1, 48]\!]\}\right) = \sum_{i=1}^{47} i = \frac{47 \times 48}{2}.$$

Quelque soit le point de vue, il y en a $\binom{48}{2}$. □

**Exercice 7.** Les déplacements sont représentés par la position des déplacements vers la droite (les autres sont vers le haut). Autrement dit, un déplacement est caractérisé par le sous-ensemble des positions où on se déplace vers la droite.

Il y a exactement 7 déplacements à faire dont 3 sont vers la droite. Donc il y $\binom{7}{3}$ chemins possibles autant que de façons de fixer le sous-ensemble constitué par les 3 déplacements vers la droite sur les 7 au total. □

**Exercice 8.** 1. Les podiums sont des 3−listes sans répétition (ou des arrangements) prises parmi les 8 coureurs. Il y en a $\dfrac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$. □

2. Les podiums sont des 3−listes sans répétition (ou des arrangements) prises parmi les 3 coureurs Kényans. Il y en a $3! = 6$. □

3. Il est plus simple de comptabiliser les podiums ne contenant aucun coureur Kényan. En effet, il s'agit des 3−listes sans répétition prises dans les coureurs non-Kényans, donc

il y en a $\dfrac{5!}{2!}$. Ainsi, comme l'ensemble des podiums est l'union disjointe des podiums sans Kényans et de ceux avec au moins un Kényan, il y en a $\dfrac{8!}{5!} - \dfrac{5!}{2!} = 336 - 60 = 276$. $\square$

4. Commençons par dénombrer le nombre de composition possibles de podiums. Il s'agit du nombre de sous-ensembles étant la réunion d'un singleton pris parmi les 3 Kényans (il y en a $\binom{3}{1} = 3$) et le nombre de paires prises parmi les autres, (il y en a $\binom{5}{2} = 10$). Il y a donc 30 compositions possibles.

   Ensuite, chaque composition donne à $3! = 6$ (le nombre de permutation) podiums.

   Il y a donc $\binom{3}{1} \times \binom{5}{2} \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$. $\square$

5. On peut faire la même chose que précédemment, compter le nombre de compositions possibles (donc cette fois-ci compter le nombre de paires de Kényans puis le nombre de singletons des autres, soit $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} = 3 \times 5 = 15$). Puis on multiplie ça par le nombre de permutation $3! = 6$.

   Ainsi, il y en a $\binom{3}{2} \times \binom{5}{1} \times 3! = 3 \times 5 \times 6 = 90$.

   Mais plus simplement, les podiums contenant au moins un Kényans sont l'union disjointe des podiums contenant 3 Kényans (il y en a 6) ceux contenant exactement 2 Kényans (ceux qu'on cherche à dénombrer) et ceux en contenant exactement 1 (il y en 180).

   Ainsi, d'après la propriété sur les cardinaux d'union disjointe, on a

$$276 - 6 - 180 = 90.$$

   On retrouve le même résultat. $\square$

**Exercice 9.** 1. On peut modéliser le résultat par une liste sans répétition des 7 amis (les fauteuils de gauche à droite), c'est-à-dire de permutations. Ainsi, il y a $7!$ façons de s'asseoir. $\square$

2. Exactement autant (on part du fauteuil et on remplit vers la gauche). $\square$

3. Il faut remarquer que c'est la même chose que la question précédente, sauf qu'à chaque table correspond 7 possibilités de placer un fauteuil. Il y a donc un rapport de 7 entre les deux résultats. On a donc $\dfrac{7!}{7} = 6!$. $\square$

**Exercice 10.** 1. On modélise la situation en numérotant les personnes. Les $p$ représentants sont un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$, donc il y a $\binom{n}{p}$. Il y a ensuite $\binom{p}{1}$ façon de choisir le président. Au total, il y a donc $\binom{n}{p}\binom{p}{1}$ façons de choisir les représentants puis le président parmi eux. $\square$

2. Si on commence par déterminer le président, il y a $\binom{n}{1}$ façons de le choisir. Il reste à déterminer le choix des $p-1$ représentants, soit le nombre de façons de choisir un

sous-ensemble à $p-1$ éléments pris parmi les $n-1$ éléments restants. Il y en a donc $\binom{n-1}{p-1}$.

Au total, il y a donc $\binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1}$ façons de choisir un président puis $p-1$ représentants.

$\square$

3. Et bien comme ça fait la même chose, on a

$$\binom{n}{p}\binom{p}{1} = \binom{n}{1}\binom{n-1}{p-1} \iff p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

$\square$

4. On a

$$p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}$$

et ce car $p \geqslant 1$. Ensuite, on remarque que, comme $n \geqslant 1$, $n! = (n-1)!n$, donc

$$\frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = \frac{(n-1)!n}{(p-1)!(n-p)!} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

On a donc bien pour tous $p, n$ entiers naturels non nuls avec $p \leqslant n$,

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

$\square$

**Exercice 11.** 1. Une question très simple : les tirages sont les sous-ensembles de $[\![1, n]\!]$ à $p$ éléments. Il y en a donc $\binom{n}{p}$. $\square$

2. Tout d'abord, remarquons que si $k < p$, il n'y a aucune solution.

Ensuite, deux façons de voir les choses :

- On remarque que les tirages satisfaisants cette condition sont les sous-ensembles de $[\![1, k-1]\!]$ à $p-1$ éléments que l'on a réuni avec le singleton $\{k\}$. Dans ce cas, on remarque qu'il y en a donc $\binom{k-1}{p-1}$.
- On considère l'ensemble des tirages dont le plus grand numéro est inférieur ou égal à $k$. Il y en a $\binom{k}{p}$. Cependant, cet ensemble est la réunion disjointe des tirages dont le plus grand numéro est inférieur ou égal à $k-1$ (il y en a $\binom{k-1}{p}$, en prenant l'habituelle convention de nullité si $p < k-1$) et de ceux donc le plus grand numéro est égal à $k$, ce que l'on cherche.
  Ainsi, on en a $\binom{k}{p} - \binom{k-1}{p} = \binom{k-1}{p-1}$ d'après la formule de Pascal.

Un petit commentaire : la première façon de voir les choses semble peut-être plus simple mais est moins robuste que la seconde, vous en aurez l'illustration dès la fin de l'exercice. $\square$

3. L'ensemble des tirages est la réunion disjointe de l'ensemble des tirages dont le plus grand numéro est égal à $k$ pour $k$ allant de $p$ à $n$. Ainsi, on a

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} = \binom{n}{p}.$$

   On appelle cette formule la formule de Pascal itérée. □

4. Reprendre les deux premières questions dans le cadre d'un tirage avec remise. Il s'agit désormais des listes de $[\![1,n]\!]$ à $p$ éléments. Il y en a donc $n^p$.

   Ensuite, on utilise la deuxième façon de voir les choses de la question ci-dessus. On considère l'ensemble des tirages dont le plus grand numéro est inférieur ou égal à $k$. Il y en a $k^p$ (ce sont les listes de $[\![1,k]\!]$ à $p$ éléments). Cependant, cet ensemble est la réunion disjointe des tirages dont le plus grand numéro est inférieur ou égal à $k-1$ (il y en a $(k-1)^p$) et de ceux donc le plus grand numéro est égal à $k$, ce que l'on cherche.

   Ainsi, on en a $k^p - (k-1)^p$.

   La question analogue à la formule de Pascal itérée n'a que peu d'intérêt puisqu'il s'agit tout simplement d'une somme télescopique. □

**Exercice 12.** 1. En distinguant selon les triples, doubles ou ceux où tous les numéros sont différents, on pourra ajouter tous les résultats puisque qu'il s'agit d'une union disjointe.

- Il y a 6 triples.
- Un double peut-être représenté par une $2-$liste sans répétition (le premier élément donnant la valeur du double, l'autre celui du terme simple). Il y a donc $6\times 5 = 30$ doubles.
- Les simples peuvent être représentés par des sous-ensembles à 3 éléments de $[\![1,6]\!]$. Il y en a donc $\binom{6}{3} = \dfrac{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{(3\times 2\times 1)^2} = 20$.

Il y a donc $6 + 30 + 20 = 56$ résultats possibles. A noter (et nous reverrons ça en probabilités) qu'ils n'ont pas du tout la même probabilité d'apparaitre ! □

2. a. On représente les résultats par des $3-$listes de de $[\![1,6]\!]$. C'est le nombre de 3-listes de $[\![1,6]\!]$ donc $6^3 = 216$. □
   b. C'est le nombre de 3-arrangements (ou listes sans répétition) de $[\![1,6]\!]$, donc $6\times 5\times 4 = 120$. □
   c. Il est nettement plus rapide de dénombrer ceux n'ayant pas de 1, il y en a $5^3$ (des $3-$listes sans répétition de $[\![2,6]\!]$), donc il y a $6^3 - 5^3 = 216 - 125 = 91$ résultats avec au moins une fois le chiffre 1. □
   d. Il faut remarquer qu'un tel résultat peut se représenter sous la forme d'un couple $(a,b)$ où $a$ décrit le numéro du dé n'ayant pas fait 3 (donc 3 choix possibles) et $b$ donne la valeur de ce dé (donc 5 choix possibles). Il y a donc $3\times 5 = 15$ résultats possibles. □

## 3. Pour aller plus loin

**Exercice 13.** On représente un héritage par une $5-$liste d'éléments de $[\![1,3]\!]$ où le $i$ème élément de la liste désigne le numéro de l'enfant qui hérite du champ $c_i$.
Ainsi, il y a $3^5$ façons de distribuer ses champs.

Il y a 3 héritages qui spolient deux enfants (tout à l'un des trois).
Etant donné un enfant, il y a $2^5$ héritages qui le spolient (une $5-$liste des deux autres enfants). Il y a donc $2^5-2$ héritages qui ne spolient que lui (on enlève les deux qui spolient un autre enfant). Ainsi, il y a $2^5-2$ héritages qui spolient uniquement un enfant fixé, donc $3(2^5-2)$ qui spolient exactement un enfant.
Pour finir, il ne reste qu'à retirer le nombre d'héritages qui ne satisfont pas les conditions au nombre total. Ainsi, le nombre d'héritages satisfaisants est :

$$3^5 - 3 - 3(2^5 - 2) = 243 - 3 - 3(32 - 2) = 150.$$

□

**Exercice 14.** Si on numérote les lots, cela ressemble étrangement à l'exercice sur les champs...
En numérotant les 3 lots (et les couleurs par simplicité), une répartition est représentée par une $6-$liste d'éléments de $[\![1,3]\!]$ où le $i$ème élément de la liste désigne le numéro de lot qui contient la boule $i$.
Ainsi, il y a $3^6$ façons de distribuer les boules.
Il y a 3 répartitions qui donnent deux lots vides..
Etant donné un lot, il y a $2^6$ répartitions qui le laissent vide (une $6-$liste des deux autres numéros de lot). Il y a donc $2^6-2$ répartition qui ne laissent que ce lot vide (on enlève les deux qui en laisse un autre vide). Ainsi, il y a $2^6-2$ répartitions qui laissent uniquement un lot fixé vide, donc $3(2^6-2)$ qui laissent exactement un lot vide.
Pour finir, il ne reste qu'à retirer le nombre de répartitions incorrectes qui ne satisfont pas les conditions au nombre total. Ainsi, le nombre de répartitions satisfaisantes est : $3^6 - 3 - 3(2^6 - 2)$.
Cependant, les lots ne sont en réalité pas numérotés. Il faut donc diviser par le nombre de permutations que l'on peut faire entre ces lots.
Le nombre de répartitions acceptables est donc :

$$\frac{3^6 - 3 - 3(2^6 - 2)}{3!} = \frac{3^5 - 1 - (2^6 - 2)}{2} = \frac{243 - 1 - (64 - 2)}{2} = 90.$$

□

**Exercice 15.** 1. Si $A$ est fixé avec $\mathrm{Card}(A) = k$, il y a $2^{n-k}$ façons de choisir un $B$ satisfaisant (le nombre de sous-ensembles de $E \setminus A$). Il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de $E$ à $k$ éléments, donc $\binom{n}{k}2^{n-k}$ couples satisfaisants les conditions dont le premier élément a $k$ éléments.

Par union disjointe en distinguant selon le cardinal du premier élément du couple, on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} = (1+2)^n = 3^n.$$

□

2. Soit on procède de la même façon : Si $A$ est fixé avec $\mathrm{Card}(A) = k$, il y a $2^k$ façons de choisir un $B$ satisfaisant (le nombre de sous-ensembles de $A$ que l'on réunit avec $\overline{A}$). Il y a $\binom{n}{k}$ sous-ensembles de $E$ à $k$ éléments, donc $\binom{n}{k}2^k$ couples satisfaisants les conditions dont le premier élément a $k$ éléments.

Par union disjointe en distinguant selon le cardinal du premier élément du couple, on trouve

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = (2+1)^n = 3^n.$$

L'autre solution est de remarquer que les couples $(A, B)$ sont tels que $A \cup B = E$ sont les couples tels que $\overline{A \cup B} = \emptyset$, autrement dit se sont des couples tels que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Il y a $3^n$ façons de choisir le couple $(\overline{A}, \overline{B})$ d'après la question précédente.

On trouve $3^n$ couples. $\square$

3. On peut essayer de faire la même chose, fixer $A$, puis réfléchir à la façon d'obtenir $(B, C)$ qui satisfont le problème, etc. C'est un peu long et il y a beaucoup de formules du binôme. On va essayer de trouver une autre solution.

   Remarquons qu'une telle répartition est définie par l'appartenance de chaque élément de $E$, à $A$, $B$, $C$, $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ ou $A \cup B \cup C$. Ainsi, on peut associer à chaque élément de $E$ un numéro entre 1 et 7 pour désigner à quel(s) ensemble(s) il appartient (l'un des 7 cas évoqués).

   On peut donc modéliser un tel triplet par une $n$-liste d'éléments de $[\![1, 7]\!]$. Il y a donc $7^n$ triplets satisfaisants. $\square$

**Exercice 16.** 1. On va représenter ça par une liste dont le premier élément donne le numéro de l'urne accueillant la première boule, le deuxième celui de la deuxième, et le troisième celui de la troisième.

On a $(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (1, 2, 2), (2, 1, 1), (2, 1, 2), (2, 2, 1), (2, 2, 2)$. $\square$

2. Une répartition est caractérisée par la $r-$liste des éléments de $[\![1, n]\!]$ où le $i$ème terme donne le numéro de l'urne où se situe la $i$ème boule. $\square$

3. Nous allons représenter chaque possibilité à l'aide de $\bigcirc$ et $|$.

   - On commence par placer autant de $\bigcirc$ qu'il y de boules dans la première urne.
   - On place un $|$.
   - On place autant de $\bigcirc$ qu'il y de boules dans la deuxième urne 2.
   - On place un $|$.
   - On recommence jusqu'à placer les $\bigcirc$ correspondant au nombre de boules dans l'urne $n$.

   Une répartition est donc représentée par un « mot » de $r$ $\bigcirc$ et de $n-1$ $|$. Il y en a autant que de possibilités pour choisir le sous-ensemble de $[\![1, n+p-1]\!]$ qui correspond aux emplacements des $r$ $\circ$, donc $\binom{n+r-1}{r} = \binom{n+r-1}{n-1}$. $\square$

4. Toujours dans le cas où les $r$ boules sont indiscernables, combien y a-t-il de répartition sans urne vide ? Si $r < n$, c'est impossible.

   Dans le cas contraire, une fois que chaque urne contient une boule, il reste $r-n$ boules à placer dans les $n$ urnes... on retrouve le problème précédent, donc $\binom{n+(r-n)-1}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}$ possibilités. $\square$

**Exercice 17.** 1. Il y en a autant que de façons de choisir l'élément invariant ou autant que de choisir la paire qui sera échangée, donc $\binom{3}{2} = 3$. □

2. 1 peut être envoyé sur 2 ou 3, et l'image de 1 ne peut pas être envoyée sur elle-même (elle serait invariante) ou sur 1 (l'autre serait invariant). Ainsi, il n'y en a que 2. □

3. Il n'y en a pas : on peut remarquer qu'il y a 6 permutations, dont 5 ont déjà été évoquées plus l'identité.

   Ou alors on peut remarquer que si deux éléments sont invariants, alors le troisième ne peut pas avoir d'autre image que lui-même. □

**Exercice 18.** 1. Une question faussement compliquée. Si on considère l'application

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p) \longmapsto (x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \ldots, x_1 + \ldots + x_p)$$

elle transforme un $p-$uplet qui satisfait la première condition en un $p-$uplet qui satisfait la deuxième.

De plus, elle est bijective : sa réciproque est évidemment

$$(y_1, y_2, y_3, \ldots, y_p) \longmapsto (y_1, y_2 - y_1, y_3 - y_2, \ldots, y_p - y_{p-1}).$$

Il ya donc autant de $p-$uplet de chaque sorte. □

2. Ça, c'est facile : $a(0, p) = 1$ car le seul convenable est $(0, 0, \ldots, 0)$ et $a(n, 1) = 1$ car le seul est $(n)$. □

3. Les $p-$uplets qui satisfont à la contraintes se divisent en deux (union disjointe) :

   - ceux donc le dernier terme est non nul : il y a $a(n - p, p)$ puisqu'on peut retirer 1 à la dernière composante pour arriver à un total de $n - p$ ;
   - et les autres dont le dernier terme est nul : ils sont au nombre de $a(n, p - 1)$ puisque on arrive à $n$ en seulement $p - 1$ composantes.

   Ainsi, on a bien $a(n, p) = a(n - p, p) + a(n, p - 1)$. □

# 5 Nombres complexes

## 1. Exercices de base

**Exercice 1.** On rappellera que si on a $z = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$, alors le module de $z$ est $\rho$ et un de ses arguments est $\theta$. □

1. On a $\frac{3}{2}i = \frac{3}{2}e^{i\pi/2}$. □

2. $-3 = 3e^{i\pi}$. □

3. $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{2i\pi/3}$. □

4. $-2i = 2e^{i\pi}e^{i\pi/2} = 2e^{3i\pi/2} = 2e^{-i\pi/2}$. □

5. $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)} = \dfrac{e^{i\pi/4}}{e^{-i\pi/4}} = e^{i\pi/2}$. □

6. $\left(\dfrac{i}{1+i}\right)^4 = \left(\dfrac{e^{i\pi/2}}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}\right)^4 = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi/4}}\right)^4 = \dfrac{e^{i\pi}}{4} = -\dfrac{1}{4}.$ $\square$

7. $-3(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = 3e^{i\pi}e^{i\theta} = 3e^{i(\theta+\pi)}$. $\square$

8. $2(\cos(2\theta) - i\sin(2\theta)) = 2e^{-2i\theta}$. $\square$

**Exercice 2.** Résoudre les équations suivantes d'inconnues $x \in \mathbb{R}$ :

1. La première étape est de trouver une équation équivalente plus simple. On va donc chercher $r, \varphi$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) + \sin(x) = r\cos(x+\varphi).$$

En utilisant les techniques présentées en cours, (ici on remarque que $\cos(x) + \sin(x)$ est la partie réelle de $(1-i)e^{ix} = \sqrt{2}e^{i(x-\frac{\pi}{4})}$) on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right).$$

L'équation de départ est donc équivalente à

$$\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

Autrement dit $\cos\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Cette équation est équivalente à $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Elle est donc équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\begin{cases} x - \dfrac{\pi}{4} = & \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x - \dfrac{\pi}{4} = & -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce qui se reformule en

$$\begin{cases} x = & \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = & 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc $\left\{\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

$\square$

2. La première étape est de trouver une équation équivalente plus simple. On va donc chercher $r, \varphi$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\cos(x) - \sin(x) = r\cos(x+\varphi).$$

En utilisant les techniques présentées en cours (ici on remarque que $\cos(x) - \sin(x)$ est la partie réelle de $(1+i)e^{ix} = \sqrt{2}e^{i(x+\frac{\pi}{4})}$), on trouve

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x) - \sin(x) = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$

L'équation de départ est donc équivalente à

$$\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Autrement dit $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Cette équation est équivalente à $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Elle est donc équivalente à ce qu'une des équations suivante soit vraie

$$\begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = & \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x + \frac{\pi}{4} = & -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce qui se reformule en

$$\begin{cases} x = & -\frac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, \\ x = & -\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'ensemble solution est donc $\left\{-\frac{5\pi}{12} + 2k\pi, -\frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$.

□

**Exercice 3.** 1. On a $\left|\frac{1+4i}{2-2i}\right| = \frac{|1+4i|}{|2-2i|} = \sqrt{\frac{17}{8}} = \frac{\sqrt{34}}{4}$. □

2. En multipliant par la quantité conjuguée et en simplifiant, on trouve

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{(1-i\sqrt{3})(-1+i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

3. On a

$$\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(1-i)(1-i\sqrt{3})}{1+3} = \frac{(1-\sqrt{3}) + (-1-\sqrt{3})i}{4}.$$

□

4. On a $\left|\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1-i)\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right| |1-i| = \sqrt{2}$. □

5. On a

$$\frac{1-i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{2\left(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)} = \frac{e^{-i\pi/3}}{e^{4i\pi/3}} = e^{-5i\pi/3} = e^{i\pi/3}$$

donc le module est 1 et un argument est $\frac{\pi}{3}$.

A noter que c'est aussi très efficace pour trouver l'expression algébrique, presque plus que la quantité conjuguée. □

6. On a $\dfrac{\sqrt{2}-i\sqrt{2}}{1-i\sqrt{3}} = \dfrac{2e^{-i\pi/4}}{2e^{-i\pi/3}} = e^{i\pi/12}$ donc module 1 et argument $\dfrac{\pi}{12}$. □

7. On a
$$\frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{3+i\sqrt{3}} = \frac{2e^{i\pi/4}}{2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)} = \frac{\sqrt{3}}{3}\frac{e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}e^{i\pi/12}$$

   donc module $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et un argument est $\dfrac{\pi}{12}$ □

**Exercice 4.** 1. L'astuce, comme dans tout l'exercice, est de factoriser par l'angle moitié.
   On a $1+e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right) = 2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}$.

   Comme $\theta \in [0,\pi[$, $\dfrac{\theta}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $2\cos(\theta/2) \geqslant 0$.

   Ainsi, on découvre que $1+e^{i\theta}$ a pour module $2\cos(\theta/2)$ et pour argument $\dfrac{\theta}{2}$. □

2. On a $1-e^{i\theta} = e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right) = -2i\sin(\theta/2)e^{i\theta/2} = 2\sin(\theta/2)e^{i(\theta-\pi)/2}$.

   Comme $\theta \in [0,\pi[$, $\dfrac{\theta}{2} \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, donc $2\sin(\theta/2) \geqslant 0$.

   Ainsi, on découvre que $1-e^{i\theta}$ a pour module $2\sin(\theta/2)$ et pour argument $\dfrac{\theta-\pi}{2}$. □

3. Le fait que $\theta-\varphi \notin \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$ implique la non-nullité du dénominateur. Procédons.
   On a
$$\frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{e^{i\theta}-e^{i\varphi}} = \frac{e^{i(\theta+\varphi)/2}}{e^{i(\theta+\varphi)/2}}\frac{e^{i(\theta-\varphi)/2}+e^{-i(\theta-\varphi)/2}}{e^{i(\theta-\varphi)/2}-e^{-i(\theta-\varphi)/2}}.$$

   En simplifiant et en utilisant les formules d'Euler, on a
$$\frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{e^{i\theta}-e^{i\varphi}} = \frac{2\cos((\theta-\varphi)/2)}{2i\sin((\theta-\varphi)/2)}.$$

   Autrement dit,
$$\frac{e^{i\theta}+e^{i\varphi}}{e^{i\theta}-e^{i\varphi}} = -i\frac{\cos((\theta-\varphi)/2)}{\sin((\theta-\varphi)/2)}.$$

   Il s'agit donc d'un imaginaire pur dont la partie imaginaire vaut
$$-\frac{\cos((\theta-\varphi)/2)}{\sin((\theta-\varphi)/2)} = \frac{\cos((\varphi-\theta)/2)}{\sin((\varphi-\theta)/2)}.$$

   □

**Exercice 5.** $e^{e^{i\theta}} = e^{\cos(\theta)+i\sin(\theta)} = e^{\cos(\theta)}e^{i\sin(\theta)}$. Donc le module est $e^{\cos(\theta)}$ et un argument est $\sin(\theta)$. □

**Exercice 6.** Pour toutes les questions, on utilise les formules d'Euler, on développe avec le binôme de Newton, puis on regroupe les termes ensemble de façon à réutiliser les formes d'Euler.
On peut s'en sortir en utilisant des formules de trigonométrie si on n'a pas peur de méthodes laborieuses. □

1. On a, d'après la formule d'Euler,

$$\begin{aligned}
A(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4 \\
&= \frac{e^{4ix}+4e^{3ix}e^{-ix}+6e^{2ix}e^{-2ix}+4e^{ix}e^{-3ix}+e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{16} \\
&= \frac{e^{4ix}+e^{-4ix}+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6}{16} \\
&= \frac{2\cos(4x)+8\cos(2x)+6}{16} \text{ en utilisant à nouveau la formule d'Euler} \\
&= \frac{\cos(4x)+4\cos(2x)+3}{8}
\end{aligned}$$

□

2. De la même façon, en accélérant un peu

$$\begin{aligned}
B(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^2 \\
&= \frac{(e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix})(e^{2ix}-2+e^{-2ix})}{8\times(-4)} \\
&= -\frac{e^{5ix}+e^{3ix}-2e^{ix}-2e^{-ix}+e^{-3ix}+e^{-5ix}}{32} \\
&= -\frac{2\cos(5x)+2\cos(3x)-4\cos(x)}{32} \text{ en utilisant à nouveau la formule d'Euler} \\
&= \frac{-\cos(5x)-\cos(3x)+2\cos(x)}{16}.
\end{aligned}$$

□

3. Encore une fois, on trouve

$$\begin{aligned}
C(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^5 \\
&= \frac{e^{5ix}-5e^{4ix}e^{-ix}+10e^{3ix}e^{-2ix}-10e^{2ix}e^{-3ix}+5e^{ix}e^{-4ix}-e^{-5ix}}{32i} \\
&= \frac{e^{5ix}-5e^{3ix}+10e^{ix}-10e^{-ix}+5e^{-3ix}-e^{-5ix}}{32i} \\
&= \frac{2i\sin(5x)-10i\sin(3x)+20i\sin(x)}{32i} \text{ en utilisant à nouveau la formule d'Euler} \\
&= \frac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)}{16}
\end{aligned}$$

Contre toute attente, on trouve $C(x)=\dfrac{\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)}{16}$.

On a donc $\sin(5x)-5\sin(3x)+10\sin(x)=0$ si et seulement si $16C(x)=0$, autrement dit $\sin^5(x)=0$.

L'équation est donc simplement équivalente à $\sin(x)=0$, donc l'ensemble solution est $\{k\pi/k\in\mathbb{Z}\}$. □

**Exercice 7.** C'est exactement le contraire de l'exercice précédent. On peut soit remarquer que $A(x) = Re(e^{4ix})$ et remarquer que $e^{4ix} = (\cos(x) + i\sin(x))^4$ (Moivre), développer et garder la partie réelle. $\square$

1. On a
$$A(x) = \quad Re(e^{4ix})$$
Or
$$\begin{aligned} e^{4ix} = &\quad (e^{ix})^4 \\ = &\quad (\cos(x) + i\sin(x))^4 \\ = &\quad \cos^4(x) + 4i\cos^3(x)\sin(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) - 4i\cos(x)\sin^3(x) + \sin^4(x). \end{aligned}$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} A(x) = &\quad \cos^4(x) - 6\cos^2(x)\sin^2(x) + \sin^4(x) \\ = &\quad \cos^4(x) - 6\cos^2(x)(1 - \cos^2(x)) + (1 - \cos^2(x))^2 \\ = &\quad \cos^4(x) - 6\cos^2(x) + 6\cos^4(x) + 1 - 2\cos^2(x) + \cos^4(x) \\ = &\quad 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1 \end{aligned}$$
$\square$

2. On a
$$\begin{aligned} \cos(3x) = &\quad Re(e^{3ix}) \\ = &\quad Re((e^{ix})^3) \\ = &\quad Re((\cos(x) + i\sin(x))^3) \\ = &\quad Re(\cos^3(x) + 3i\cos^2(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) - i\sin^3(x)) \\ = &\quad \cos^3(x) - 3\cos(x)\sin^2(x) \\ = &\quad \cos^3(x) - 3\cos(x)(1 - \cos^2(x)) \\ = &\quad 4\cos^3(x) - 3\cos(x). \end{aligned}$$
Ainsi,
$$B(x) = \cos(3x)\sin(x)$$
$$\begin{aligned} = &\quad (4\cos^3(x) - 3\cos(x))\sin(x) \\ = &\quad 4\cos^3(x)\sin(x) - 3\cos(x)\sin(x). \end{aligned}$$
$\square$

3. On a

$$C(x) = Im(e^{5ix})$$

Or

$$\begin{aligned} e^{5ix} = & (e^{ix})^5 \\ = & (\cos(x) + i\sin(x))^5 \\ = & \cos^5(x) + 5i\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^3(x)\sin^2(x) - 10i\cos^2(x)\sin^3(x) + 5\cos(x)\sin^4(x) + i\sin^5(x) \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} C(x) = & 5\cos^4(x)\sin(x) - 10\cos^2(x)\sin^3(x) + \sin^5(x) \\ = & 5(1-\sin^2(x))^2\sin(x) - 10(1-\sin^2(x))\sin^3(x) + \sin^5(x) \\ = & 6\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x). \end{aligned}$$

On trouve $C(x) = 6\sin^5(x) - 20\sin^3(x) + 5\sin(x)$. $\square$

**Exercice 8.** Il faut passer en notation polaire pour calculer facilement la puissance !
On a

$$\begin{aligned} (\sqrt{3}-i)^{17} = & \left[2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\right]^{17} \\ = & 2^{17}\left(e^{-i\pi/6}\right)^{17} \\ = & 2^{17}e^{-17i\pi/6} \\ = & 2^{17}e^{-5i\pi/6} \\ = & 2^{17}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right) \\ = & -2^{16}\sqrt{3} - i2^{16} \end{aligned}$$

La partie réelle est $-2^{16}\sqrt{3}$ et la partie imaginaire $-2^{16}$.
De la même façon, on a

$$\begin{aligned} (1-i\sqrt{3})^{-23} = & \left[2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]^{-23} \\ = & 2^{-23}\left(e^{-i\pi/3}\right)^{-23} \\ = & 2^{-23}e^{23i\pi/3} \\ = & 2^{-23}e^{-i\pi/3} \\ = & 2^{-23}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ = & 2^{-24} - i\sqrt{3}\times 2^{-24} \end{aligned}$$

La partie réelle est $2^{-24}$ et la partie imaginaire $-i\sqrt{3}2^{-24}$.
Et le dernier, on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right)^{24} &= \left(\frac{2e^{-i\pi/3}}{2e^{i\pi/4}}\right)^{24} \\ &= \left(e^{-7i\pi/12}\right)^{24} \\ &= e^{-14i\pi} \\ &= 1.\end{aligned}$$

Ai-je vraiment besoin de préciser partie réelle et imaginaire ?
□

## 2. Equations du second degré

**Exercice 9.** Je ne détaille la rédaction que d'un, vous y rapporter pour les autres. □

1. Deux solutions, $3i$ et $-3i$. □

2. Notons $\Delta$ le discriminant associé. On a $\Delta = (-1)^2 - 4 = -3 = (i\sqrt{3})^2$.

   On a donc deux solutions conjuguées, $z_1 = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$

   □

3. Deux solutions, $\dfrac{-1-i\sqrt{15}}{2}$ et $\dfrac{-1+i\sqrt{15}}{2}$. □

4. Deux solutions, $1-i$ et $1+i$. □

5. Deux solutions, $\dfrac{-\sqrt{3}-i}{2}$ et $\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$. □

6. Posons $Z = z^2$. On tombe sur l'équation $Z^2 + Z + 1 = 0$. Son discriminant est $-3 = (i\sqrt{3})^2$. Ainsi, on trouve deux solutions $Z_1 = \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2} = e^{4i\pi/3}$ et $Z_2 = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2} = e^{2i\pi/3}$.

   On a donc deux équations possibles,

   $$z^2 = e^{4i\pi/3} \text{ et } z^2 = e^{2i\pi/3}.$$

   Cherchons les solutions sous forme polaire (0 n'est pas solution), donc $z = \rho e^{i\theta}$.

   On a alors

   $$\rho^2 e^{2i\theta} = e^{4i\pi/3} \text{ et } \rho^2 e^{2i\theta} = e^{2i\pi/3}.$$

   Ce qui donne pour la première

   $$\begin{cases} \rho^2 = & 1 \\ 2\theta = & \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à, comme $\rho > 0$,

$$\begin{cases} \rho = & 1 \\ \theta = & \dfrac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On trouve deux solutions distinctes, $e^{2i\pi/3}$, $-e^{2i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$

Pour la deuxième, c'est le même principe

$$\begin{cases} \rho^2 = & 1 \\ 2\theta = & \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à, comme $\rho > 0$,

$$\begin{cases} \rho = & 1 \\ \theta = & \dfrac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On trouve deux solutions distinctes, $e^{i\pi/3}$, $-e^{i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$.

On a exactement 4 solutions pour $z$, $e^{2i\pi/3}$, $-e^{2i\pi/3} = e^{-i\pi/3}$, $e^{i\pi/3}$, $-e^{i\pi/3} = e^{-2i\pi/3}$.
$\square$

## 3. Equations diverses

**Exercice 10.** 1. Ça marche comme d'habitude, sauf que le discriminant est $\Delta = -4 + 4(2-2i) = -12 + 16i = (2+4i)^2$. Ainsi, on peut trouver les deux racines : $1 + 3i$ et $-1 - i$. $\square$

2. N'oublions pas que $z^3 - i = z^3 - (-i)^3 = (z+i)(z^2 - iz - 1)$.

   Donc l'équation devient $(z+i)(z^2 - iz - 1) = 6(z+i)$, autrement dit

$$(z+i)(z^2 - iz - 7) = 0.$$

   Donc $-i$ est solution mais aussi (à détailler) $\dfrac{i - 3\sqrt{3}}{2}$ et $\dfrac{i + 3\sqrt{3}}{2}$. $\square$

3. Le plus urgent, mettre le membre de gauche sous forme polaire.

   On a $1 - i = \sqrt{2}e^{-\frac{i\pi}{4}}$ et $\sqrt{3} - i = 2e^{-\frac{i\pi}{6}}$, donc $\dfrac{1-i}{\sqrt{3}-i} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{i\pi}{12}}$. L'équation est équivalente à :

$$z^8 = 2^{-1/2}e^{-i\pi/12}.$$

   Comme 0 n'est pas solution, on peut chercher $z$ sous la forme $\rho e^{i\theta}$, avec $\rho > 0$. On trouve que c'est équivalent à

$$\begin{cases} \rho^8 = & 2^{-1/2} \\ 8\theta = & -\dfrac{\pi}{12} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à, comme $\rho > 0$,

$$\begin{cases} \rho = & 2^{-1/16} \\ \theta = & -\dfrac{\pi}{96} + k\dfrac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On trouve donc 8 solutions, en ne gardant que les expressions dont l'argument est dans $[0, 2\pi[$ (les autres ne sont que des expressions de celles dont l'argument est dans $[0, 2\pi[$).

$$\{e^{\frac{\pi}{96}+k\frac{\pi}{4}}/k \in [\![1;8]\!]\}.$$

□

4. On pose $Z = z^2$. $Z$ est solution de

$$Z^2 - (3-2i)Z + (8+6i) = 0.$$

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = (3-2i)^2 - 4(8+6i) = -27 - 36i = (3-6i)^2$.

On trouve donc deux solutions pour $Z$ : $\dfrac{3-2i-(3-6i)}{2} = 2i$ et $\dfrac{3-2i+(3-6i)}{2} = 3-4i$

On a alors $z^2 = 2i$ ou $z^2 = 3-4i$.

Or, si on se souvient que $2i = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^2 = (1+i)^2$, on trouve que la première équation donne deux racines, $1+i$ et $-1-i$.

Quant à la seconde, grâce à l'indication donnée, on a deux solution $2-i$ et $-2+i$.

□

5. Posons $z = a + ib$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

L'équation devient

$$5(a+ib) - 2\sqrt{a^2+b^2} = 5 + 20i.$$

Soit

$$-2a^2 - 2b^2 + 5a + 5ib = 5 + 20i.$$

En égalisant parties réelle et imaginaire, on obtient le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} 5a - 2\sqrt{a^2+b^2} = & 5 \\ 5b = & 20 \end{cases}$$

Soit, en injectant la valeur de $b$ obtenue,

$$\begin{cases} 5a - 2\sqrt{a^2+16} = & 5 \\ b = & 4 \end{cases}$$

Intéressons-nous maintenant à la première équation.

Elle est équivalente à

$$2\sqrt{a^2+16} = 5(a-1).$$

Ce qui implique

$$4a^2 + 64 = 25(a^2 - 2a + 1).$$

Soit

$$21a^2 - 50a - 39 = 0.$$

Le discriminant est

$$\Delta = 50^2 - 4 \times 21 \times (-39) = 5776 = 76^2.$$

Ainsi, on a deux solutions envisageables $\dfrac{50-76}{42} = -\dfrac{13}{21}$ et $\dfrac{50+76}{42} = 3$.

On peut vérifier, que 3 fonctionne bien, mais $-\dfrac{13}{21}$ non car, pour avoir $2\sqrt{a^2+16} = 5(a-1)$, on doit avoir $a > 1$.

Ainsi, il n'y a qu'une solution au problème $3+4i$. $\square$

**Exercice 11.** En prenant le module de cette équation, on trouve $|z|^9 = \dfrac{1}{|z|^3}$, soit $|z|^{12} = 1$. Comme $|z|$ est un réel positif, la seule possibilité est $|z| = 1$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
L'équation devient $e^{9i\theta} = \dfrac{1}{e^{-3i\theta}}$, soit $e^{6i\theta} = 1$.
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $6\theta = 2k\pi$, ce qui revient à $\theta = k\dfrac{\pi}{3}$, pour $k \in \mathbb{Z}$.
Les solutions sont $\left\{e^{\frac{ik\pi}{3}} / k \in [\![0,5]\!]\right\}$. $\square$

**Exercice 12.** Remarquons tout d'abord que $\dfrac{-1+i}{4} = \sqrt{2}^{-3} e^{3i\pi/4}$.
Ainsi, on cherche $z = \rho e^{i\theta}$ tel que $z^3 = \sqrt{2}^{-3} e^{3i\pi/4}$.
C'est équivalent au système :

$$\begin{cases} \rho^3 = & \sqrt{2}^{-3} \\ 3\theta = & \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Ce qui est équivalent à, comme $\rho > 0$,

$$\begin{cases} \rho = & \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \theta = & \dfrac{3\pi}{4} + k\dfrac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

On a donc trois solutions, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi/4}$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{11i\pi/12}$, et $\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{19i\pi/12}$.
Quand on les élèves a la puissance 4, on trouve $\dfrac{1}{4}e^{i\pi} = -\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{1}{4}e^{11i\pi/3} = \dfrac{1}{4}e^{5i\pi/3}$, et $\dfrac{1}{4}e^{19i\pi/3} = \dfrac{1}{4}e^{i\pi/3}$.
Seule la première a une puissance quatrième réelle. $\square$

**Exercice 13.** On trouve presque une identité remarquable. En fait, si on considère : $[(z-1)-(z+1)][(z-1)^3+(z-1)^2(z+1)+(z-1)(z+1)^2+(z+1)^3] = (z-1)^4-(z+1)^4$.
L'équation de départ est donc équivalente à $\dfrac{(z-1)^4-(z+1)^4}{2} = 0$.
Comme $-1$ n'est pas solution, c'est équivalent à $\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^4 = 1$.
On pose $Z = \dfrac{z-1}{z+1}$. On trouve 4 solutions pour $Z$ : $1, -1, i, -i$. On cherche ensuite les solutions pour $z$.
1 n'était pas une solution possible pour $Z$, , il en reste donc 3 pour $z$ : $0, i$ et $-i$. $\square$

**Exercice 14.** 1 n'est pas solution. Pour $z \neq 1$, en ajoutant $1 + z^n$ à chaque membre et en utilisant une formule bien connue, on voit que cette équation est équivalente à

$$2\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} = 1 + z^n.$$

On arrive donc à

$$2(1 - z^{n+1}) = (1 + z^n)(1 - z),$$

autrement dit

$$2 - 2z^{n+1} = 1 - z + z^n - z^{n+1}.$$

On a donc

$$z^{n+1} + z^n - z - 1 = 0.$$

Soit

$$z^n(z + 1) - (z + 1) = 0.$$

Soit enfin

$$(1 + z)(z^n - 1) = 0$$

On arrange ça en $(1+z)(1-z^n) = 0$. On trouve donc $-1$ solution ainsi que les solutions de $z^n = 1$.
En les cherchant sous la forme $e^{i\theta}$ (car le module de $z$ ne peut valoir que 1), on trouve les $e^{2ik\pi/n}$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$ (il faut retirer 1 car il ne peut pas être solution).
Ainsi, l'ensemble solution est $\left\{e^{2ik\pi/n}/k \in [\![1, n-1]\!]\right\} \cup \{1\}$. $\square$

**Exercice 15.** 0 est solution. Cherchons les solutions non nulles. La première étape est de simplifier cette écriture. On remarque que

$$z^7 + \binom{7}{1}z^6 + \binom{7}{2}z^5 + \binom{7}{3}z^4 + \binom{7}{4}z^3 + \binom{7}{5}z^2 + 7z + 1 = (z+1)^7$$

et

$$z^7 - \binom{7}{1}z^6 + \binom{7}{2}z^5 - \binom{7}{3}z^4 + \binom{7}{4}z^3 - \binom{7}{5}z^2 + 7z - 1 = (z-1)^7.$$

On a donc $z^7 + \binom{7}{2}z^5 + \binom{7}{4}z^3 + 7z = \dfrac{(z+1)^7 - (z-1)^7}{2}$.
L'équation de départ devient donc $(z+1)^7 + (z-1)^7 = 0$
On remarque que 1 n'est pas solution, on en déduit alors qu'on revient à

$$\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^7 = -1 = e^{i\pi}.$$

En cherchant les solutions sous forme de $\dfrac{z+1}{z-1} = \rho e^{i\theta}$, on trouve rapidement que

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{(2k+1)i\pi/7},\ k \in [\![0, 6]\!]$$

(à détailler, mais à ce moment du chapitre, vous devez avoir l'habitude désormais).
L'équation

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{(2k+1)\pi/7},$$

est équivalente à

$$z + 1 = e^{(2k+1)\pi/7}(z - 1),$$

soit
$$(1 - e^{(2k+1)\pi/7})z = -(e^{(2k+1)\pi/7} + 1).$$
On trouve alors, en factorisant par l'angle moitié,
$$z = \frac{1 + e^{(2k+1)i\pi/7}}{e^{(2k+1)i\pi/7} - 1} = -i\frac{\cos((2k+1)\pi/14)}{\sin((2k+1)\pi/14)}$$
pour $k \in [\![0, 6]\!]$. □

## 4. Manipulations diverses

**Exercice 16.** 1. On a

$$\begin{aligned}(1+i)^n - (1-i)^n &= \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^n - \left(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}\right)^n \\ &= \sqrt{2}^n \left(e^{in\pi/4} - e^{-in\pi/4}\right) \\ &= \sqrt{2}^n 2i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right) \\ &= \sqrt{2}^{n+2} i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right).\end{aligned}$$

□

2. Comme on veut, soit par récurrence (en n'ayant pas peur de la trigo ou en utilisant le résultat de la question précédente), soit en se rappelant du cours sur les suites suivant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. Essayons la deuxième méthode.

   On résout l'équation caractéristique associée $X^2 - 2X + 2 = 0$. Le discriminant est $-4 = (2i)^2$. On a donc deux solutions,
$$\frac{2-2i}{2} = 1 - i \text{ et } 1 + i.$$
   Ainsi, il existe $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \lambda(1-i)^n + \mu(1+i)^n.$$
   En faisant $n = 0$, on obtient $\lambda + \mu = 0$ puis en faisant $n = 1$, on récupère
$$\lambda(1-i) + \mu(1+i) = 2i$$
   soit
$$-\lambda + \mu = 2$$
   .

   En ajoutant les deux équations, on obtient $2\mu = 2$, soit $\mu = 1$ puis $\lambda = -1$.

   Ainsi, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (1+i)^n - (1-i)^n$.

   D'après la question précédente, il s'agit de $u_n = \sqrt{2}^{n+2} i \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)$. □

**Exercice 17.** On prend $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{i\varphi}$ avec $\theta \notin \{\varphi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$. On a
$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{e^{i\theta} - e^{i\varphi}}.$$

Le fait que $\theta - \varphi \notin \{2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ implique la non-nullité du dénominateur. Procédons. On a

$$\frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{e^{i\theta} - e^{i\varphi}} = \frac{e^{i(\theta+\varphi)/2}}{e^{i(\theta+\varphi)/2}} \cdot \frac{e^{i(\theta-\varphi)/2} + e^{-i(\theta-\varphi)/2}}{e^{i(\theta-\varphi)/2} - e^{-i(\theta-\varphi)/2}}.$$

En simplifiant et en utilisant les formules d'Euler, on a

$$\frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{e^{i\theta} - e^{i\varphi}} = \frac{2\cos((\theta-\varphi)/2)}{2i\sin((\theta-\varphi)/2)}.$$

Autrement dit,

$$\frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{e^{i\theta} - e^{i\varphi}} = -i\frac{\cos((\theta-\varphi)/2)}{\sin((\theta-\varphi)/2)}.$$

Il s'agit donc d'un imaginaire pur dont la partie imaginaire vaut $\dfrac{\cos((\varphi-\theta)/2)}{\sin((\varphi-\theta)/2)}$.
□

**Exercice 18.** On prend $a$ et $b$ sous forme polaire, donc il existe $\theta$ et $\varphi$ deux réels tels que $a = e^{i\theta}$ et $b = e^{i\varphi}$ avec $\theta + \varphi \notin \{\pi + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.
On a alors

$$\begin{aligned}
\frac{a+b}{1+ab} &= \frac{e^{i\theta} + e^{i\varphi}}{1 + e^{i(\theta+\varphi)}} \\
&= \frac{e^{i(\theta+\varphi)/2}}{e^{i(\theta+\varphi)/2}} \cdot \frac{e^{i(\theta-\varphi)/2} + e^{-i(\theta-\varphi)/2}}{e^{-i(\theta+\varphi)/2} + e^{i(\theta+\varphi)/2}} \\
&= \frac{2\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)} \\
&= \frac{\cos\left(\frac{\theta-\varphi}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\theta+\varphi}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

C'est bien un réel. □

**Exercice 19.** C'est l'inégalité triangulaire appliquée à

$$|a| = \left|\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\right|$$

et

$$|b| = \left|\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\right|.$$

Le cas d'égalité revient au cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, à savoir que $a+b$ et $a-b$ doivent être liés par une relation de proportionnalité à coefficient positif. Ainsi, dans ce cas, il existe $\lambda > 0$ tel que $a + b = \lambda(a-b)$ Soit $(1-\lambda)a = (-1-\lambda)b$, ou encore $b = \dfrac{\lambda - 1}{1+\lambda}a$.
□

**Exercice 20.** Comme $|z| \neq 1$, on a $z \neq 1$, ainsi,

$$\frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \sum_{k=0}^{n} z^k.$$

En appliquant le module et en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} z^k\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |z|^k.$$

De plus, comme $|z| \neq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |z|^k = \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}$.
On a donc bien, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| \neq 1$,

$$\left|\frac{1-z^{n+1}}{1-z}\right| \leqslant \frac{1-|z|^{n+1}}{1-|z|}.$$

$\square$

**Exercice 21.** 1. On a

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{32} = \left(e^{i\pi/4}\right)^{32} = e^{32i\pi/4} = e^{8i\pi} = 1.$$

$\square$

2. On a

$$\left(\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}\right)^{24} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{-i\pi/4}}{2e^{i\pi/3}}\right)^{24} = 2^{-12}\left(e^{-7i\pi/12}\right)^{24} = \frac{e^{-14i\pi}}{4096} = \frac{1}{4096}.$$

$\square$

**Exercice 22.** Prendre $z$ sous forme $e^{i\theta}$ avec $\theta \in ]-\pi, \pi]$ et remarquer que

$$|1+z| = \left|1+e^{i\theta}\right| = \left|e^{i\theta/2}\right|\left|e^{-i\theta/2}+e^{i\theta/2}\right| = 2\left|\cos(\theta/2)\right|.$$

Comme $\frac{\theta}{2} \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant 0$, donc

$$|1+z| = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

De la même façon, on a

$$\left|1+z^2\right| = \left|1+e^{2i\theta}\right| = \left|e^{i\theta}\right|\left|e^{-i\theta}+e^{i\theta}\right| = 2\left|\cos(\theta)\right|.$$

Il suffit alors de remarquer que si $\theta \in \left[-\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{2\pi}{3}\right]$, alors $\dfrac{\theta}{2} \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$, donc $\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}$, et sinon, $\theta \in \left]-\pi, -\dfrac{2\pi}{3}\right]$ ou $\theta \in \left]\dfrac{2\pi}{3}; \pi\right]$ et alors $\cos(\theta) < -\dfrac{1}{2}$, donc $2\left|\cos(\theta)\right| \geqslant 1$. $\square$

**Exercice 23.** On remarque que, comme $\overline{a}b \neq 1$,

$$\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1 \iff |a-b|^2 = |1-\overline{a}b|^2.$$

Ou encore

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1 &\iff (a-b)(\overline{a-b}) = (1-\overline{a}b)(\overline{1-\overline{a}b}) \\
&\iff (a-b)(\overline{a}-\overline{b}) = (1-\overline{a}b)(1-a\overline{b}) \\
&\iff |a|^2 - a\overline{b} - \overline{a}b + |b|^2 = 1 - a\overline{b} - \overline{a}b + |\overline{a}b|^2 \\
&\iff |a|^2 + |b|^2 = 1 + |a|^2|b|^2 \\
&\iff |a|^2(1-|b|^2) + |b|^2 - 1 = 0 \\
&\iff (1-|b|^2)(|a|^2-1) = 0 \\
&\iff (1-|b|)(1+|b|)(|a|-1)(|a|+1) = 0.
\end{aligned}$$

Cette quantité est nulle si et seulement si $|a| = 1$ ou $|b| = 1$. $\square$

**Exercice 24.** 1. Si $x \in \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$, on a $S = 2n+1$. Si $x \notin \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$, on trouve $S = e^{-inx} \sum_{\ell=0}^{2n} e^{i\ell x}$.

Donc $S = e^{-inx} \dfrac{1 - e^{(2n+1)ix}}{1 - e^{ix}}$.

On factorise ensuite par l'angle moitié.

$$S = e^{-inx} \frac{e^{(2n+1)ix/2}}{e^{ix/2}} \frac{-2i\sin((2n+1)x/2)}{-2i\sin(x/2)} = \frac{\sin((2n+1)x/2)}{\sin(x/2)}.$$

$\square$

2. Remarquons que $C_1 + iS_1 = \sum_{k=0}^{n} e^{i(a+kb)} = e^{ia} \sum_{k=0}^{n} \left(e^{ib}\right)^k$.

Si $b \in \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}$, $C_1 = (n+1)\cos(a)$ et $S_1 = (n+1)\sin(a)$. Sinon,

$$C_1 + iS_1 = e^{ia} \frac{1 - e^{i(n+1)b}}{1 - e^{ib}} = e^{i(a+nb/2)} \frac{-2i\sin((n+1)b/2)}{-2i\sin(b/2)}.$$

En simplifiant, on trouve $C_1 + iS_1 = e^{i(a+nb/2)} \dfrac{\sin((n+1)b/2)}{\sin(b/2)}$.

Ainsi,

$$C_1 = \cos\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}$$

et

$$S_1 = \sin\left(a + \frac{nb}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)b}{2}\right)}{\sin\left(\frac{b}{2}\right)}.$$

$\square$

3. C'est le même principe, on considère $C_2 + iS_2$, on reconnait une formule (du binôme cette fois-ci) :

$$C_2 + iS_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{iak} = (1 + e^{ia})^n.$$

En factorisant par l'angle moitié, on a

$$C_2 + iS_2 = e^{ina/2} \left[2\cos\left(\frac{a}{2}\right)\right]^n = 2^n \cos^n\left(\frac{a}{2}\right) e^{ina/2}.$$

On obtient

$$C_2 = 2^n \cos\left(\frac{na}{2}\right) \cos^n\left(\frac{a}{2}\right)$$

et

$$S_2 = 2^n \sin\left(\frac{na}{2}\right) \cos^n\left(\frac{a}{2}\right)$$

$\square$

4. Cette fois-ci, on pose $S_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos^k(x)\sin(kx)$, donc

$$C_3 + iS_3 = \sum_{k=0}^{n} \cos^k(x)e^{ikx}.$$

On remarque que si $x \in \{k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$, $C_3 = n+1$ et $S_3 = 0$ (attention, c'est bien les multiples de $\pi$ par de $2\pi$ pour avoir le terme qui vaut 1). Sinon,

$$C_3 + iS_3 = \frac{1 - \cos^{n+1}(x)e^{i(n+1)x}}{1 - \cos(x)e^{ix}}.$$

Sauf que là, pas de miracle d'angle moitié pour récupérer la partie réelle, il faut multiplier par le conjugué du dénominateur et récupérer ce qu'il faut.

On trouve après un peu de calcul

$$C_3 = \frac{1 - \cos^2(x) - \cos^{n+1}(x)\cos((n+1)x) + \cos^{n+2}(x)\cos(nx)}{1 - \cos^2(x)}.$$

□

**Exercice 25.** On remarque qu'un tel $z$ est forcément non nul.
Si $z \neq 0$, on multiplie tout par $2z$ et on a l'équation équivalente :

$$z^2 - 2xz + 1 = 0.$$

Cette équation a deux solutions, $z_1$ et $z_2$ tels que $z_1 z_2 = 1$. Si on note $\rho_1$ et $\rho_2$ leurs modules respectifs, on a $\rho_1\rho_2 = 1$, donc si $\rho_1 < 1$, alors $\rho_2 > 1$ et inversement. Il reste a exclure le cas $\rho_1 = 1$ (qui implique $\rho_2 = 1$).
Supposons $|z_1| = |z_2| = 1$.
Rappelons que l'on a $z_1 + z_2 = 2x$.
Si $x \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors $z_1$ et $z_2$ ne sont pas conjugués car $z_1 + z_2 \notin \mathbb{R}$, donc $z_1 z_2 \neq 1$.
Si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, on a $|2x| > 2$, donc $2 < |z_1| + |z_2|$ par inégalité triangulaire mais $z_1 + z_2 = 2$, donc on a $2 < 2$ ce qui est exclus.
On en déduit donc que $z_1$ et $z_2$ ne peuvent pas tout deux être de module 1 puisque $x \in \mathbb{C} \setminus [-1; 1]$.
Ainsi, on en revient à la conclusion précédente : au moins une des deux racines est de module strictement supérieur à 1. □

**Exercice 26.** Comme $i$ n'est pas solution, on peut prendre $z \neq i$ et on a alors

$$\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^n = 1.$$

Autrement dit, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{z+i}{z-i} = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.
On remarque qu'il suffit de prendre $k \in [\![0, n-1]\!]$ et que le terme en $k = 0$ est impossible (car $z - i \neq z + i$).
On a alors, $z + i = (z - i)e^{\frac{2ik\pi}{n}}$, donc

$$(1 - e^{\frac{2ik\pi}{n}})z = -i(e^{\frac{2ik\pi}{n}} + 1).$$

Ainsi, on a

$$z=-i\frac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}+1}{e^{\frac{2ik\pi}{n}}-1}.$$

En factorisant au numérateur et au dénominateur par $e^{\frac{ik\pi}{n}}$

$$z=-i\frac{2\cos\left(\frac{ik\pi}{n}\right)}{2i\sin\left(\frac{ik\pi}{n}\right)}.$$

On trouve alors, $z=-\dfrac{\cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}{\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)}$, pour $k\in[\![1,n-1]\!]$.

□

**Exercice 27.** 1. On a $z_0^4+z_0^3+z_0^2+z_0+1=\dfrac{1-z_0^5}{1-z_0}=0$ car $z_0\neq 1$. □

2. Il suffit de factoriser la première équation par $z_0^2\neq 0$ et d'arranger un peu les termes ou sans trop réfléchir remarquer que

$$\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)^2+\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)-1=z_0^2+2+\frac{1}{z_0^2}+z_0+\frac{1}{z_0}-1$$

donc

$$\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)^2+\left(z_0+\frac{1}{z_0}\right)-1=0\iff z_0^2+z_0+1+\frac{1}{z_0}+\frac{1}{z_0^2}=0.$$

Il suffit de remarquer qu'on peut multiplier cette dernière égalité par $z_0^2\neq 0$ pour avoir l'égalité de la question précédente. □

3. On a $z_0+\dfrac{1}{z_0}=e^{2i\pi/5}+e^{-2i\pi/5}=2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$. Il s'ensuit que $2\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ est solution de $X^2+X-1=0$.

Cette équation a deux solutions (à détailler), $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Comme $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)>0$, on a forcément

$$2\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

soit

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

□

# 6 Élements d'analyse

## 1. Applications

**Exercice 1.** Ce sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ mais

$$f\circ g(x)=f(g(x))=f(1+x^2)=2+x^2$$

alors que

$$g\circ f(x)=g(1+x)=2+2x+x^2.$$

Nous n'avons donc pas égalité. □

**Exercice 2.** 1. $f$ est surjective car $\forall y \in \mathbb{Z}$, on a $f(2y) = y$.

$f$ n'est pas injective car, par exemple, $f(0) = f(1)$.

Remarquons que l'image par $g$ d'un nombre pair est pair, l'image d'un nombre impair est impair.

Si on prend $x, x' \in \mathbb{Z}$ tels que $g(x) = g(x')$ alors ils ont tous deux la même parité. S'ils sont pairs, on a $2x = 2x'$, s'ils sont impairs on a $2x + 1 = 2x' + 1$, dans tous les cas, $x = x'$. Ainsi $g$ est injective.

Prenons 1. S'il avait un antécédent, il serait forcément impair d'après la remarque précédente. Or pour avoir $2x + 1 = 1$, il faut avoir $x = 0$ qui est pair. Ainsi 1 n'a pas d'antécédent. $g$ n'est pas surjective. $\square$

2. Remarquons que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont deux applications de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{Z}$. Si $x$ pair, on a $g(x) = 2x$, donc $f(g(x)) = \dfrac{2x}{2} = x$. Si $x$ est impair, on a $g(x) = 2x + 1$ donc $f(g(x)) = \dfrac{2x + 1 - 1}{2} = x$. Ainsi, $f \circ g = id_{\mathbb{Z}}$ qui est bijective.

Remarquons que $f(0) = f(1)$, donc $g(f(0)) = g(f(1))$, ainsi $g \circ f$ n'est pas injective.

Par ailleurs, on a vu que 1 n'avait aucun antécédent par $g$ donc pas non plus par $g \circ f$. Ainsi, $g \circ f$ n'est pas surjective. $\square$

**Exercice 3.** 1. Soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On a alors

$$g(f(x)) = g(f(x')) \iff g \circ f(x) = g \circ f(x').$$

Or, $g \circ f$ est injective, donc $x = x'$.

Ainsi, $f$ est injective. $\square$

2. Soient $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$.

Comme $f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $f(x) = y$ et il existe $x' \in E$ tel que $f(x') = y'$.

Ainsi, on a $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = g \circ f(x')$. Comme $g \circ f$ est injective, on a $x = x'$. En appliquant $f$, on a

$$y = f(x) = f(x') = y'.$$

Ainsi, $g$ est injective. $\square$

3. Soit $z \in G$. Si $g \circ f$ surjective sur $G$, alors il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = z$.

Donc $z = g(f(x))$. Ainsi, $g$ est surjective. $\square$

4. Soit $y \in F$. On a $g(y) \in G$, donc il existe $x \in E$ tel que $g \circ f(x) = g(y)$.

Autrement dit, $g(f(x)) = g(y)$. Comme $g$ est injective, on a $y = f(x)$. Ainsi $f$ est surjective. $\square$

**Exercice 4.** 1. Soit $y \in E$. Comme $h \circ g \circ f$ est surjective, il existe $x \in E$ tel que $h \circ g \circ f(x) = y$, autrement dit $h(g \circ f(x)) = y$, donc $h$ est surjective.

De même, comme $g \circ f \circ h$ est surjective, $g$ est surjective.

Ensuite, soit $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. On a alors $f \circ h(g(y)) = f \circ h(g(y'))$ et comme $f \circ h \circ g$ est une injection, on a $y = y'$. Ainsi, $g$ est une injection, donc une bijection.

Soient $z, z' \in G$ tels que $h(z) = h(z')$. Comme $g$ est une surjection, il existe $y, y' \in F$ tels que $g(y) = z$ et $g(y') = z'$. On a $f(h(z)) = f(h(z'))$ qui devient $f \circ h \circ g(y) = f \circ h \circ g(y')$. Donc comme $f \circ h \circ g$ est injective, on a $y = y'$. En appliquant $g$, on a $g(y) = g(y')$, soit $z = z'$ c'est-à-dire $h$ injective. Ainsi, $h$ est une bijection.

Soient maintenant $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$. On a alors l'existence de $z, z' \in G$ tels que $h(z) = h(z')$ puisque $h$ est surjective, puis celle de $y, y'$ tels que $g(y) = z$ et $g(y') = z'$ car $g$ est surjective. Ainsi, on a $f \circ h \circ g(y) = f \circ h \circ g(y')$ ce qui donne par injectivité de $f \circ h \circ g$, $y = y'$ donc $x = h \circ g(y) = h \circ g(y') = x'$, soit $f$ injective.

Soit désormais $y \in F$. On a alors $h \circ g(y) \in E$, donc il existe $x \in E$ tel que $h \circ g \circ f(x) = h \circ g(y)$. Comme $h$ est injective, on a $g \circ f(x) = g(y)$. Et comme $g$ est injective, on a $f(x) = y$ donc $f$ est surjective. Ainsi, $f$ est bijective.

□

2. De la même façon que dans la question précédente, on récupère immédiatement l'injectivité de $f$ et $h$ et la surjectivité de $f$.

   Ainsi, $f$ est bijective.

   Soit $x \in E$. On a $f(x) \in F$, donc il existe $y \in F$ tel que $f \circ h \circ g(y) = f(x)$. Comme $f$ est injective, on a $h \circ g(y) = x$, ce qui donne la surjectivité de $h$. Ainsi, $h$ est bijective.

   Soit $y, y' \in F$ tels que $g(y) = g(y')$. Comme $f$ est surjective, on trouve $x, x' \in E$ tels que $f(x) = y$ et $f(x') = y'$. Comme $g(y) = g(y')$, on a $g((f(x)) = g(f(x'))$. On a donc forcément $h \circ g \circ f(x) = h \circ g \circ f(x')$ et comme $h \circ g \circ f$ est injective, on a $x = x'$ donc $y = f(x) = f(x') = y'$. Ainsi $g$ est injective.

   On prend désormais $z \in G$. On a donc $f \circ h(z) \in F$, donc il existe $y \in F$ tel que $f \circ h \circ g(y) = f \circ h(z)$. puisque $f \circ h \circ g$ est surjective. Comme $f$ est injective, on a $h \circ g(y) = h(z)$ puis comme $h$ est injective, $g(y) = z$ ce qui donne la surjectivité de $g$. Ainsi, $g$ est bijective. □

**Exercice 5.** 1. Soit $y \in f(A \cap B)$, donc il existe $x \in A \cap B$, tel que $f(x) = y$.

Ainsi, $y = f(x)$ avec $x \in A$, donc $y \in f(A)$. De même, $y \in f(B)$.

Ainsi $y \in f(A) \cap f(B)$. On a donc

$$f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$

□

2. Si $f$ est injective, il suffit de montrer l'inclusion inverse de la question précédente (on vient de montrer que l'autre est toujours vraie).

   Prenons donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Comme $y \in f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. De même, comme $y \in f(B)$, il existe $x' \in B$ tel que $f(x') = y$.

   On a donc $f(x) = f(x')$. Or $f$ est injective, donc $x = x'$, donc $x = x' \in A \cap B$ donc $y \in f(A \cap B)$.

   On a donc $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$ ce qui donne l'inclusion réciproque de la question précédente.

   On a donc montré que si $f$ est injective, on a $\forall (A, B) \in (\mathcal{P}(E))^2 \implies f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

   Réciproquement, soient $x, x' \in E$ tels que $f(x) = f(x')$.

   On a $f(\{x\} \cap \{x'\}) = f(\{x\}) \cap f(\{x'\}) = f(\{x\})$. Or, si $x \neq x'$, on a $\{x\} \cap \{x'\} = \emptyset$ et donc $f(\{x\} \cap \{x'\}) = \emptyset$, ce qui est exclu. On a donc $x = x'$, et ainsi $f$ est injective.

   □

**Exercice 6.** 1. Soit $Y$ un élément de $\mathcal{P}(E)$. Soit il contient $a$ un antécédent possible est $Y \setminus \{a\}$ soit il ne le contient pas et un antécédent est $Y \cup \{a\}$.

Si on prend $X$ et $X'$ deux éléments de $\mathcal{P}(E)$ tels que $f(X) = f(X')$, alors on remarque qu'ils contiennent tous les deux $a$ ou non et que pour le reste, les éléments sont les mêmes puisque $f$ ne change que la présence de $a$. $\square$

2. On trouve rapidement que $f \circ f$ consiste à ajouter $a$ puis l'enlever, ou l'enlever puis l'ajouter. Dans tous les cas $f \circ f = id_{\mathcal{P}(E)}$, donc $f$ était bijective et sa bijection réciproque est elle-même (on parle d'involution). $\square$

## 2. Etudes de fonction

**Exercice 7.** 1. Il s'agit de la composition de cos qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1;1] \subset \mathbb{R}$ avec $x \mapsto x^3$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3\sin(x)\cos^2(x)$. $\square$

2. Il s'agit de la composition de la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto 3x$ avec la fonction cos qui est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -3\sin(3x)$. $\square$

3. La difficulté est de déterminer où $\cos(2x) = 0$, soit quand $2x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

   Ainsi, on a $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}; x \longmapsto 2x$ est dérivable. On la compose avec $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}^*; x \longmapsto \cos(x)$ qui est aussi dérivable.

   On a donc la fonction $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\} \longrightarrow \mathbb{R}^*; x \longmapsto \cos(2x)$ est dérivable et ne s'annule pas, donc son inverse est aussi dérivable sur le même ensemble.

   Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} / k \in \mathbb{Z}\}$, on a $f'(x) = -\dfrac{-2\sin(2x)}{\cos^2(2x)} = \dfrac{2\sin(2x)}{\cos^2(2x)}$.

   $\square$

4. Il aurait fallu déterminer l'ensemble des réels tels qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ avec $x^2 = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$. L'ensemble de dérivabilité sera $\mathbb{R}$ privé de l'ensemble de ces points.

   Ensuite, sur cet ensemble, on a la composition de $x \longmapsto x^2$ avec tan qui sont deux fonctions dérivables, l'une sur l'ensemble évoqué à valeurs dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$ sur lequel tan est dérivable. Ainsi, pour tout $x$ dans cet ensemble, on a $f'(x) = 2x(1 + \tan^2(x^2)) = \dfrac{2x}{\cos^2(x^2)}$. $\square$

5. Sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f$ est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $f'(x) = \dfrac{\ln(x) - 1}{(\ln(x))^2}$. $\square$

6. Il s'agit du quotient de deux polynômes donc, $f$ est dérivable sur l'ensemble sur lequel le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\dfrac{1}{5}\}$, on a $f'(x) = \dfrac{49(2x-1)^6}{(5x+1)^8}$. $\square$

7. C'est le quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule qu'en 0. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$. $\square$

8. Sur $]-1, +\infty[$, la fonction $x \mapsto 1 + x$ est dérivable est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc, par composition, $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur cet intervalle.

Ainsi, comme sur $]-1,0[\cup]0,+\infty[$, le dénominateur ne s'annule pas, $f$ sera dérivable sur cet ensemble. Pour tout $x \in ]-1,0[\cup]0,+\infty[$, on a $f'(x) = \dfrac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$.
$\square$

9. Attention, il faut absolument réaliser qu'il faut passer en notation exponentielle. Ainsi, on a $f(x) = e^{(x+2)\ln(x)}$.

   Par produit de fonctions dérivables, on a $x \mapsto (x+2)\ln(x)$ dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ qu'on compose avec exponentielle, dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $f'(x) = \dfrac{x\ln(x)+x+2}{x}e^{(x+2)\ln(x)}$. $\square$

10. Par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln(x)+1$. $\square$

11. Sur $]1,+\infty[$, ln est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, donc on peut composer par ln. Ainsi, $f$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et on a pour tout $x \in ]1,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{x\ln(x)}$. $\square$

12. Attention à bien séparer le cas $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

    Sur $\mathbb{R}_+^*$, on trouve $f(x) = x\ln(x)$ qui est dérivable par produit et on trouve $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln(x)+1$.

    Sur $\mathbb{R}_-^*$, on trouve $f(x) = x\ln(-x)$ qui est dérivable par composition de $x \mapsto -x$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ avec ln puis par produit. Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $f'(x) = \ln(-x)+1$.

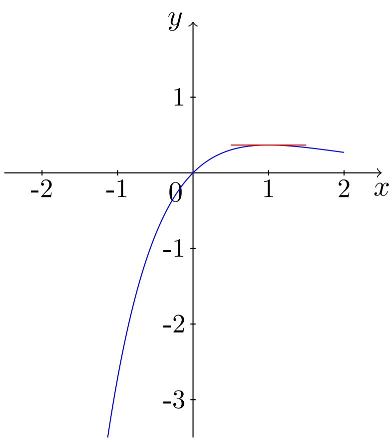
    On peut résumer ça en simplement, $f$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x) = \ln(|x|)+1$.
    $\square$

13. $f(x) = e^{\sin(3x)}$. Il s'agit d'une composition de 3 fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier. Ainsi, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3\cos(3x)e^{\sin(3x)}$. $\square$

14. Remarquons que $f(x) = \sqrt{x^2(x+6)}$. Ainsi, sur $[-6,+\infty[$, $x \mapsto x^2(x+6)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Cependant, la fonction racine n'est pas dérivable en 0. Ainsi, on doit se placer sur $]-6;0[\cup]0,+\infty[$ où $x \mapsto x^2(x+6)$ est dérivable à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ donc on peut composer par la fonction racine carrée qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

    On a alors $\forall x \in ]-6;0[\cup]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{3x^2+12x}{2\sqrt{x^3+6x^2}} = \dfrac{3x(x+4)}{2\sqrt{x^3+6x^2}}$. $\square$

**Exercice 8.** 1. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$. On en déduit qu'elle est croissante sur $]-\infty,1]$, décroissante sur $[1,+\infty[$, tends vers $-\infty$ en $-\infty$ ; vers 0 en $+\infty$ (par croissances comparées pour cette dernière limite).

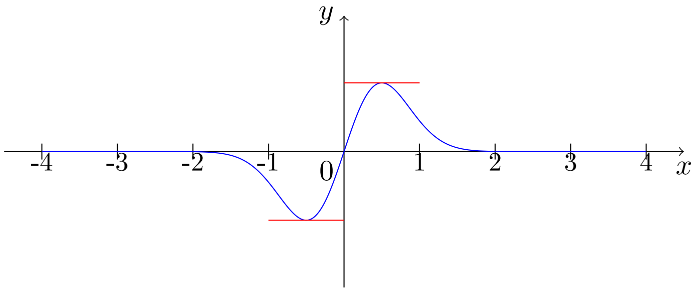


□

2. $x \mapsto e^{-2x^2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. De plus, $f$ est alors un produit de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

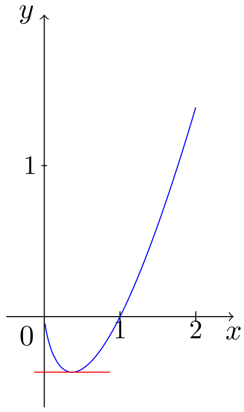
   On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (1-4x^2)e^{-2x^2}$ donc décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$, puis croissante sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et enfin décroissante sur $[\frac{1}{2}, +\infty[$.

   Par croissances comparées, elle tend vers 0 en $-\infty$ et $+\infty$.




□

3. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}+^*$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. On a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \ln(x) + 1$. $f$ est donc décroissante sur $]0, e^{-1}]$, puis croissante sur $[e^{-1}, +\infty[$. Par croissances comparées, elle tend vers 0 en 0 et par produit vers $+\infty$ en $+\infty$.




□

**Exercice 9.** A connaitre quasiment par cœur tellement c'est classique (et une technique classique).
Notons $h$ la fonction définie et dérivable sur $]-1; +\infty[$ par $h(x) = x - \ln(1+x)$, bien définie et dérivable car sur cet intervalle $1 + x > 0$, donc on compose des fonctions dérivables puis on ajoute des fonctions dérivables.
On a $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $x$ puisque $1 + x > 0$. Donc $h$ est décroissante sur $]-1; 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$. Ainsi $h$ est minimale en 0. Or $h(0) = 0$, donc $\forall x \in ]-1+\infty[$, $h(x) \geqslant 0$, ce qui est équivalent à

$$\forall x \in ]-1; +\infty[; \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

□

**Exercice 10.** Posons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \sin(x)$. Il s'agit d'une somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivons-la.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - \cos(x) \geqslant 0$. Ainsi, $f$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, $f(0) = 0$ donc $f$ est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$ ce qui est équivalent aux deux inégalités démandées. $\square$

**Exercice 11.** 1. Remarquons que $f$ est la somme (ou plutôt la combinaison linéaire) de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Dérivons-la.

On a $f'(x) = -1 + e^{-x}$. Or, $f'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $e^{-x} \geqslant 1$, soit $-x \geqslant 0$, soit $x \leqslant 0$.

Ainsi, $f$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et $f(0) = 0$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant 0$. $\square$

**Exercice 12.** Notons $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}.$$

$f'$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$f''(x) = e^x - 1 - x.$$

Continuons encore une fois, $f''$ étant encore dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors $f^{(3)}(x) = e^x - 1$.
Ainsi, $f^{(3)}$ est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$.
On a donc $f''$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs $f''(0) = 0$, donc $f''$ est positive.
Ainsi, $f'$ est croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $f'(0) = 0$, $f'$ est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. On a donc $f$ décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Comme $f(0) = 0$, on a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$ ce qui est équivalent à

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \leqslant e^x.$$

$\square$

**Exercice 13.** 1. Notons $T \in \mathbb{R}_+^*$ une période de $f$.

Commençons par montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x+nT) = f(x)$ en faisant une récurrence.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $f(x + nT) = f(x)$. »

Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a $f(x + (n + 1)T) = f(x + nT + T) = f(x + nT)$ car $f$ est $T$-périodique, puis en utilisant $\mathcal{P}(n)$, on a

$$f(x + (n + 1)T) = f(x).$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Ainsi, on a démontré par récurrence que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x + nT) = f(x)$.

Notons $T$ un de ses périodes. On prend $x < y$ deux réels quelconques. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant y \leqslant x + nT$ (grosso modo $n = \lfloor \frac{y-x}{T} \rfloor + 1$ si vous n'êtes pas sûrs que ça existe). On applique $f$ à cette égalité pour obtenir que $f(x) \leqslant f(y) \leqslant f(x+nT) = f(x)$ si $f$ est croissante. Ainsi $f(x) = f(y)$. Si $f$ est décroissante, l'inégalité change de sens mais la conclusion reste vraie.

Ainsi, pour tous réels $x, y$, on a $f(x) = f(y)$ donc $f$ est constante. $\square$

2. On peut affirmer assez rapidement qu'elle est $12\pi$-périodique. Pour en savoir plus (est-ce la plus petite ?), il faudrait bien connaitre ses formules de trigonométrie. $\square$

**Exercice 14.** Remarquons que $g$ et $h$ sont bien définies sur $\mathbb{R}$ car $f$ l'est et $x \mapsto -x$ est à valeur réelles (pour la composition).
De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ (autrement dit, $\mathbb{R}$ est bien centré autour de 0).
Ensuite, $\forall x \in \mathbb{R}$, on a

$$g(-x) = \frac{f(-x) + f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) + f(x)}{2} = g(x)$$

et

$$h(-x) = \frac{f(-x) - f(-(-x))}{2} = \frac{f(-x) - f(x)}{2} = -h(x).$$

$g$ est paire, $h$ est impaire.
Remarquons par ailleurs que $f = g + h$. On dit que $g$ est la partie paire de $f$ alors que $h$ en est sa partie impaire. $\square$

**Exercice 15.** 1. Notons $g : x \mapsto f(-x)$. Par composition de fonctions dérivables, la composition étant évidemment licite, $g$ est dérivable. En la dérivant on a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(-x)$.

Mais si $f$ est paire, $g = f$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -f'(-x) \Leftrightarrow f'(-x) = -f'(x)$ avec $f'$ définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0. Ainsi, $f'$ est impaire. $\square$

2. Avec la même fonction que la question précédente, on a cette fois ci $g = -f$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -f'(x)$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$ $-f'(x) = -f'(-x) \Leftrightarrow f'(x) = f'(-x)$. Comme $f'$ est définie sur $\mathbb{R}$ centré en 0, on a cette fois-ci $f'$ paire. $\square$

3. Notons $T$ une période de $f$. Cette fois-ci, posons $h : x \mapsto f(x+T)$. Par composition de fonctions dérivables, la composition étant évidemment licite, $h$ est dérivable. En la dérivant on a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = f'(x+T)$.

Ainsi, comme $f$ est périodique, on a $f = h$, donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f'(x+T)$.

Ainsi, $f'$ est $T$-périodique. $\square$

**Exercice 16.** 1. On peut bien entendu montrer que la fonction est dérivable, l'étudier et regarder ce qu'il se passe. Sinon, on peut se souvenir de la forme canonique du trinôme du second degré et remarquer que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}.$$

Il devient donc clair que Donc $f$ admet un maximum car $\forall x \in \mathbb{R}$, $0 < f(x) \leqslant = \dfrac{4}{3} = f\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et est minorée par 0. Elle n'a pas de minimum car clairement $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. $\square$

2. On sait que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leqslant \frac{1}{x}$, donc en multipliant par $x > 0$, on a

$$f(x) = x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \leqslant x\frac{1}{x} = 1$$

De plus, on sait que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) = x\lfloor \frac{1}{x} \rfloor \geqslant 0$.

On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$0 \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Par ailleurs, $f(2) = 0$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$, donc 0 et 1 sont respectivement le minimum de $f$ et son maximum. □

**Exercice 17.** 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ (donc $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0), et on a $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(-x) = -\operatorname{sh}(x)$. La fonction $ch$ est donc paire et $sh$ impaire. □

2. Il suffit de développer et simplifier. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{2x} - (e^{2x} - 2 + e^{-2x})}{4} = 1.$$

□

3. Remarquons que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x = \operatorname{ch}(x) + \operatorname{sh}(x)$.

   Ensuite, on a pour $a, b$ réels

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{e^{a+b} + e^{-a-b}}{2} = \frac{e^a e^b + e^{-a} e^{-b}}{2}.$$

En utilisant la remarque qu'on vient de faire, on obtient

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{(\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)) + (\operatorname{ch}(-a) + \operatorname{sh}(-a))(\operatorname{ch}(-b) + \operatorname{sh}(-b))}{2}.$$

En utilisant la parité, on peut un peu simplifier

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{(\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)) + (\operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b))}{2}.$$

Il ne reste qu'à développer pour obtenir

$$\operatorname{ch}(a+b) = \frac{2\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b)}{2} = \operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{sh}(b).$$

De la même façon, on a

$$\operatorname{sh}(a+b) = \frac{e^{a+b} - e^{-a-b}}{2} = \frac{e^a e^b - e^{-a} e^{-b}}{2}.$$

Puis

$$\operatorname{sh}(a+b) = \frac{(\operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) + \operatorname{sh}(b)) - (\operatorname{ch}(a) - \operatorname{sh}(a))(\operatorname{ch}(b) - \operatorname{sh}(b))}{2}.$$

Et enfin,

$$\operatorname{sh}(a+b) = \frac{2\operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + 2\operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b)}{2} = \operatorname{ch}(a)\operatorname{sh}(b) + \operatorname{sh}(a)\operatorname{ch}(b).$$

On remarque que l'on retrouve un semblant de formules trigonométriques (avec des signes qui ne sont pas forcément les mêmes). □

4. On peut remarquer que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathbb{R}$ car elles sont combinaison linéaire de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ qui le sont.

   Par ailleurs, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{ch}'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \operatorname{sh}(x) \text{ et } \operatorname{sh}'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch}(x).$$

   On a donc $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$ et $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$. $\square$

5. Comme ch est une somme d'exponentielles donc toujours strictement positive. sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\operatorname{sh}(0) = 0$, donc $\operatorname{sh}(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{R}_-$ et $\operatorname{sh}(x) > 0$ pour $x \in R_+$. En résumé :

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{ch}(x)$ | | | $+$ | | |
| sh | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

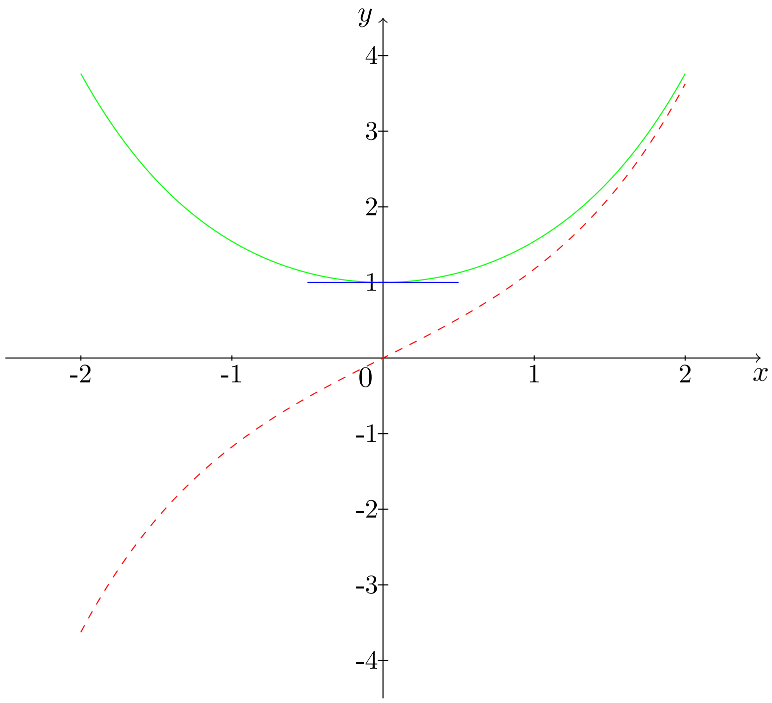
   La dérivée de ch est sh. ch est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On a

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sh}(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| ch | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

   $\square$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} > 0$ donc la courbe de ch est toujours au-dessus de celle de sh.

   En pointillés, la courbe représentative de sh, en trait plein, celle de ch avec sa tangente horizontale




□

Les questions suivantes nécessitent d'avoir vu la définition d'application surjective et injective du chapitre sur les applications. Je laisse ces questions dans ce chapitre car elles concluent cet exercice que je vous conseille de reprendre une fois ces définitions apprises.

7. On prend $x, x' \in \mathbb{R}$ tels que $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh}(x')$, ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}
\operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh}(x') \Leftrightarrow\ & \operatorname{sh}(x) - \operatorname{sh}(x') = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{e^x - e^{-x}}{2} - \frac{e^{x'} - e^{-x'}}{2} - = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{e^x - e^{x'} - (e^{-x} - e^{-x'})}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{(x+x')/2} \frac{e^{(x-x')/2} - e^{-(x-x')/2}}{2} - e^{-(x+x')/2} \frac{e^{-(x-x')/2} - e^{(x-x')/2}}{2} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{(x+x')/2} \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{2}\right) - e^{-(x-x')/2} \operatorname{sh}\left(-\frac{x-x'}{2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & e^{(x+x')/2} \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{2}\right) + e^{-(x-x')/2} \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{2}\right) = 0 \text{ car } \operatorname{sh} \text{impaire} \\
\Leftrightarrow\ & \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{2}\right)\left(e^{(x+x')/2} + e^{-(x-x')/2}\right) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 2 \operatorname{sh}\left(\frac{x-x'}{2}\right) \operatorname{ch}\left(\frac{x-x'}{2}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Or ch ne s'annule jamais et sh ne s'annule qu'en 0, ainsi $\frac{x-x'}{2} = 0$ donc $x = x'$. On a donc

sh injective.

Il aurait été plus malin de remarquer que $\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b) = 2\operatorname{ch}(a)\operatorname{ch}(b)$ d'après les formules précédemment démontrées et donc de remarquer qu'il faut choisir $a = \dfrac{x-x'}{2}$

et $b = -\dfrac{x-x'}{2}$...

On a alors sh$(x)$ qui sera équivalente à $(e^x - e^y)(e^x + e^{-y}) = 0$ donc... $\square$

8. Le plus simple est d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. On a sh continue sur $\mathbb{R}$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$. Ainsi, d'après les théorème des valeurs intermédiaires, pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sh}(x) = y$. $\square$

9. Soit $y \in \mathbb{R}$. On cherche $x$ tel que $sh(x) = y$, soit $e^x - e^{-x} = 2y$. On multiplie tout par $e^x \neq 0$ ce qui donne
$$e^2x - 1 = 2ye^x.$$
Pose $X = e^x$, l'équation est donc équivalente à
$$X^2 - 2yX - 1.$$
Son discriminant est $\Delta = 4y^2 + 4 = 4(y^2+1) > 0$.

On a donc deux solutions
$$X = \frac{2y - \sqrt{4(y^2+1)}}{2} = y - \sqrt{y^2+1} \text{ ou } X = y + \sqrt{y^2+1}.$$
Cependant, on a $y^2 + 1 > y^2$ donc en appliquant la racine carrée on a $|y| < \sqrt{y^2+1.}$, donc $y < \sqrt{y^2+1}$, ainsi la première solution est négative ce qui est exclu.

Par ailleurs, on a $y + \sqrt{y^2+1} > y + |y| \geqslant 0$, donc la deuxième est strictement positive.

Ainsi, on a $e^x = y + \sqrt{y^2+1} > 0$. On peut donc écrire que, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a l'existence d'un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{sh}(x) = y$, et il s'agit de $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

Ainsi, on a ainsi démontré la bijectivité de sh et $\mathrm{sh}^{-1}(y) = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.

Bien entendu, cela redémontre au passage le résultat des deux questions précédentes.

$\square$

10. Est-ce que ch est injective ? surjective sur $\mathbb{R}$ ? Bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ? Si elle est bijective, exhiber sa réciproque. ch est paire donc $\mathrm{ch}(-1) = \mathrm{ch}(1)$, ce qui implique qu'elle n'est pas injective. Et comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}(x) > 0$, 0 n'admet pas d'antécédent donc elle n'est pas surjective. Elle n'est donc pas bijective et n'admet pas de réciproque.

   Remarquons que si on considère la restriction de ch à $\mathbb{R}_+$ et qu'on considère son ensemble d'arrivée comme étant $[1, +\infty[$, cela change tout et dans ce cas, elle est bijective et on peut déterminer une réciproque, avec le même principe que ce qu'on a fait pour sh. $\square$

**Exercice 18.** 1. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + 9x^2y^2$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x + 2y + 6x^3y$ $\square$

2. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y + \dfrac{2}{y} + \dfrac{y}{(3-x)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \dfrac{2x}{y^2} + \dfrac{1}{3-x}$ $\square$

3. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ye^{1+xy+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x+2y)e^{1+xy+y^2}$ $\square$

4. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y(1-xy)e^{1-xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x(1-xy)e^{1-xy}$ $\square$

5. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{x+y}+2x$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{x+y}$ $\square$

6. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{y^2}{1+xy^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2xy}{1+xy^2}$ $\square$

7. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(1+xy)e^{xy}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^2e^{xy}$ $\square$

8. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{2x}{1+y^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{2x^2y}{(1+y^2)^2}$. $\square$

9. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{(1-x^2)y^2}{(1+x^2)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{2xy}{1+x^2}$. $\square$

10. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1-y^2}{(1+xy)^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1-x^2}{(1+xy)^2}$. $\square$

## 3. Déterminer des primitives

**Exercice 19.** 1. La fonction que nous nommerons $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ en tant que produit de fonctions continues donc admet une primitive sur cet intervalle.

On a, $\forall x\in\mathbb{R}_+,\ f(x)=x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{1}{2}}$. Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$, une primitive est $x\longmapsto\dfrac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}-\dfrac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}$. $\square$

2. La fonction considérée est continue sur $]-\infty;-1[$ ou sur $]-1;+\infty[$, donc elle admet des primitives sur l'un ou l'autre de ces intervalles.

On remarque que $\dfrac{x+3}{x+1}=\dfrac{x+1+2}{x+1}=1+\dfrac{2}{x+1}$ ce qui permet de trouver qu'une primitive sur $]-1,+\infty[$, est par exemple $x\mapsto x+2\ln(x+1)$.

Sur $]-\infty,-1[$, on écrira plutôt $\dfrac{x+3}{x+1}=1+2\dfrac{-1}{-(x+1)}$ ce qui donnera une primitive sous la forme $x\mapsto x+2\ln(-x-1)$.

Autre possibilité, rédiger à l'aide du changement de variable qui rend les choses plus faciles. $\square$

3. La fonction est un quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas, et on reconnait qu'elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$ de la forme $x\mapsto\ln(1+e^x)$.

Autre possibilité, rédiger à l'aide du changement de variable qui rend les choses plus faciles. $\square$

4. Il s'agit du produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, donc elle admet une primitive sur cet ensemble.

Pour la chercher, on va devoir faire une intégration par parties. On cherche, pour $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x t\ln(t)dt.$$

Posons $u,v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ définies par

$$\begin{array}{ll} u'(t)=t & u(t)=\dfrac{t^2}{2} \\ v(t)=\ln(t) & v'(t)=\dfrac{1}{t} \end{array}$$

On a alors

$$\int_1^x t\ln(t)dt = \left[\frac{t^2}{2}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x \frac{t^2}{2}\frac{1}{t}dt.$$

Ainsi

$$\int_1^x t\ln(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\int_1^x tdt.$$

Soit

$$\int_1^x t\ln(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^x.$$

On a alors

$$\int_1^x t\ln(t)dt = \frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{4} + \frac{1}{4}.$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+^*$, une primitive est $x \mapsto \dfrac{x^2\ln(x)}{2} - \dfrac{x^2}{4}$. □

5. Sur l'intervalle considéré, ces deux fonctions sont des quotients de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas donc admettent des primitives.

   Remarquons que $(u+v)(x) = 1$ donc $u+v$ a pour primitive $x$.

   Par ailleurs, $(u-v)(x) = \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{\cos(x) + \sin(x)}$ avec sur cet intervalle $\cos(x) + \sin(x) > 0$. Ainsi $u - v$ a pour primitive $x \mapsto -\ln(\cos(x) + \sin(x))$.

   Ainsi, $u$ admet pour primitive $x \mapsto \dfrac{1}{2}(x - \ln(\cos(x) + \sin(x)))$ et $v$ admet par exemple $x \mapsto \dfrac{1}{2}(x + \ln(\cos(x) + \sin(x)))$, ce qu'on obtient en faisant la moyenne de $u+v$ et $u-v$ ou la demi-différence.

   Ça peut s'étendre à n'importe quel intervalle où $\cos(x)+\sin(x)$ est strictement positif, voire strictement négatif à condition de gérer une primitive de $u-v$ sans se tromper. □

**Exercice 20.** 1. Sur $[-1, +\infty[$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue par composition de $x \mapsto x+1$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ avec la fonction racine carrée continue sur $\mathbb{R}_+$.

   On peut remarquer que $x\sqrt{1+x} = (x+1)\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = (x+1)^{\frac{3}{2}} - (x+1)^{\frac{1}{2}}$ et intégrer terme à terme.

   Autre possibilité, rédiger à l'aide du changement de variable qui rend les choses plus faciles.

   L'ensemble des primitives de cette fonction est constitué des fonctions définies sur $[1, +\infty[$ par

$$x \mapsto \frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + k = \left(\frac{2}{5}x - \frac{4}{15}\right)(x+1)\sqrt{x+1} + k;\ k \in \mathbb{R}.$$

   □

2. Cette fonction admet des primitives sur chaque intervalle ne contenant ni 1 ni $-1$ puisque qu'il s'agira alors d'un quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Il faut ensuite penser à écrire

$$\frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)} = \frac{1}{2(1-x)} + \frac{1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2}\frac{-1}{1-x} + \frac{1}{2}\frac{1}{1+x}$$

qu'on peut intégrer terme à terme.

On trouve alors que les primitives sont les fonctions définies sur un intervalle ne contenant ni 1 ni $-1$ de la forme

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\ln(|1-x|) + \frac{1}{2}\ln(|1+x|) + k;\ k \in \mathbb{R}.$$

□

3. Il s'agit d'un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.

   Pour chercher une primitive, on va devoir faire une intégration par parties. On cherche, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^x (2t-1)e^{3t}dt.$$

   Posons $u, v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définies par

$$\begin{array}{ll} u(t) = 2t-1 & u'(t) = 2 \\ v'(t) = e^{3t} & v(t) = \dfrac{1}{3}e^{3t} \end{array}$$

   Ainsi,

$$\int_0^x (2t-1)e^{3t}dt = \left[(2t-1)\frac{1}{3}e^{3t}\right]_0^x - \int_0^x \frac{2}{3}e^{3t}dt = \frac{1}{3}(2x-1)e^{3x} + \frac{1}{3} - \left[\frac{2}{9}e^{3t}\right]_0^x.$$

   Pour finir
$$\int_0^x (2t-1)e^{3t}dt = \frac{1}{3}(2x-1)e^{3x} + \frac{1}{3} - \frac{2}{9}e^{3x} + \frac{2}{9}.$$

   Donc sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des primitives est $\{x \mapsto \dfrac{1}{9}(6x-5)e^{3x} + k / k \in \mathbb{R}\}$. □

4. Il s'agit d'un produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

   Pour chercher une primitive, on va devoir faire une intégration par parties. On cherche, pour $x \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^x t\sin(t)\cos(t)dt.$$

   Posons $u, v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définies par

$$\begin{array}{ll} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \sin(t)\cos(t) & v(t) = \dfrac{1}{2}\sin^2(t) \end{array}$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^x t\sin(t)\cos(t)dt = & \left[\frac{t}{2}\sin^2(t)\right]_0^x - \int_0^x \frac{1}{2}\sin^2(t)dt \\ = & \frac{x}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \sin^2(t)dt. \end{aligned}$$

   Or, $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$, donc $\displaystyle\int_0^x \sin^2(t)dt = \frac{x - \frac{1}{2}\sin(2x)}{2}$.

Ainsi, on a

$$\int_0^x t\sin(t)\cos(t)dt = \frac{x}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{8}(2x - \sin(2x)).$$

Sur $\mathbb{R}$, l'ensemble des primitives est

$$\{x \mapsto \frac{x}{2}\sin^2(x) - \frac{1}{8}(2x - \sin(2x)) + k/k \in \mathbb{R}\}.$$

Le plus simple est encore d'utiliser $\sin^2(t) = \dfrac{1-\cos(2t)}{2}$ ce qui donne, après simplifications,

$$\left\{x \mapsto \frac{1}{8}(\sin(2x) - 2x\cos(2x)) + k/k \in \mathbb{R}\right\}.$$

Il est bien entendu tout à fait possible que vous trouviez une expression différente en ayant choisi d'autres formules de trigonométrie. □

5. Sur $\mathbb{R}_+^*$ il s'agit du produit de fonctions continues, donc elle admet une primitive. Encore une fois, on va devoir faire une intégration par parties. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}dt.$$

Posons $u, v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ définies par

$$\begin{aligned} u(t) &= \ln(t) & u'(t) &= \frac{1}{t} \\ v'(t) &= \frac{1}{t^2} & v(t) &= -\frac{1}{t} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}dt = \left[-\frac{1}{t}\ln(t)\right]_1^x - \int_1^x -\frac{1}{t^2}dt = -\frac{\ln(x)}{x} - \left[\frac{1}{t}\right]_1^x.$$

Donc

$$\int_1^x \frac{\ln(t)}{t^2}dt = -\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + 1.$$

On en conclue que l'ensemble des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\left\{x \mapsto \dfrac{-1-\ln(x)}{x} + k/k \in \mathbb{R}\right\}$.

□

**Exercice 21.** Remarquons que $F$ est définie sur $\mathbb{R}$, et si $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.
Ensuite, considérons pour $x \in \mathbb{R}$, $F(-x) = \displaystyle\int_0^{-x} f(t)dt$. Posons le changement de variable $u = -t$ qui est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $du = -dt$. On a alors

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = \int_0^x f(-u)(-du) = -\int_0^x f(-u)du.$$

Or $f$ est paire, donc $f(-u) = f(u)$. Ainsi,

$$F(-x) = -\int_0^x f(u)du = -F(x).$$

Ainsi, $F$ est impaire. □

# 7 Suites usuelles

**Exercice 1.** 1. Remarquons que, si l'on note $r$ la raison de cette suite arithmétique, on a
$$u_{80} = u_{15} + (80 - 15)r$$
soit $r = \dfrac{393 - 133}{65} = 4$.

Ainsi, $u_1 = u_{15} + (1 - 15)4 = 133 - 56 = 77$.

Par ailleurs,
$$\begin{aligned}
S_{80} = & \sum_{k=1}^{80} u_k = \sum_{k=1}^{80} u_1 + (k-1)4 \\
= & \ 80u_1 + 4\sum_{\ell=0}^{79} k \text{ par linéarité et avec} \ell = k - 1 \\
= & \ 80 \times 77 + 4\frac{79 \times 80}{2} \\
= & \ 80(77 + 2 \times 79) \\
= & \ 80 \times 235 \\
= & \ 18800
\end{aligned}$$

Pour les fans de formules, il était confortable de se servir de $S_{80} = 80\frac{u_1+u_{80}}{2}$ à condition de s'en souvenir. □

2. Si on se souvient que $S_{15} = 15\frac{u_1+u_{15}}{2} = 15 \times 73 = 1095$, ça va vite.

Sinon, en notant $r$ la raison de la suite, on trouve que $r = \frac{u_{15}-u_1}{14} = 10$.

Ainsi,
$$\begin{aligned}
S_{15} = & \sum_{k=1}^{15} u_k = \sum_{k=1}^{15} u_1 + (k-1)10 \\
= & \ 15u_1 + 10\sum_{\ell=0}^{14} k \text{ par linéarité et avec} \ell = k - 1 \\
= & \ 15 \times 3 + 10\frac{14 \times 15}{2} \\
= & \ 45 + 10 \times 105 \\
= & \ 1095.
\end{aligned}$$

□

3. Si on note $r$ la raison de la suite, on cherche $n$ tel que $u_n = -16$, donc $u_1 + (n-1)r = -16$ soit encore $5 + (n-1)r = -16$.

Par ailleurs, on veut $S_n = -\dfrac{77}{2}$.

Or $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} 5 + (k-1)r$. En utilisant la linéarité de la somme et en posant $\ell = k - 1$, on a
$$S_n = 5n + r\sum_{\ell=0}^{n-1} k = 5n + r\frac{n(n-1)}{2} = n\frac{10 + (n-1)r}{2}.$$

Or, pour le $n$ cherché, $(n-1)r = -16-5$, donc

$$S_n = n\frac{10-21}{2}.$$

Cependant, $S_n = -\dfrac{77}{2}$.

On a donc l'équation $-\dfrac{77}{2} = n\dfrac{-11}{2}$, soit $n = 7$.

Encore une fois, on aurait pu gagner un peu de temps en se souvent que $S_n = (n-1)\frac{u_1+u_n}{2}$. On trouve $n = 7$ (il faut poser le calcul de $S_n$ avec une raison inconnue et celui de $u_n$ avec la même raison inconnue, on trouve un système à deux équations et deux inconnues et on récupère $n$.) □

**Exercice 2.** 1. On a

$$\begin{aligned} S_{24} &= \sum_{k=0}^{24} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{24} (-3)^k \\ &= \frac{1-(-3)^{25}}{1-(-3)} \\ &= \frac{1+3^{25}}{4}. \end{aligned}$$

On remarquera bien que $(-3)^{25} = -3^{25}$ parce que 25 est impair, mais c'est une remarque inutile bien entendu. □

2. On a

$$\begin{aligned} S_{15} &= \sum_{k=0}^{15} u_k \\ &= \sum_{k=0}^{15} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-1} 12 \\ &= -2 \times 12 \sum_{k=0}^{15} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \\ &= -24 \frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{16}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} \\ &= -16\left(1-\frac{1}{2^{16}}\right). \end{aligned}$$

□

3. Si on note $q$ la raison de la suite, on a $u_4 = q^3 u_1$, donc $54 = q^3 2$, ainsi $q^3 = 27$ ce qui est équivalent à $q^3 - 27 = 0$ soit encore

$$(q-3)(q^2+3q+9) = 0$$

qui n'a pour seule solution réelle que 3.

On a alors

$$\begin{aligned}
S_4 = & \sum_{k=0}^{4} u_k \\
= & \sum_{k=0}^{4} 3^{k-1} u_1 \\
= & \frac{2}{3} \sum_{k=0}^{4} 3^k \\
= & \frac{2}{3} \frac{1-3^5}{1-3} \\
= & \frac{1}{3}(3^5 - 1) \\
= & \frac{242}{3}.
\end{aligned}$$

□

**Exercice 3.** 1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, « $u_n$ existe et $u_n > 0$. »

On a $u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $u_n > 0$, donc $4u_n > 0$. On peut bien appliquer la racine carrée qui est strictement croissante pour obtenir

$$\sqrt{4u_n} > 0.$$

Ainsi, on a bien montré l'existence de $u_{n+1}$ et sa stricte positivité. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.

Remarquons que presque à chaque fois qu'on vous demandera de montrer qu'une suite est bien définie, il faudra faire une récurrence avec la propriété « $u_n$ existe ». Attention, si vous mettez des parenthèses autour de $u_n$, on ne parle plus du terme $u_n$ mais de la suite dans son intégralité, donc ce n'est plus une propriété portant sur un entier donc impossible de faire une récurrence. □

2. Voir plus bas. □

3. On peut bien la définir puisqu'on a démontré précédemment que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
v_{n+1} = & \ln(u_{n+1}) - \ln(4) \\
= & \ln(\sqrt{4u_n}) - \ln(4) \\
= & \frac{1}{2}(\ln(4) + \ln(u_n)) - \ln(4) \\
= & \frac{1}{2}(\ln(u_n) - \ln(4)) \\
= & \frac{1}{2} v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{2^n} v_0.$$

Or $v_0 = \ln(u_0) - \ln(4) = -\ln(4)$. On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{-\ln(4)}{2^n}$. □

4. Comme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n) - \ln(4)$, on a

$$u_n = e^{v_n + \ln(4)} = 4e^{\frac{-\ln(4)}{2^n}} = 4e^{\frac{1}{2^n}\ln\left(\frac{1}{2^2}\right)} = 4\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2^n}}.$$

On trouve $u_n = 2^{2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, on trouve (par composition avec la fonction exponentielle continue, nous le reverrons ultérieurement) $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2^2 = 4$. □

**Exercice 4.** 1. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell = \frac{1}{2}\ell - 5,$$

soit $\ell = -10$.

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 10$.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} = &\quad u_{n+1} + 10 \\ = &\quad \frac{1}{2}u_n - 5 + 10 \end{aligned}$$

Or $u_n = v_n - 10$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} = &\quad \frac{1}{2}(v_n - 10) + 5 \\ = &\quad \frac{1}{2}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{1}{2^n}v_0$. Or $v_0 = u_0 + 10 = 13$, donc

$$v_n = \frac{13}{2^n}.$$

On revient alors à la question posée et on peut désormais affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{13}{2^n} - 10$. □

2. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell = -2\ell + 1,$$

soit $\ell = \frac{1}{3}$.

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} = &\quad u_{n+1} - \frac{1}{3} \\ = &\quad -2u_n + 1 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Or $u_n = v_n + \dfrac{1}{3}$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} = & \quad -2\left(v_n + \frac{1}{3}\right) + \frac{2}{3} \\ = & \quad -2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-2$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (-2)^{n-1}v_1$. Or $v_1 = u_1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, donc

$$v_n = \frac{2(-2)^{n-1}}{3} = -\frac{(-2)^n}{3}.$$

On peut désormais affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\dfrac{(-2)^n}{3} + \dfrac{1}{3}$.

Remarquons que l'on aurait aussi pu déterminer $u_0$ et se rapporter à la valeur de $u_0$, mais c'est moins efficace. □

3. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\ell = 2\ell + 3,$$

soit $\ell = -3$.

On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n + 3$.

On a alors, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} = & \quad u_{n+1} + 3 \\ = & \quad 2u_n + 3 + 3 \end{aligned}$$

Or $u_n = v_n - 3$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} = & \quad 2\left(v_n - 3\right) + 6 \\ = & \quad 2v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = (2)^{n-2}v_2$. Or $v_2 = u_2 + 3 = 5$, donc

$$v_n = 2^{n-2}5.$$

On peut désormais affirmer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n-2}5 - 3$ □

**Exercice 5.** Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. On cherche $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$5\ell = \ell + 8,$$

soit $\ell = 2$.
On pose alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = u_n - 2$.
On a alors, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} = & \quad u_{n+1} - 2 \\ = & \quad \frac{1}{5}u_n + \frac{8}{5} - 2 \end{aligned}$$

Or $u_n = v_n + 2$, donc

$$\begin{aligned} v_{n+1} = & \frac{1}{5}(v_n+2) - \frac{2}{5} \\ = & \frac{1}{5}v_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{1}{5^{n-1}}v_1$. Or $v_1 = u_1 - 2 = -1$, donc

$$v_n = -\frac{1}{5^{n-1}}.$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = -\frac{1}{5^{n-1}} + 2$. □

**Exercice 6.** 1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Notons $r$ sa raison. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = u_n + r$ et donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = u_{n-1} + r$ ou $u_{n-1} = u_n - r$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{u_{n+1}+u_{n-1}}{2} = \frac{u_n + r + u_n - r}{2} = u_n.$$

On peut montrer que la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante ce qui permettra de conclure. □

2. Cette relation est équivalente à $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2u_n = u_{n+1} + u_{n-1}$ ou encore à

$$u_{n+1} - u_n = u_n - u_{n-1}.$$

Ainsi, la suite $(u_{n+1} - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. Autrement dit, il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = r \iff u_{n+1} = u_n + r.$$

Il s'agit donc d'une suite arithmétique. □

**Exercice 7.** On peut le faire directement en cherchant si on peut trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{a}{u_k} + \frac{b}{u_{k+1}}$$

en écrivant que $u_{k+1} = u_k + r$ où $r$ est la raison de la suite arithmétique $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Il faut ensuite procéder par télescopage et tout réduire au même dénominateur une fois les simplifications faites.
Sinon, on peut aussi poser, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}}$. ».
Tout a bien du sens puisque par hypothèse, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas.
On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{1}{u_0 u_1}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{u_k u_{k+1}} = & \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k u_{k+1}} + \frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}} \\ = & \frac{n+1}{u_0 u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+1}u_{n+2}} \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\ = & \frac{(n+1)u_{n+2} + u_0}{u_0 u_{n+1} u_{n+2}}. \end{aligned}$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, notons $r$ sa raison. On a alors

$$(n+1)u_{n+2}+u_0 = (n+1)(u_{n+1}+r)+u_0 = (n+1)u_{n+1}+u_0+(n+1)r = (n+1)u_{n+1}+u_{n+1}.$$

Ainsi,

$$(n+1)u_{n+2}+u_0 = (n+2)u_{n+1}.$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{u_k u_{k+1}} &= \frac{(n+1)u_{n+2}+u_0}{u_0u_{n+1}u_{n+2}}\\ &= \frac{(n+2)u_{n+1}}{u_0u_{n+1}u_{n+2}}\\ &= \frac{n+2}{u_0u_{n+2}}.\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc démontré que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique dont aucun de ses termes n'est nul, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{u_k u_{k+1}} = \frac{n+1}{u_0u_{n+1}}.$$

□

**Exercice 8.** 1. Supposons l'existence d'une telle suite arithmétique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Alors il existerait deux réels $a$ et $b$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n = an+b$. Injectons ça dans la relation de récurrence. Elle devient

$$\forall n\in\mathbb{N};\ a(n+1)+b = 2(an+b)-n-2.$$

Soit

$$(a-2a+1)n+2+a-b=0.$$

Ainsi, en prenant $n=0$, on doit avoir $a-b=-2$ puis en faisant $n=1$ on récupère $a=1$. Par suite il vient $b=3$.

Si une suite arithmétique $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie (1), alors on a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $w_n = n+3$. Il s'agit donc de la suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 3.

Réciproquement, il suffit de vérifier qu'elle vérifie bien l'équation (1) : on a bien

$$(n+1)+3 = 2(n+3)-n-2$$

donc elle remplit bien ce qu'on lui demande. □

2. On a alors pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2u_n - n - 2$$

$$w_{n+1} = 2w_n - n - 2$$

En faisant la différence de ces deux lignes, on récupère

$$u_{n+1} - w_{n+1} = 2(u_n - w_n)$$

ainsi $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n$. On trouve qu'elle est géométrique de raison 2. □

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.

On a d'après la question précédente $v_n = 2^n v_0$. Or $v_0 = u_0 - w_0 = \lambda - 3$.

Ainsi, $v_n = 2^n(\lambda - 3)$.

Or $v_n = u_n - w_n = u_n - n - 3$.

On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 2^n(\lambda - 3) + n + 3.$$

□

**Exercice 9.** 1. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, « $u_n$ existe et $u_n < 0$. »

On a $u_0 = -2$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $u_n < 0$, donc $3 - u_n > 0$ puis on peut bien former le quotient (bien défini puisque $3 - u_n \neq 0$), et avoir $\dfrac{u_n}{3 - u_n} < 0$.

Ainsi, on a bien montré l'existence de $u_{n+1}$ et sa stricte négativité. $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a montré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement négative.

□

2. a. Parce qu'on a jamais $u_n = 1$ puisque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 0$. □

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{1 - u_{n+1}} \\
&= \frac{\dfrac{2u_n}{3 - u_n}}{1 - \dfrac{2u_n}{3 - u_n}} \\
&= \frac{2u_n}{3 - u_n - 2u_n} \\
&= \frac{2}{3}\frac{u_n}{1 - u_n} \\
&= \frac{2}{3}v_n.
\end{aligned}$$

Ainsi, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$.□

c. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\dfrac{2}{3}$ et $v_0 = \dfrac{u_0}{1 - u_0} = \dfrac{-2}{3}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = -\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+1}$.

Ensuite, on a $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$ donc $(1 - u_n)v_n = u_n$ et ainsi $v_n = (1 + v_n)u_n$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{v_n}{1 + v_n} = \dfrac{-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$.

En multipliant tout par $3^{n+1}$, on récupère

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = -\frac{2^{n+1}}{3^{n+1} - 2^{n+1}}.$$

□

**Exercice 10.** Je vous renvoie aux exemples du cours pour la rédaction. Vous ne trouverez que les résultats dans les 6 questions suivantes. □

1. On trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2}{5}\frac{1}{2^n} + \frac{3}{5}(-2)^n$. □
2. On trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2n$. □
3. On trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{5}2^n - \frac{6}{5}\frac{1}{3^n}$. □
4. On trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n-1}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$.

   Ce qui s'arrange en $u_n = 0$ si $n$ est pair, et lorsque $n$ impair, $u_n = 2^{n-1}(-1)^{(n-1)/2}$. □
5. On trouve, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$.

   Cela s'arrange aussi : pour $k \in \mathbb{N}$, $u_{3k} = 0$, $u_{3k+1} = 1$ et $u_{3k+2} = -1$. □
6. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - 1$ et on trouve que $v_n = (n+1)2^n$ puis $u_n = (n+1)2^n + 1$. □

**Exercice 11.** On note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$, « $u_n$ existe et $u_n > 0$. »
On a $u_0 = 1$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. De plus, $u_1 = e$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.
On a $u_n > 0$, et $u_{n+1} > 0$ donc $u_{n+1}u_n > 0$, soit $u_{n+2} > 0$. Ainsi, on a bien montré l'existence de $u_{n+2}$ et sa stricte positivité. $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.
On a montré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et strictement positive.
Ensuite, prenons le logarithme de la relation de récurrence (on peut grâce à ce qu'on vient de démontrer).
On a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_{n+2}) = \ln(u_{n+1}) + 2\ln(u_n)$$

Donc en posant, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \ln(u_n)$, on a $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+2} = v_{n+1} + 2v_n.$$

Ainsi, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.
Résolvons son équation caractéristique associée

$$X^2 = X + 2$$

Autrement dit

$$X^2 - X - 2 = 0.$$

On voit rapidement que les deux racines du trinômes sont $-1$ et $2$. Ainsi, il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda(-1)^n + \mu 2^n$.
Or on a $v_0 = \ln(u_0) = 0$ donc $\lambda + \mu = 0$.
Et on a $v_1 = \ln(u_1) = 1$ donc $-\lambda + 2\mu = 1$.
On a donc le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ -\lambda + 2\mu = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ \\ 3\mu = & 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

Ce qui donne comme unique solution $\lambda = -\dfrac{1}{3}$ et $\mu = \dfrac{1}{3}$.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = -\dfrac{1}{3}(-1)^n + \dfrac{1}{3}2^n$.
Or, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \exp(v_n) = \exp\left(-\frac{1}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n\right)$. $\square$

**Exercice 12.** 1. On trouve $u_3 = 4$, $u_4 = 11$ et $u_5 = 26$. $\square$

2. Deux façons de faire.

```
def suite(n):

    u0=0
    u1=0
    u2=1
    for k in range(3,n+1):
        u3=4*u2-5*u1+2*u0
        u0=u1
        u1=u2
        u2=u3
    return u2
```

Ou bien

```
def suite(n):

    u0,u1,u2=0,0,1
    for k in range(3,n+1):
        u2,u1,u0=4*u2-5*u1+2*u0,u2,u1
    return u2
```

$\square$

3. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= u_{n+3} - u_{n+2} \\ &= 3u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \text{ car } u_{n+3} = 4u_{n+2} - 5u_{n+1} + 2u_n \\ &= 3(v_{n+1} + u_{n+1}) - 5u_{n+1} + 2u_n \text{ car } u_{n+2} = v_{n+1} + u_{n+1} \\ &= 3v_{n+1} - 2u_{n+1} + 2u_n \\ &= 3v_{n+1} - 2(u_{n+1} - u_n) \\ &= 3v_{n+1} - 2v_n \text{ car } v_n = u_{n+1} - u_n. \end{aligned}$$

$\square$

4. D'après la question précédente, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Résolvons son équation caractéristique associée

$$X^2 = 3X - 2$$

Autrement dit

$$X^2 - 3X + 2 = 0.$$

On voit rapidement que les deux racines du trinômes sont 1 et 2. Ainsi, il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \lambda 2^n + \mu$.

Or on a $v_0 = u_1 - u_0 = 0$ donc $\lambda + \mu = 0$.

Et on a $v_1 = u_2 - u_1 = 1$ donc $2\lambda + \mu = 1$.

On a donc le système

$$\begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ 2\lambda + \mu = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ \lambda = & 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

Ce qui donne comme unique solution $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n - 1$. $\square$

5. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{n+1} - u_n$ donc d'après la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = 2^n - 1$.

   C'est surtout pour donner la réponse à ceux qui n'auraient pas réussi la question précédente.

   $\square$

6. On trouve que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \text{ par linéarité} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell - \sum_{k=0}^{n-1} u_k \text{ en posant } \ell = k+1 \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-1} u_\ell + u_n - \left(u_0 + \sum_{k=1}^{n-1} u_k\right) \\ &= u_n - u_0 \\ &= u_n. \end{aligned}$$

   D'autre part, on a aussi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k &= \sum_{k=0}^{n-1} (2^k - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - \sum_{k=0}^{n-1} 1 \\ &= \frac{1-2^n}{1-2} - n \\ &= 2^n - n - 1. \end{aligned}$$

   On trouve donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1 - n$. $\square$

**Exercice 13.** 1. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
u_{n+2} &= -u_{n+1} - v_{n+1} \\
&= -u_{n+1} - \left(\frac{4}{3}u_n + \frac{5}{3}v_n\right) \\
&= -u_{n+1} - \frac{4}{3}u_n - \frac{5}{3}v_n \\
&= -u_{n+1} - \frac{4}{3}u_n - \frac{5}{3}(-u_{n+1} - u_n) \\
&= \frac{2}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n.
\end{aligned}$$

On en conclue que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = \dfrac{2}{3}u_{n+1} + \dfrac{1}{3}u_n$. $\square$

2. D'après la question précédente, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suit une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

   Résolvons son équation caractéristique associée
$$X^2 = \frac{2}{3}X + \frac{1}{3}$$
   Autrement dit
$$3X^2 - 2X - 1 = 0.$$
   On voit rapidement que les deux racines du trinômes sont 1 et $-\dfrac{1}{3}$. Ainsi, il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + \mu$.

   Or on a $u_0 = 2$ donc $\lambda + \mu = 2$.

   Et on a $u_1 = -u_0 - v_0 = 1$ donc $-\dfrac{1}{3}\lambda + \mu = 1$.

   On a donc le système
$$\left\{\begin{aligned} \lambda + \mu &= 2 \\ -\frac{1}{3}\lambda + \mu &= 1 \end{aligned}\right.$$
$$\iff \left\{\begin{aligned} \lambda + \mu &= 2 \\ 4\mu &= 5 \quad L_2 \leftarrow L_1 + 3L_2 \end{aligned}\right.$$
   Ce qui donne comme unique solution $\mu = \dfrac{5}{4}$ puis $\lambda = \dfrac{3}{4}$.

   Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$. $\square$

3. L'erreur est de tout refaire à partir du début, alors qu'on peut remarquer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_n &= -u_n - u_{n+1} \\
&= -\left[\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right] - \left[\frac{5}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right] \\
&= -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n.
\end{aligned}$$

$\square$

## 8 Systèmes linéaires

**Exercice 1.** 1. On a le système équivalent

$$\begin{cases} 2x+3y = & 1 \\ -y = & 1 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x = & 2 \\ y = & -1 \end{cases}$$

L'ensemble solution est $\{(2,-1)\}$. $\square$

2. On a le système équivalent

$$\begin{cases} 4x-2y = & 5 \\ 0 = & 17 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1 \end{cases}$$

Il n'y a donc pas de solutions. $\square$

3. On a le système équivalent

$$\begin{cases} 7y = & -7 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x-2y = & 5 \\ 5y = & -9 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = & -1 \\ x-2y = & 5 \\ y = & -\dfrac{9}{5} \end{cases}$$

Ce qui est impossible ($L_3 \leftarrow L_3 - L_1$ donne $0 = -\dfrac{4}{5}$). $\square$

4. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 2x+4y = & 10 \\ 0 = & 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \end{cases} \iff 2x+4y = 10 \iff x = 5-2y.$$

L'ensemble solution est $\{(5-2y, y)/y \in \mathbb{R}\}$ que l'on peut aussi écrire $\{(5-2\lambda, \lambda)/ \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\square$

5. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 2x+y-3z = & -1 \\ 7x-4z = & 3 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 11x-10z = & 1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y+2x-3z = & -1 \\ 7x-4z = & 3 \\ -13x = & -13 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y - 3z + 2x = & -1 \\ -4z + 7x = & 3 \\ x = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y = & 0 \\ z = & 1 \\ x = & 1 \end{cases}$$

Il y a une unique solution $(1, 0, 1)$. $\square$

6. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} 14x + 10z = & 24 \quad L_1 \leftarrow L_1 + 3L_3 \\ 14x + 20z = & 34 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ -y + 4x + 4z = & 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 10z = & 10 \quad L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 14x + 20z = & 34 \\ -y + 4x + 4z = & 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = & 1 \\ x = & 1 \\ y = & 1 \end{cases}$$

L'unique solution du système est $(1, 1, 1)$. $\square$

7. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = & 3 \\ -y + 2z = & -5 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -4y + 8z = & -8 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + 2y + 3z = & 3 \\ -y + 2z = & -5 \\ 0 = & 12 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution. $\square$

8. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} -5y-5z = & -5 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ x+y+2z = & 3 \\ y+z = & 1 \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + 5L_3 \\ x+y+2z = & 3 \\ y+z = & 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 0 = & 0 \\ x+z = & 2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ y+z = & 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = & -z+2 \\ y = & -z+1 \end{cases}$$

L'ensemble solution est $\{(2-z, 1-z, z)/z \in \mathbb{R}\}$. $\square$

9. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x+2y-3z+2t = & 2 \\ y-2z+2t = & 1 \qquad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -2y+4z-4t = & -2 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+z-2t = & 0 \quad L_1 \leftarrow L1 - 2L_2 \\ y-2z+2t = & 1 \\ 0 = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = & -z+2t \\ y = & 2z-2t+1 \end{cases}$$

L'ensemble solution est $\{(-z+2t, 2z-2t+1, z, t)/(z,t) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$

10. Le système est équivalent à :

$$\begin{cases} x+y-z = & 1 \\ y+(\alpha+2)z = & 1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ (\alpha-1)y+4z = & 1 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z = & 1 \\ y+(\alpha+2)z = & 1 \\ (4-(\alpha-1)(\alpha+2))z = & 1-(\alpha-1) \quad L_3 \leftarrow L_3 - (\alpha-1)L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y-z = & 1 \\ y+(\alpha+2)z = & 1 \\ (6-\alpha-\alpha^2)z = & 2-\alpha \end{cases}$$

Or $6-\alpha-\alpha^2 = -(\alpha-2)(\alpha+3)$.

On doit distinguer 3 cas.

a. Si $\alpha = 2$, alors le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y-z = & 1 \\ y+4z = & 1 \\ 0 = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x-5z = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ y+4z = & 1 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble solution est $\{(5z, -4z+1, z)/z \in \mathbb{R}\}$.

b. Si $\alpha = -3$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y-z = & 1 \\ y-z = & 1 \\ 0 = & 5 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution.

c. Dans les autres cas, le système est équivalent à

$$\begin{cases} x+y-z = & 1 \\ y+(\alpha+2)z = & 1 \\ z = & \dfrac{1}{\alpha+3} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = & 1 \\ y = & 1 - \dfrac{\alpha+2}{\alpha+3} = \dfrac{1}{\alpha+3} \\ z = & \dfrac{1}{\alpha+3} \end{cases}$$

Le système a alors une unique solution, $\left(1, \dfrac{1}{\alpha+3}, \dfrac{1}{\alpha+3}\right)$

□

**Exercice 2.** Ce genre de problème devra être résolu rapidement et efficacement l'an prochain, donc on commence à s'entrainer dès maintenant. N'oubliez pas qu'il est interdit toute opération de la forme

$$L_1 \leftarrow (1-\lambda)L_1 + L_2$$

pour essayer d'éliminer une inconnue, car on ne sait pas si $1-\lambda = 0$. Par contre, on peut tout à fait faire

$$L_2 \leftarrow (1-\lambda)L_1 + L_2$$

qui enlèvera la même inconnue et ne pose aucun problème : si $\lambda = 1$, on fait $L_2 \leftarrow L_2$ ce qui n'est pas interdit ! □

($\mathcal{S}_1$) Le système est équivalent à

$$\begin{cases} (4-(2-\lambda)(-1-\lambda))y = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - (2-\lambda)L_2 \\ x + (-1-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + (-1-\lambda)y = 0 \\ (6+\lambda-\lambda^2)y = & 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné. Il admet une infinité de solutions lorsque au moins un de ses coefficients diagonaux est nul, ce qui n'arrive que lorsque

$$-\lambda^2 + \lambda + 6 = 0.$$

C'est-à-dire lorsque $\lambda = -2$ ou $\lambda = 3$.

Si $\lambda = -2$, le système est équivalent à $\begin{cases} x + y = 0 \\ 0 = & 0 \end{cases}$

L'ensemble solution est alors $\{x(-1,1)/x \in \mathbb{R}\}$.

Si $\lambda = 3$, le système est équivalent à $\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 0 = & 0 \end{cases}$

L'ensemble solution est alors $\{x(4,1)/x \in \mathbb{R}\}$. □

($\mathcal{S}_2$) Le système est déjà échelonné. Il admet une infinité de solutions lorsque au moins un de ses coefficients diagonaux est nul, ce qui n'arrive que lorsque $\lambda = 1$. Dans ce cas, l'ensemble solution est $\{x(1,0)/x \in \mathbb{R}\}$. □

$(\mathcal{S}_3)$ Le système est équivalent à

$$\begin{cases} (-18-(5-\lambda)(-6-\lambda))y = & 0 \quad L_1 \leftarrow 3L_1-(5-\lambda)L_2 \\ 3x+(-6-\lambda)y=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3x+(-6-\lambda)y=0 \\ (12-\lambda-\lambda^2)y = & 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné. Il admet une infinité de solutions lorsque au moins un de ses coefficients diagonaux est nul, ce qui n'arrive que lorsque

$$12-\lambda-\lambda^2=0$$

soit pour $\lambda=3$ ou $\lambda=-4$.

Si $\lambda=-4$, le système est équivalent à $\begin{cases} 3x-2y=0 \\ 0 = & 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$

Ainsi, l'ensemble solution est $\left\{\left(\frac{2}{3}y, y\right)/y\in\mathbb{R}\right\} = \{\alpha(2,3)/\alpha\in\mathbb{R}\}$.

Si $\lambda=3$, le système est équivalent à $\begin{cases} 3x-9y=0 \\ 0 = & 0 \quad L_1 \leftrightarrow L_2 \end{cases}$

Ainsi, l'ensemble solution est $\{(3y,y)/y\in\mathbb{R}\} = \{y(3,1)/\alpha\in\mathbb{R}\}$. $\square$

$(\mathcal{S}_4)$ Le système est équivalent à

$$\begin{cases} (-1+\lambda)y+(2+\lambda-\lambda^2)z = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1-(1-\lambda)L_3 \\ (1-\lambda)y = & 0 \\ x+y-\lambda z = & 0 \end{cases}$$

Réorganisons un peu les lignes et les colonnes

$$\iff \begin{cases} x-\lambda z+y = & 0 \\ (2+\lambda-\lambda^2)z+(-1+\lambda)y = & 0 \\ (1-\lambda)y = & 0 \end{cases}$$

Le système a une infinité de solution si et seulement si un de ses coefficients diagonaux est nul, donc si

$$1-\lambda=0 \text{ ou } 2+\lambda-\lambda^2=0.$$

On trouve trois valeurs pour $\lambda$ : $-1$, $1$ ou $2$.

Pour $\lambda=-1$, le système est équivalent à $\begin{cases} x+z+y = & 0 \\ -2y = & 0 \\ 2y = & 0 \end{cases}$

On trouve alors comme ensemble solution $\{(-z,0,z)/z\in\mathbb{R}\}=\{z(-1,0,1)/z\in\mathbb{R}\}$.

Pour $\lambda=1$, le système est équivalent à $\left\{\begin{array}{rl} x-z+y= & 0\\ 2z= & 0\\ 0= & 0\end{array}\right.$

On trouve alors comme ensemble solution $\{(-y,y,0)/y\in\mathbb{R}\}=\{y(-1,1,0)/y\in\mathbb{R}\}$.

Pour $\lambda=2$, le système est équivalent à $\left\{\begin{array}{rl} x-2z+y= & 0\\ y= & 0\\ -y= & 0\end{array}\right.$

On trouve alors comme ensemble solution $\{(2z,0,z)/z\in\mathbb{R}\}=\{z(2,1,0)/z\in\mathbb{R}\}$. $\square$

($\mathcal{S}_5$) Le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rll} (-4+1-2\lambda+\lambda^2)y+(4+2-2\lambda)z= & 0 & L_1\leftarrow 2L_1+(1-\lambda)L_2\\ -2x+(1-\lambda)y+2z= & 0 & \\ (-3+\lambda)y+(3-\lambda)z= & 0 & L_3\leftarrow L_3-L_2\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rll} -2x+(1-\lambda)y+2z= & 0 & \\ (-3+\lambda)y+(3-\lambda)z= & 0 & L_1\leftarrow L_2\leftarrow L_3\leftarrow L_1\\ (-3-2\lambda+\lambda^2)y+(6-2\lambda)z= & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rll} -2x+(1-\lambda)y+2z= & 0 & \\ (-3+\lambda)y+(3-\lambda)z= & 0 & \\ (3-4\lambda+\lambda^2)y= & 0 & L_3\leftarrow L_3-2L_2\end{array}\right.$$

$$\iff\left\{\begin{array}{rll} -2x+2z+(1-\lambda)y= & 0 & \\ (3-\lambda)z+(-3+\lambda)y+= & 0 & \\ (3-4\lambda+\lambda^2)y= & 0 & L_3\leftarrow L_3-2L_2\end{array}\right.$$

Le système a une infinité de solution si et seulement si un de ses coefficients diagonaux est nul, donc si

$$3-4\lambda+\lambda^2=0 \text{ ou } 3-\lambda=0.$$

L'équation de degré deux admet 1 comme racine évidente, et comme le produit fait 3, l'autre est 3.

Ainsi, le système a une infinité de solution si et seulement

$$\lambda=1 \text{ ou } \lambda=3.$$

Dans le cas $\lambda = 1$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} -2x + 2z = & 0 \\ 2z - 2y = & 0 \\ 0 = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = & z \\ y = & z \end{cases}$$

L'ensemble solution est $\{(z, z, z)/z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, 1, 1)/z \in \mathbb{R}\}$.

Dans le cas $\lambda = 3$, le système est équivalent à

$$\begin{cases} -2x - 2y + 2z = & 0 \\ 0 = & 0 \\ 0 = & 0 \end{cases} \iff z = x + y$$

L'ensemble solution est $\{(x, y, x + y)/y \in \mathbb{R}\} = \{x(1, 0, 1) + y(0, 1, 1)/z \in \mathbb{R}\}$.

□

# 9 Équations différentielles

## 1. Premier ordre

**Exercice 1.** 1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. Ses solutions sont les fonctions $y$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \lambda e^{3x}$.

De plus, on a $y(0) = -2$ ce qui est équivalent à $\lambda = -2$.

Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = -2e^{3x}$.
□

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

L'équation homogène associée est $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) + 2y(x) = 0$ Ses solutions sont les fonctions $y_0$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = \lambda e^{-2x}$.

Cherchons une solution particulière $y_p$ sous forme d'une constante, c'est-à-dire telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ pour que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = a$.

Ainsi, on a $y_p'(x) + 2y_p(x) = 6 \iff 2a = 6 \iff a = 3$. Une solution particulière est donc la fonction $y_p$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = 3$.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 3 + \lambda e^{-2x}$.

De plus, on a $y(0) = 0$ ce qui est équivalent à $3 + \lambda = 0 \iff \lambda = -3$.

Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 3 - 3e^{-2x}$. □

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

L'équation homogène associée est $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) + y(x) = 0$ Ses solutions sont les fonctions $y_0$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = \lambda e^{-x}$.

Cherchons une solution particulière $y_p$ telle qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = ae^x$.

Ainsi, on a $y_p'(x) + y_p(x) = 4e^x \iff 2a = 4 \iff a = 2$. Une solution particulière est donc la fonction $y_p$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = 2e^x$.

Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 2e^x + \lambda e^{-x}$.

De plus, on a $y(0) = -2$ ce qui est équivalent à $2 + \lambda = -2 \iff \lambda = -4$.

Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 2e^x - 4e^{-x}$. $\square$

4. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre. On peut la réécrire sous la forme : $\forall x \in ]-1, +\infty[$, $y'(x) + \dfrac{x}{1+x} y(x) = 0$.

   Cherchons une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$. On peut remarquer que $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{1+x-1}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$ ce qui est facile à primitiver, mais sinon, déterminons, pour $x \in ]-1, +\infty[$, $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t$. Posons le changement de variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1+\infty[$, $u = 1+t$ donc $\mathrm{d}u = \mathrm{d}t$. Ainsi,
   $\displaystyle\int_0^x \frac{t}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_1^{x+1} \frac{u-1}{u}\,\mathrm{d}u = \int_1^{x+1} 1 - \frac{1}{u}\,\mathrm{d}u = [u - \ln(u)]_1^{x+1} = x+1-\ln(x+1)-1.$
   Une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{1+x}$ est donc $x \mapsto x - \ln(x+1)$.

   Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions $y_0$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = \lambda e^{-(x-\ln(1+x))} = \lambda(x+1)e^{-x}$.

   De plus, on a $y(0) = 2$ ce qui est équivalent à $\lambda = 2$.

   Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = 2(x+1)e^{-x}$. $\square$

5. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre. On peut la réécrire sous la forme : $\forall x \in ]-2, +\infty[$, $y'(x) + \dfrac{1}{2+x} y(x) = \dfrac{1}{2+x}$

   L'équation homogène associée est $\forall x \in ]-2, +\infty[$, $y'(x) + \dfrac{1}{2+x} y(x) = 0$ Ses solutions sont les fonctions $y_0$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = \lambda e^{-\ln(2+x)} = \dfrac{\lambda}{2+x}$.

   Cherchons une solution particulière $y_p$ sous la forme $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{2+x}$ où $\lambda$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1(]-2, +\infty[)$.

   Ainsi, on a $(2+x)y_p'(x) + y_p(x) = 1 \iff (2+x)\dfrac{\lambda'(x)}{2+x} - (2+x)\dfrac{\lambda(x)}{(2+x)^2} + \dfrac{\lambda(x)}{2+x} = 1 \iff \lambda'(x) = 1$.

   On peut donc prendre $\lambda(x) = x$, et ainsi, une solution particulière est donc la fonction $y_p$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = \dfrac{x}{2+x}$.

   Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $y$ telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ définies par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \dfrac{x}{2+x} + \dfrac{\lambda}{2+x} = \dfrac{x+\lambda}{2+x}$.

   De plus, on a $y(0) = 1$ ce qui est équivalent à $\dfrac{\lambda}{2} = 2 \iff \lambda = 4$.

   Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = \dfrac{x+4}{x+2}$.

   Remarquons que nous aurions pu remarquer que la fonction constante égale à 1 était solution particulière ce qui nous aurait donné une forme un peu différente mais le même résultat final. $\square$

**Exercice 2.** 1. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y'(x) - 2y(x) = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = \lambda e^{2x}$.

Revenons à notre problème. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda(x)e^{2x}$ où $\lambda$ est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, on a $y_p'(x) = (\lambda'(x) + 2\lambda(x))e^{2x}$ donc

$$y_p'(x) - 2y_p(x) = \lambda'(x)e^{2x}.$$

Ainsi, $y_p$ est solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x)e^{2x} = (x-1)e^{2x}$, autrement dit $\lambda'(x) = x - 1$. On prend alors $\lambda(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$, donc $y_p(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x\right)e^{2x}$.

On trouve que l'ensemble des solutions est constitué par les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$ $y(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - x + \lambda\right)e^{2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. $\square$

2. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y'(x) + 2y(x) = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = \lambda e^{-2x}$.

Revenons à notre problème. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda(x)e^{-2x}$ où $\lambda$ est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Dans ce cas, on a $y_p'(x) = (\lambda'(x) - 2\lambda(x))e^{-2x}$ donc

$$y_p'(x) - 2y_p(x) = \lambda'(x)e^{-2x}.$$

Ainsi, $y_p$ est solution si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda'(x)e^{-2x} = x^2 - 2x + 3$, autrement dit $\lambda'(x) = (x^2 - 2x + 3)e^{2x}$.

Cherchons alors une primitive de $x \mapsto (x^2 - 2x + 3)e^{2x}$.

Par exemple, considérons $\lambda$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lambda(x) = \int_0^x (t^2 - 2t + 3)e^{2t}dt$.

Posons $u, v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définies par

$$\begin{array}{ll} u(t) = t^2 - 2t + 3 & u'(t) = 2t - 2 \\ v'(t) = e^{2t} & v(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \end{array}$$

On a alors

$$\lambda(x) = \left[\frac{t^2 - 2t + 3}{2}e^{2t}\right]_0^x - \int_0^x (t-1)e^{2t}dt.$$

Faisons encore une intégration par parties, pour calculer cette dernière intégrale. Posons $u, v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ définies par

$$\begin{array}{ll} u(t) = t - 1 & u'(t) = 1 \\ v'(t) = e^{2t} & v(t) = \frac{1}{2}e^{2t} \end{array}$$

Ainsi,

$$\lambda(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} - \left[\frac{t-1}{2}e^{2t}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1}{2}e^{2t}dt.$$

Soit
$$\lambda(x) = \frac{x^2-2x+3}{2}e^{2x} - \frac{3}{2} - \frac{x-1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4}e^{2t}\right]_0^x.$$

On a donc
$$\lambda(x) = \frac{x^2-3x+4}{2}e^{2x} - 2 + \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} = \frac{2x^2-6x+9}{4}e^{2x} - \frac{9}{4}.$$

Pour plus de légèreté, on prendra $\lambda(x) = \dfrac{2x^2-6x+9}{4}e^{2x}$.

Ainsi, une solution particulière est la fonction $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par, $\forall x \in \mathbb{R}$,
$$y_p(x) = \frac{2x^2-6x+9}{4}.$$

On trouve que l'ensemble des solutions est constitué par les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}$ $y(x) = \dfrac{2x^2-6x+9}{2} + \lambda e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

On se permettra de remarquer que si la méthode de variation de la constante marche très bien dans certains cas, il faut pas mal travailler dans d'autres. Ici, il aurait été nettement plus rapide de chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme de degré 2. □

**Exercice 3.** La modélisation amène à l'existence d'un réel $\alpha$ tel que $y'(t) = \alpha y(t)$ où $t$ est exprimé en minutes et $y(t)$ est exprimé en gramme.
Ainsi, il existe une constante $K$ telle que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{\alpha t}$. On peut même remarquer que $K = y(0) = 20$, donc $y(t) = 20e^{\alpha t}$.
Ensuite, on sait que nous avons que $y(5) = 10$, soit $20e^{5\alpha} = 10$.
Ainsi, on obtient $\alpha = \dfrac{-\ln(2)}{5}$.
Ensuite, on cherche $t_1$ tel que $y(t_1) = 1$ ce qui se traduit par $20e^{\alpha t_1} = 1$, donc
$$t_1 = \frac{-\ln(20)}{\alpha} = 5\frac{\ln(20)}{\ln(2)}.$$

□

**Exercice 4.** Ici, la modélisation amène à l'existence d'un réel $\alpha$ tel que $y'(t) = \alpha y(t)$ où $t$ est exprimé en heures.
Ainsi, il existe une constante $K$ telle que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{\alpha t}$. On peut même remarquer que $K = y(0)$.
Ensuite, on sait que nous avons que $y(50) = 2y(0)$, soit $y(0)e^{50\alpha} = 2y(0)$.
Ainsi, on obtient $\alpha = \dfrac{\ln(2)}{50}$.
Ensuite, on cherche $t_1$ tel que $y(t_1) = 3y(0)$ ce qui se traduit par $e^{\alpha t_1} = 3$, donc
$$t_1 = \frac{ln(3)}{\alpha} = 50\frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

□

**Exercice 5.** Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $x \neq 0$, donc l'équation est équivalente à
$$y'(x) + \frac{2}{x}y(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Résolvons l'équation homogène associée, $y'(x) + \dfrac{2}{x}y(x) = 0$.
Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x}$ est $x \mapsto 2\ln(x)$ car $\forall x \in ]0, +\infty[$, $x > 0$.
Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $y_0$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y_0(x) = \lambda e^{-2\ln(x)} = \frac{\lambda}{x^2}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière $y_p$ telle que $\forall x \in ]0, +\infty[$, $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{x^2}$ où $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.
On a alors

$$\begin{aligned}
& y_p'(x) + \frac{2}{x}y_p(x) = \frac{1}{x^2+1} \\
\iff \quad & \frac{\lambda'(x)}{x^2} - 2\frac{\lambda(x)}{x^3} + \frac{2}{x}\frac{\lambda(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2+1} \\
\iff \quad & \frac{\lambda'(x)}{x^2} = \frac{1}{x^2+1} \\
\iff \quad & \lambda'(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \\
\iff \quad & \lambda'(x) = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \\
\iff \quad & \lambda'(x) = 1 - \frac{1}{x^2+1}.
\end{aligned}$$

Or une primitive de $x \mapsto 1 - \dfrac{1}{x^2+1}$ est $x \mapsto x - \arctan(x)$.
Ainsi, on prend

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = \frac{x - \arctan(x)}{x^2}.$$

Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{x - \arctan(x) + \lambda}{x^2}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\square$

**Exercice 6.** Nous allons tout d'abord nous placer sur $]-1, +\infty[$. Sur cet intervalle, on a $1 + x \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, \quad y'(t) - \frac{1}{x+1}y(x) = 0.$$

Les solutions sont les fonctions $y$ de la forme $y(x) = \lambda e^{\ln(x+1)} = \lambda(x+1)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Sur l'intervalle $]-\infty, -1[$, on a $1 + x < 0$, donc l'équation est équivalente à

$$\forall x \in ]-1, +\infty[, \quad y'(t) - \frac{1}{x+1}y(x) = 0.$$

Les solutions sont les fonctions $y$ de la forme $y(x) = \mu e^{\ln(|x+1|)} = \mu\,|x+1| = -\mu(x+1)$ où $\mu \in \mathbb{R}$.
Remarquons que sans la moindre perte de généralité, on peut prendre $y(x) = \mu(x+1)$.
Par ailleurs, en $-1$, on a $0y'(-1) = y(-1)$ donc $y(-1) = 0$.
Ainsi, les fonctions solutions semblent être de la forme

$$y(x) = \begin{cases} \lambda(x+1) & \text{si } x > -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ \mu(x+1) & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels.
Ainsi, $y$ est $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1[$ et on a

$$y'(x) = \begin{cases} \lambda & \text{si } x > -1 \\ \mu & \text{si } x < -1. \end{cases}$$

Pour que $y$ soit $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, la dérivée doit être continue en $-1$ donc les limites à droite et à gauche doivent être les mêmes, ce qui donne $\lambda = \mu$
En résumé les solutions de l'équation différentielles sont les fonctions $y$ de la forme $y(x) = \lambda(x+1)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$. Elles sont bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.
□

**Exercice 7.** 1. Sur cet intervalle, on a $x \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(t) - \frac{2}{x}y(x) = x.$$

L'équation homogène associée est

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y'(t) - \frac{2}{x}y(x) = 0.$$

Les solutions sont les fonctions $y_0$ de la forme $y(x) = \lambda e^{2\ln(x)} = \lambda x^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \lambda(x)x^2$ où $\lambda$ est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} & y_p'(t) - \frac{2}{x}y_p(x) = x \\ \iff \quad & \lambda'(x)x^2 + 2x\lambda(x) - \frac{2}{x}\lambda(x)x^2 = x \\ \iff \quad & \lambda'(x)x^2 = x \\ \iff \quad & \lambda'(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On prend donc $\lambda(x) = \ln(x)$ puis $y_p(x) = x^2\ln(x)$.

On peut donc conclure que les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad y(x) = x^2(\lambda + \ln(x)), \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

□

2. C'est exactement la même chose :

Sur cet intervalle, on a $x \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y'(t) - \frac{2}{x}y(x) = x.$$

L'équation homogène associée est

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y'(t) - \frac{2}{x}y(x) = 0.$$

Les solutions sont les fonctions $y_0$ de la forme $y(x) = \mu e^{2\ln(|x|)} = \mu x^2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = \mu(x)x^2$ où $\mu$ est une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_-^*)$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\begin{aligned} & y_p'(t) - \frac{2}{x} y_p(x) = x \\ \iff \quad & \mu'(x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

On prend donc $\mu(x) = \ln(-x)$ puis $y_p(x) = x^2 \ln(-x)$.

On peut donc conclure que les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad y(x) = x^2(\mu + \ln(|x|)), \text{ où } \mu \in \mathbb{R}.$$

□

3. On remarque rapidement que pour $x = 0$, l'équation ne donne pas d'information sur la valeur de $y(0)$.

   On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} x^2(\lambda + \ln(|x|)) & \text{si } x > 0 \\ \nu & \text{si } x = 0 \\ x^2(\mu + \ln(|x|)) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   où $\lambda, \mu$ et $\nu$ sont trois réels.

   Remarquons que les limites à gauche et à droite en 0 valent 0 donc pour que $y$ soit continue, on doit avoir $\nu = 0$.

   Remarquons que le taux d'accroissement à droite est

$$\frac{y(0+h) - y(0)}{h} = h(\lambda + \ln(h)) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$$

   et de même à gauche. Ainsi, $y$ est dérivable en 0 et $y'(0) = 0$.

   Enfin, regardons la dérivée de $y$. On a $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$y'(x) = \begin{cases} 2x(\lambda + \ln(|x|)) + x & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x(\mu + \ln(|x|)) + x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   Il est clair que la dérivée est bien continue en 0.

   Ainsi, les fonctions $y$ solutions sont les fonctions pour lesquelles il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$y(x) = \begin{cases} x^2(\lambda + \ln(|x|)) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ x^2(\mu + \ln(|x|)) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

   On remarquera que contrairement à d'autres cas, on a bien deux paramètres différents.

□

**Exercice 8.** 1. Sur cet intervalle, on a $1-x^2 \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$\forall x \in ]-\infty,-1[, \quad y'(t)+\frac{-x}{1-x^2}y(x)=0.$$

Les solutions sont les fonctions $y$ de la forme $y(x)=\lambda_1 e^{-\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)}=\dfrac{\lambda_1}{\sqrt{|1-x^2|}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

2. De la même façon, les solutions sont les fonctions $y$ de la forme $y(x)=\lambda_2 e^{-\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)}=\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{|1-x^2|}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

3. De la même façon, les solutions sont les fonctions $y$ de la forme $y(x)=\lambda_3 e^{-\frac{1}{2}\ln(|1-x^2|)}=\dfrac{\lambda_3}{\sqrt{|1-x^2|}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

□

4. Un telle fonction $y$ vérifie $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$,

$$y(x)=\begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{|1-x^2|}} & \text{si } x<-1 \\ \dfrac{\lambda_2}{\sqrt{|1-x^2|}} & \text{si } -1<x<1 \\ \dfrac{\lambda_3}{\sqrt{|1-x^2|}} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

où $\lambda_1, \lambda_2$ et $\lambda_3$ sont trois réels.

Pour qu'elles soient continues sur $\mathbb{R}$, il faut qu'elles aient une limite finie en $-1$ et 1. Si on ne prend pas $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, ce n'est pas le cas. Une fois qu'on a remarqué ça, on remarque que la seule solution doit être nulle sur chaque intervalle considéré, et continue sur $\mathbb{R}$ donc nulle sur $\mathbb{R}$ tout entier.

On réalise donc que la seule fonction qui remplit les conditions est la fonction nulle.

□

**Exercice 9.** Plaçons-nous sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{3}{2x}\int_0^x f(t)dt=f(x).$$

Ainsi, si $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ alors $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est $\mathcal{C}^1$ donc par produit $x \mapsto \frac{3}{2x}\int_0^x f(t)dt$ aussi. Ainsi, $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$.
En dérivant l'équation de départ, on récupère

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad 3f(x)=2f(x)+2xf'(x).$$

Ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x)-\frac{1}{2x}f(x)=0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme $f(x)=\lambda e^{\frac{1}{2}\ln(x)}=\lambda\sqrt{x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
De la même façon, sur $\mathbb{R}_-^*$, on récupère

$$\forall x \in \mathbb{R}_-^*, \quad f'(x)-\frac{1}{2x}f(x)=0.$$

Les solutions sont les fonctions de la forme $f(x) = \mu e^{\frac{1}{2}\ln(|x|)} = \mu\sqrt{|x|}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.
Ainsi, les fonctions continues sont les fonctions qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ \mu\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels.
Enfin, pour que $f$ soit continue, il faut que $f(0) = 0$. Cela permet de conclure. $\forall x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \mu\sqrt{-x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels. □

**Exercice 10.** 1. Puisque $y$ ne s'annule pas, on a $-\dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = 3$.

Soit $x > 0$, en intégrant de 0 à $x$, on obtient

$$\int_0^x -\frac{y'(t)}{y^2(t)}dt = \int_0^x 3dt$$

Autrement dit $\dfrac{1}{y(x)} - \dfrac{1}{y(0)} = 3x$.

Ainsi on a, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $y(x) = \dfrac{2}{6x+1}$. □

2. On appliquera exactement la même méthode que ci-dessus pour obtenir $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $y(x) = \dfrac{1}{2x+1}$. □

**Exercice 11.** On pose $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $z(x) = \dfrac{1}{y(x)}$. Ainsi, $z$ est bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ (inverse de fonction $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas).
On a ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $z'(x) = -\dfrac{y'(x)}{y^2(x)} = -\dfrac{y(x)(1-\frac{y(x)}{K})}{y^2(x)}$.
Cela se simplifie en

$$z'(x) = -\frac{1}{y(x)} + \frac{1}{K} = -z(x) + \frac{1}{K}.$$

On reconnait une équation linéaire du première ordre à coefficients constants, dont une solution particulière est la fonction définie par $z_p(x) = \dfrac{1}{K}$ et les solutions de l'équation homogène associée sont $z_0(x) = \lambda e^{-x}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}+$, tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $z(x) = \lambda e^{-x} + \dfrac{1}{K}$. Or

$$\lambda + \frac{1}{K} = z(0) = \frac{1}{y(0)} = \frac{2}{K},$$

donc $\lambda = \dfrac{1}{K}$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $z(x) = \dfrac{1}{K} + \dfrac{1}{K}e^{-x}$ puis $y(x) = \dfrac{K}{1+e^{-x}}$.
□

**Exercice 12.** 1. Si $y$ ne s'annule pas et ne vaut jamais $\frac{1}{2}$.

On a alors $\forall t \in \mathbb{R}_+$,

$$\frac{-\frac{y'(t)}{y(t)}}{\ln\left(\frac{1}{2y(t)}\right)} = -1.$$

Comme $y(0) = \frac{1}{8}$, et que $y$ est continue, on a $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $0 < y(t) < \frac{1}{2}$, donc $\ln\left(\frac{1}{2y(t)}\right) > 0$.

On reconnait ainsi une dérivée classique, donc si on intègre entre 0 et $x > 0$, on a,

$$\forall x > 0, \int_0^x \frac{-\frac{y'(t)}{y(t)}}{\ln\left(\frac{1}{2y(t)}\right)} dt = \int_0^x -dt.$$

Autrement dit

$$\forall x > 0, \left[\ln\left(\ln\left(\frac{1}{2y(t)}\right)\right)\right]_0^x = -x.$$

Donc

$$\forall x > 0, \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2y(x)}\right)\right) - \ln(\ln(4)) = -x.$$

On a donc

$$\forall x > 0, \ln\left(\ln\left(\frac{1}{2y(x)}\right)\right) = \ln(2\ln(2)) - x.$$

Puis

$$\forall x > 0, \ln\left(\frac{1}{2y(x)}\right) = 2\ln(2)e^{-x}.$$

Et enfin

$$\forall x > 0, \frac{1}{2y(x)} = e^{2\ln(2)e^{-x}}.$$

Pour finir, on a

$$\forall t > 0, y(t) = \frac{1}{2}e^{-2\ln(2)e^{-t}}.$$

□

2. Supposons que la taille ne s'annule pas et qu'il s'agit d'une fonction $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$.

On pose $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $z(t) = \frac{1}{y(t)}$. Ainsi, $z$ est bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+)$ (inverse de fonction $\mathcal{C}^1$ qui ne s'annule pas).

On a ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $z'(t) = -\frac{y'(t)}{y^2(t)} = -\frac{y(t)(1-2y(t))}{y^2(t)}$.

Cela se simplifie en

$$z'(t) = -\frac{1}{y(t)} + 2 = -z(t) + 2.$$

On reconnait une équation linéaire du première ordre à coefficients constants, dont une solution particulière est la fonction définie par $z_p(t) = 2$ et les solutions de l'équation homogène associée sont $z_0(t) = \lambda e^{-t}$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}+$, tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $z(t) = \lambda e^{-t} + 2$. Or

$$\lambda + 2 = z(0) = \frac{1}{y(0)} = 8,$$

donc $\lambda = 6$.

Ainsi, $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $z(t) = 2 + 6e^{-t}$ puis $y(t) = \dfrac{1}{2 + 6e^{-t}}$.

□

3. Non, dans les deux cas, on trouve la même limite. □

4. Sans traitement il faut résoudre $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}e^{-2\ln(2)e^{-t}}$, soit $-\ln(2) = -2\ln(2)e^{-t}$ et finalement $t = \ln(2)$.

   Avec traitement, il faut résoudre $\dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2 + 6e^{-t}}$ soit $e^{-t} = \frac{1}{3}$, soit $t = \ln(3)$.

   On aura donc gagné $\ln(3) - \ln(2)$ mois [2]. □

## 2. Second ordre

**Exercice 13.** 1. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

Résolvons l'équation caractéristique associée, $X^2 + X - 2 = 0$. Il s'agit d'un trinôme du second degré dont 1 est racine évidente. Le produit des racines fait $-2$ donc l'autre est $-2$.

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions telles qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ définies par $y_0(x) = \lambda e^x + \mu e^{-2x}$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Or $y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et $y_p''(x) = -a\cos(x) - b\sin(x)$.

Ainsi, on a

$$y_p''(x)+y_p'(x)-2y_p(x) = (-a\cos(x)-b\sin(x))+(-a\sin(x)+b\cos(x))-2(a\cos(x)+b\sin(x))$$

Ainsi, on doit avoir

$$(-3a + b)\cos(x) + (-a - 3b)\sin(x) = 10\cos(x).$$

Résolvons

$$\begin{cases} -3a & +b & = 10 \\ -a & -3b & = 0 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 3L_1}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -3a & +b & = 10 \\ -10a & & = 30 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} & b & = 1 \\ a & & = -3 \end{cases}$$

Ainsi, une solution particulière est la fonction $y_p$ définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = -3\cos(x) + \sin(x)$.

Ses solutions sont les fonctions $y$ telles qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -3\cos(x) + \sin(x) + \lambda e^x + \mu e^{-2x}.$$

2. En pratique, on utilise en général le même modèle avec ou sans traitement, c'est en général les constantes qui varient, mais je souhaitais faire une comparaison de deux modèles

De plus, on a $y(0) = -3 \iff -3\lambda + \mu = -3 \iff \lambda + \mu = 0$.

Ensuite, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = 3\sin(x) + \cos(x) + \lambda e^x - 2\mu e^{-2x}$, donc

$$y'(0) = 4 \iff 1 + \lambda - 2\mu = 4 \iff \lambda - 2\mu = 3.$$

Cela revient au système

$$\left\{\begin{array}{lll} \lambda & +\mu & = 0 \\ \lambda & -2\mu & = 3 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{lll} \lambda & +\mu & = 0 \\ & -3\mu & = 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lll} \lambda & & = 1 \\ & \mu & = -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = e^x - e^{-2x} - 3\cos(x) + \sin(x).$$

$\square$

2. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

   Résolvons l'équation caractéristique associée, $X^2 + 4X + 4 = 0 \iff (X+2)^2 = 0$. Il s'agit d'un trinôme du second degré avec une seule racine $-2$.

   Ainsi, les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions telles qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ définies par $y_0(x) = (\lambda x + \mu)e^{-2x}$.

   Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2e^{-2x}$ avec $a \in \mathbb{R}$.

   Or
   $$y_p'(x) = 2axe^{-2x} - 2ax^2e^{-2x} = a(2x - 2x^2)e^{-2x}$$
   et
   $$y_p''(x) = a(2-4x)e^{-2x} - 2a(2x - 2x^2)e^{-2x} = a(2 - 8x + 4x^2)e^{-2x}.$$

   Ainsi, on a $y_p''(x) + 4y_p'(x) + 4y_p(x) = 2ae^{-2x}$.

   On doit avoir
   $$2ae^{-2x} = 4e^{-2x} \iff a = 2.$$

   Ses solutions sont les fonctions $y$ telles qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = 2x^2e^{-2x} + (\lambda x + \mu)e^{-2x}.$$

   De plus, on a $y(0) = 1 \iff \mu = 1$.

   Ensuite, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = (4x + \lambda)e^{-2x} - 2(2x^2 + \lambda x + \mu)e^{-2x} = (-4x^2 + (4 - 2\lambda)x + \lambda - 2\mu)e^{-2x}$, donc
   $$y'(0) = 1 \iff \lambda - 2\mu = 1 \iff \lambda = 3.$$

   Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (2x^2 + 3x + 1)e^{-2x}.$$

   $\square$

3. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du second ordre.

   Résolvons l'équation caractéristique associée, $X^2 + 2X + 2 = 0$. Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant $\Delta = -4$.

   Il a deux racines conjuguées $\dfrac{-2-2i}{2} = -1 - i$ et $-1 + i$.

Ainsi, les solutions de l'équation différentielle homogène associée sont les fonctions telles qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ définies par $y_0(x) = e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))$.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

Or $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$.

Ainsi, on a

$$y_p''(x) + 2y_p'(x) + 2y_p(x) = 2ax^2 + (4a + 2b)x + (2a + 2b + 2c).$$

Or, on doit avoir $\forall x \in \mathbb{R}$, $2ax^2 + (4a + 2b)x + (2a + 2b + 2c) = 2x^2 + 6x + 6$. Par unicité de l'écriture développée réduite d'un polynôme, cela revient au système

$$\left\{\begin{array}{llll} 2a & & & = 2 \\ 4a & +2b & & = 6 \\ 2a & +2b & +2c & = 6 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{llll} a & & & = 1 \\ & b & & = 1 \\ & & c & = 1 \end{array}\right.$$

Ses solutions sont les fonctions $y$ telles qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = x^2 + x + 1 + e^{-x}(\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)).$$

De plus, on a $y(0) = 1 \iff 1 + \lambda = 1 \iff \lambda = 0$.

Ainsi, la fonction recherchée est telle qu'il existe $\mu \in \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = x^2 + x + 1 + \mu\sin(x)e^{-x}$.

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = 2x + 1 + \mu\cos(x)e^{-2x} - \mu\sin(x)e^{-x}$, donc

$$y'(0) = 2 \iff 1 + \mu = 2 \iff \mu = 1.$$

Ainsi, la fonction recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = x^2 + x + 1 + \sin(x)e^{-x}.$$

□

**Exercice 14.** Vous trouverez les résultats ci-dessous mais pour la rédaction, vous vous rapporterez à l'exemple illustrant le principe de superposition dans le cours. □

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad y''(x) + y(x) = 0$ $\{\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)/(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. □
2. $y(x) = \dfrac{1}{2}x\sin(x)$. □
3. $y(x) = -\dfrac{1}{3}\sin(2x)$. □
4. $\{x \mapsto \lambda\cos(x) + \left(\dfrac{1}{2}x + \mu\right)\sin(x) - \dfrac{1}{3}\sin(2x)/(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. □

**Exercice 15.** Vous trouverez les résultats ci-dessous mais pour la rédaction, vous vous rapporterez à l'exemple illustrant le principe de superposition dans le cours. □

1. $f(x) = -\dfrac{4}{65}\cos(2x) - \dfrac{7}{65}\sin(2x)$. □
2. $g(x) = \dfrac{1}{4}xe^x$. □

3. $h(x) = \dfrac{1}{21}e^{4x}$. $\square$

4. $\{x \mapsto \lambda e^{-3x} + \mu e^{x} - \dfrac{4}{65}\cos(2x) - \dfrac{7}{65}\sin(2x) + \dfrac{1}{4}xe^{x} + \dfrac{1}{21}e^{4x} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$

**Exercice 16.** Remarquons que si $f$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, alors par composition $x \mapsto f(-x)$ aussi. Ainsi, $f'$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, donc $f$ est en réalité $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.
Dérivons cette relation. Par composition, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f'(-x).$$

En utilisant l'équation de départ, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = -f(x).$$

Autrement dit, les fonctions $f$ qui satisfont cette égalité sont à chercher parmi les solutions de l'équation différentielle

$$y'' + y = 0.$$

Cette équation différentielle homogène très classique a pour équation caractéristique associée $X^2 + 1 = 0$ qui a deux racines $i$ et $-i$. Ainsi, on sait qu'il existe $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x).$$

Vérifions ces fonctions pour savoir si elles sont bien solutions. Si il existe $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda \cos(x) + \mu \sin(x),$$

on a alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x).$$

Si on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$, alors on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad -\lambda \sin(x) + \mu \cos(x) = \lambda \cos(-x) + \mu \sin(-x) = \lambda \cos(x) - \mu \sin(x).$$

En prenant $x = 0$, on obtient $\lambda = \mu$.
Ainsi, on a forcément $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda(\cos(x) + \sin(x))$, et donc

$$f'(x) = \lambda(\cos(x) - \sin(x)) = f(-x).$$

Les solutions sont donc les fonctions $f$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, telles que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda(\cos(x) + \sin(x)).$$

$\square$

**Exercice 17.** 1. Il s'agit d'une équation homogène dont l'équation caractéristique associée est $X^2 - 1 = 0$, donc l'ensemble des solutions est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent $x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x}$ où $\lambda$ et $\mu$ sont deux réels.

$\square$

2. Remarquons que $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ est équivalent à $(y'' - y)'' - (y'' - y) = 0$, donc que la fonction $z = y'' - y$ est solution de l'équation précédente.

$y$ est solution si et seulement si il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$y''(x) - y(x) = \lambda e^{x} + \mu e^{-x}.$$

Il faut donc désormais résoudre $y'' - y = \lambda e^{-x} + \mu e^{x}$.

On remarquera que l'équation homogène associée est l'équation de la question 1.

Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(x) = axe^x + bxe^{-x}$.

On a alors $y_p'(x) = (ax + a)e^x + (-bx + b)e^{-x}$.

Et $y_p''(x) = (ax + 2a)e^x + (bx - 2b)e^{-x}$.

Ainsi, $y_p''(x) - y_p(x) = 2ae^x - 2be^{-x}$. On peut ainsi prendre $a = \dfrac{\lambda}{2}$ et $b = -\dfrac{\mu}{2}$.

Et une solution particulière est $y_p(x) = \dfrac{\lambda}{2}e^x - \dfrac{\mu}{2}e^{-x}$.

Ainsi, les solutions de l'équation sont les fonctions de la forme

$$y(x) = \frac{\lambda}{2}xe^x - \frac{\mu}{2}xe^{-x} + \lambda' e^x + \mu' e^{-x}$$

où $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ sont 4 réels.

On peut plus simplement écrire que les solutions sont exactement les fonctions telles qu'il existe 4 réels $a, b, c, d$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = (ax + b)e^x + (cx + d)e^{-x}$$

□

## 3. Autres équations, pour s'entrainer

**Exercice 18** (Equations homogènes)**.** 1. Il est clair qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall t|in\mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{3t}$.

Par ailleurs, comme $y(0) = 2$, on a $K = 2$. Ainsi, $y$ est définie par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = 2e^{3t}$. □

2. C'est équivalent à $y' - \dfrac{4}{3}y = 0$. Ainsi, il est clair qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall t|in\mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{\frac{4}{3}t}$.

Par ailleurs, comme $y(0) = -1$, on a $K = -1$. Ainsi, $y$ est définie par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -e^{\frac{4}{3}t}$. □

3. Il est clair qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall t|in\mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{3t}$.

Par ailleurs, comme $y(3) = e^9$, on a $Ke^9 = e^3$. Ainsi, $y$ est définie par, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = e^{-6}e^{3t} = e^{3t-6}$. □

4. Il est clair qu'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que, $\forall t|in\mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{\frac{5}{7}t}$.

Ainsi, l'ensemble des fonctions solutions est $\{t \mapsto \lambda e^{\frac{5}{7}t} / \lambda \in \mathbb{R}\}$. □

**Exercice 19** (Equations non homogènes)**.** 1. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - 2y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{2t}$.

Revenons à notre problème. Une solution particulière est la fonction $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = -\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{2t} - \dfrac{1}{2}$.

Par ailleurs, on a $y(0) = K - \frac{1}{2}$ et $y(0) = 2$, donc $K = \frac{5}{2}$.

Ainsi, la solution recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{5}{2}e^{2t} - \frac{1}{2}$.
$\square$

2. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - 4y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{4t}$.

   Revenons à notre problème. Une solution particulière est la fonction $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = \frac{3}{4}$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{4t} + \frac{3}{4}$.

   Par ailleurs, on a $y(0) = K + \frac{3}{4}$ et $y(0) = 2$, donc $K = \frac{5}{4}$.

   Ainsi, la solution recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{5}{4}e^{4t} + \frac{3}{4}$.
   $\square$

3. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $3y' - 4y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{\frac{4}{3}t}$.

   Revenons à notre problème. Une solution particulière est la fonction $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = -\frac{3}{4}$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{\frac{4}{3}t} - \frac{3}{4}$.

   Par ailleurs, on a $y(0) = K - \frac{3}{4}$ et $y(0) = -1$, donc $K = -\frac{1}{4}$.

   Ainsi, la solution recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -\frac{1}{4}e^{\frac{4}{3}t} - \frac{3}{4}$. $\square$

4. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - 2y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{2t}$.

   Revenons à notre problème. Une solution particulière est la fonction $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = \frac{3}{2}$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{2t} + \frac{3}{2}$.

   Ainsi l'ensemble solution est $\left\{x \mapsto Ke^{2t} + \frac{3}{2} / K \in \mathbb{R}\right\}$. $\square$

5. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - 3y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{3t}$.

   Revenons à notre problème. Une solution particulière est la fonction $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = -\frac{2}{3}$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{3t} - \frac{2}{3}$.

   De plus, on a $\forall t \in \mathbb{R}$, $y'(t) = 3Ke^{3t}$. Or $y'(0) = 1$, donc $3K = 1$ soit $K = \frac{1}{3}$.

Ainsi, la solution recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par, $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = \frac{1}{3}e^{3t} - \frac{2}{3}$.

$\square$

6. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - \frac{3}{4}y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{\frac{3}{4}t}$.

   Revenons à notre problème. Une solution particulière est la fonction $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}$, $y_p(t) = -4$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = Ke^{\frac{3}{4}t} - 4$.

   Ainsi l'ensemble solution est $\left\{t \mapsto Ke^{\frac{3}{4}t} - 4/K \in \mathbb{R}\right\}$.

   $\square$

7. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - 4y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(x) = Ke^{4x}$.

   Revenons à notre problème. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = \lambda e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Dans ce cas, on a $y_p'(x) = \lambda e^x$ donc $y_p'(x) - 4y_p(x) = -3\lambda e^x$. Ainsi, en prenant $\lambda = -\frac{1}{3}$, on obtient une solution particulière. On a donc une solution particulière $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = -\frac{1}{3}e^x$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ke^{4x} - \frac{1}{3}e^x$.

   Par ailleurs, on a $y(0) = K - \frac{1}{3}$ et $y(0) = 2$, donc $K = \frac{7}{3}$.

   Ainsi, la solution recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par,

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{7}{3}e^{4x} - \frac{1}{3}e^x.$$

   $\square$

8. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $3y' - 4y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{\frac{4}{3}x}$.

   Revenons à notre problème. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = ax + b$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

   Dans ce cas, on a $y_p'(x) = a$ donc $3y_p'(x) - 4y_p(x) = -4ax + 3a - 4b$. Ainsi, en prenant $a = -\frac{1}{4}$ puis $b = \frac{3}{4}a = -\frac{3}{16}$, on obtient une solution particulière. On a donc une solution particulière $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ke^{\frac{4}{3}x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}$.

   Par ailleurs, on a $y(0) = K - \frac{3}{16}$ et $y(0) = -1$, donc $K = -\frac{13}{16}$.

   Ainsi, la solution recherchée est la fonction $y$ définie sur $\mathbb{R}$ par,

   $$\forall x \in \mathbb{R}; \quad y(x) = -\frac{13}{16}e^{\frac{4}{3}x} - \frac{1}{4}x - \frac{3}{16}.$$

   $\square$

9. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - 2y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{2x}$.

   Revenons à notre problème. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = (ax+b)e^{2x}$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

   Dans ce cas, on a $y_p'(x) = (2ax + a + 2b)e^{2x}$ donc $y_p'(x) - 2y_p(x) = ae^{2x}$. Ainsi, en prenant $a = 1$ et $b = 0$, on obtient une solution particulière. On a donc une solution particulière $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = xe^{2x}$.

   Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = (x+K)e^{2x}$.

   Ainsi, l'ensemble solution est $\{x \mapsto (x+K)e^{2x} / K \in \mathbb{R}\}$. $\square$

10. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - 3y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{3x}$.

    Revenons à notre problème. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = ax^2 + bx + c$ où $a, b$ et $c$ sont trois réels.

    Dans ce cas, on a $y_p'(x) = 2ax + b$ donc $y_p'(x) - 3y_p(x) = -3ax^2 + (2a - 3b)x + (b - 3c)$. Ainsi, en prenant $a = -\dfrac{1}{3}$ et $b = \frac{2}{3}a = -\dfrac{2}{9}$, et enfin $c = \dfrac{1}{3}b = -2\dfrac{2}{27}$ on obtient une solution particulière. On a donc une solution particulière $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = -\dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x - \dfrac{2}{27}$.

    Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ke^{3x} - \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x - \dfrac{2}{27}$.

    Ainsi, l'ensemble solution est $\left\{x \mapsto Ke^{3x} - \dfrac{1}{3}x^2 - \dfrac{2}{9}x - \dfrac{2}{27} / K \in \mathbb{R}\right\}$. $\square$

11. Résolvons l'équation différentielle homogène associée, $y' - \dfrac{3}{4}y = 0$. Les solutions sont les fonctions $y_0$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_0(t) = Ke^{\frac{3}{4}x}$.

    Revenons à notre problème. Cherchons une solution particulière sous la forme $y_p(t) = a\cos(x) + b\sin(x)$ où $a$ et $b$ sont deux réels.

    Dans ce cas, on a $y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ donc

    $$y_p'(x) - \frac{3}{4}y_p(x) = \left(b - \frac{3}{4}a\right)\cos(x) + \left(-a - \frac{3}{4}b\right)\sin(x).$$

    Ainsi, on a une solution particulière lorsque

    $$\begin{cases} -\dfrac{3}{4}a + b &= 1 \\ -a - \dfrac{3}{4}b &= 0 \end{cases}$$

    $$\iff \begin{cases} -3a + 4b &= 4 \quad L_1 \leftarrow 4L_1 \\ 4a + 3b &= 0 \quad L_2 \leftarrow -4L_2 \end{cases}$$

    $$\iff \begin{cases} -3a + 4b &= 4 \\ 25b &= 16 \quad L_2 \leftarrow 3L_2 + 4L_1 \end{cases}$$

    $$\iff \begin{cases} -75a &= 36 \quad L_1 \leftarrow 25L_1 - 4L_2 \\ 25b &= 16 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a & = -\dfrac{12}{25} \\ b & = \dfrac{16}{25} \end{cases}$$

On a donc une solution particulière $y_p$ définie sur $\mathbb{R}$ par $y_p(x) = -\dfrac{12}{25}\cos(x) + \dfrac{16}{25}\sin(x)$.

Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ où il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y(x) = Ke^{\frac{3}{4}x} - \dfrac{12}{25}\cos(x) + \dfrac{16}{25}\sin(x)$.

Ainsi, l'ensemble solution est $\left\{x \mapsto Ke^{\frac{3}{4}x} - \dfrac{12}{25}\cos(x) + \dfrac{16}{25}\sin(x) / K \in \mathbb{R}\right\}$. □

**Exercice 20.** 1. Aucune difficulté, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda \exp(-\exp(x))$$

où $\lambda$ est un réel.

□

2. Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$y'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Résolvons l'équation homogène associée, $y'(x) - \dfrac{2x}{1+x^2}y(x) = 0$.

Une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{1+x^2}$ est $x \mapsto \ln(1+x^2)$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $y_0$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = \lambda e^{\ln(1+x^2)} = \lambda(1+x^2)$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière $y_p$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y_p(x) = \lambda(x)(1+x^2)$ où $\lambda \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

On a alors

$$\begin{aligned} & y_p'(x) - \frac{2x}{1+x^2}y_p(x) = \frac{x}{1+x^2} \\ \iff \quad & \lambda'(x)(1+x^2) + 2x\lambda(x) - \frac{2x}{1+x^2}\lambda(x)(1+x^2) = \frac{x}{1+x^2} \\ \iff \quad & \lambda'(x)(1+x^2) = \frac{x}{1+x^2} \\ \iff \quad & \lambda'(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}. \end{aligned}$$

Or une primitive de $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$ est $x \mapsto -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}$.

Ainsi, on prend $\lambda(x) = -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1+x^2}$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = -\frac{1}{2}.$$

Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \lambda(1+x^2) - \frac{1}{2}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Bien entendu, si on avait remarqué qu'une fonction constante pouvait être solution particulière, on aurait gagné pas mal de temps ! $\square$

3. Remarquons que $\forall x \in ]-2,+\infty[$, $2+x \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$y'(x) + \frac{1}{2+x} y(x) = \frac{2}{2+x}.$$

Résolvons l'équation homogène associée, $y'(x) + \dfrac{1}{2+x} y(x) = 0$.

Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2+x}$ est $x \mapsto \ln(2+x)$ car $\forall x \in ]-2,+\infty[$, $2+x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $y_0$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = \lambda e^{-\ln(2+x)} = \frac{\lambda}{2+x}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière $y_p$ telle que $\forall x \in ]2,+\infty[$, $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{2+x}$ où $\lambda \in \mathcal{C}^1(]2,+\infty[)$.

On a alors

$$\begin{aligned}
& y_p'(x) + \frac{1}{2+x} y_p(x) = \frac{2}{2+x} \\
\iff \quad & \frac{\lambda'(x)}{2+x} - \frac{\lambda(x)}{(2+x)^2} + \frac{1}{2+x}\frac{\lambda(x)}{2+x} = \frac{2}{2+x} \\
\iff \quad & \frac{\lambda'(x)}{2+x} = \frac{2}{2+x} \\
\iff \quad & \lambda'(x) = 2.
\end{aligned}$$

Or une primitive de $x \mapsto 2$ est $x \mapsto 2x$.

Ainsi, on prend

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = \frac{2x}{2+x}.$$

Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{\lambda}{2+x} + \frac{2x}{2+x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

ou encore

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{\lambda + 2x}{2+x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Si on est très malin, on remarque que

$$\frac{\lambda+2x}{2+x} = \frac{\lambda - 4 + 2(2+x)}{2+x} = \frac{\lambda-4}{2+x} + 2.$$

Et alors, qu'en réalité, on peut dire que les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = \frac{\lambda}{2+x} + 2, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On aurait pu remarquer qu'en réalité, une solution particulière était la fonction constante égale à 2 ce qui nous aurait simplifié la vie. □

4. Remarquons que $\forall x \in ]-1, +\infty[$, $1 + x \neq 0$, donc l'équation est équivalente à

$$y'(x) + \frac{1}{1+x}y(x) = \sin(x).$$

Résolvons l'équation homogène associée, $y'(x) + \dfrac{1}{1+x}y(x) = 0$.

Une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$ est $x \mapsto \ln(1+x)$ car $\forall x \in ]-1, +\infty[$, $2 + x > 0$.

Les solutions de l'équation homogène associée sont donc les fonctions $y_0$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_0(x) = \lambda e^{-\ln(1+x)} = \frac{\lambda}{1+x}.$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière $y_p$ telle que $\forall x \in ]-1, +\infty[$, $y_p(x) = \dfrac{\lambda(x)}{1+x}$ où $\lambda \in \mathcal{C}^1(]-1, +\infty[)$.

On a alors

$$\begin{aligned}
& y_p'(x) + \frac{1}{1+x}y_p(x) = \sin(x) \\
\iff & \frac{\lambda'(x)}{1+x} - \frac{\lambda(x)}{(1+x)^2} + \frac{1}{1+x}\frac{\lambda(x)}{1+x} = \sin(x) \\
\iff & \frac{\lambda'(x)}{1+x} = \sin(x) \\
\iff & \lambda'(x) = \sin(x)(1+x).
\end{aligned}$$

Prenons $\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x \sin(t)(1+t)dt$.

Posons $u, v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1(]-1, +\infty[)$ définies par

$$u'(t) = \sin(t) \quad u(t) = -\cos(t)$$

$$v(t) = 1 + t \qquad v'(t) = 1$$

Ainsi, on a

$$\lambda(x) = [-\cos(t)(1+t)]_0^x + \int_0^x \cos(t)dt.$$

Ainsi, on a

$$\lambda(x) = -\cos(x)(1+x) + 1 + [\sin(t)]_0^x = -\cos(x)(1+x) + \sin(x) + 1.$$

Prenons plutôt $\lambda(x) = -\cos(x)(1+x) + \sin(x)$.

Ainsi, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y_p(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x)}{1+x}.$$

Ainsi, les solutions sont les fonctions $y$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad y(x) = -\cos(x) + \frac{\sin(x) + \lambda}{1 + x}, \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$\square$

**Exercice 21** (Equations homogènes)**.** Vous trouverez les résultats ci-dessous, mais pour la résolution on se rapportera aux exemples du cours. $\square$

1. $y(t) = \frac{4}{3}e^t + \frac{2}{3}e^{-2t}$. $\square$
2. $\{t \mapsto \lambda e^{-t} + \mu e^{3t} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$
3. $y(t) = -\frac{4}{5}e^{-\frac{1}{2}t} + \frac{9}{5}e^{\frac{1}{3}t}$. $\square$
4. $y(t) = e^t - 1$. $\square$
5. $y(t) = te^t$. $\square$
6. $y(t) = e^{-t}$. $\square$
7. $\{t \mapsto \lambda e^{\frac{-1-\sqrt{5}}{2}t} + \lambda e^{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}t} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$
8. $y(t) = e^{\frac{t}{2}} \left( \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \right)$. $\square$
9. $y(t) = (-x + 1)e^{2x}$. $\square$
10. Si $y$ est impaire, $y(-0) = -y(0)$ donc $y(0) = 0$. $y(t) = \sin(x)$. $\square$
11. $\{t \mapsto e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \left( \lambda \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x) \right) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$

**Exercice 22** (Equations non homogènes)**.** Vous trouverez les résultats ci-dessous, mais pour la résolution on se rapportera aux exemples du cours. $\square$

1. $\{x \mapsto \lambda e^{-2x} + \mu e^x - \frac{1}{2} / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$
2. $y : x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \left( \frac{3}{2}\cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + \frac{\sqrt{7}}{14}\sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x) \right) - \frac{1}{2}$. $\square$
3. $y : x \mapsto e^{\frac{\sqrt{2}x}{2}} \left( \lambda \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x) \right) + 1$. $\square$
4. $y : x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \left( \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) - 1.$

   $\square$
5. $\{x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \left( \lambda \cos(\frac{\sqrt{7}}{2}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{7}}{2}x) \right) + \frac{1}{2}e^x / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$
6. $\{x \mapsto e^{\frac{\sqrt{2}x}{2}} \left( \lambda \cos(\frac{\sqrt{2}}{2}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{2}}{2}x) \right) + x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$
7. $\{x \mapsto e^{\frac{x}{2}} \left( \lambda \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}x) + \mu \sin(\frac{\sqrt{3}}{2}x) \right) - \frac{8}{73}\cos(3x) - \frac{3}{73}\sin(3x) / (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$

# 10 Matrices

**Exercice 1.** 1. a. $K = \begin{pmatrix} 8 & 1 & -1 \\ 9 & 8 & -\frac{26}{3} \\ 3 & 3 & 17 \end{pmatrix}$ □

b. $L = A + C = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{10}{3} \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ □

c. $M = 6A = \begin{pmatrix} 6 & -12 & 18 \\ 12 & 0 & -24 \\ 12 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ □

d. $N = 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

□

e. $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -5 \\ -9 & 6 & 10 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ □

2. On a $AB = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 13 \\ 4 & 2 & -24 \\ 5 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ ; $BA = \begin{pmatrix} 0 & -6 & 0 \\ 7 & -2 & -9 \\ 10 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ ; $AD = \begin{pmatrix} 8 & 20 \\ -2 & -14 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$ ; $AE$ est impossible ; $EA = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 5 & 3 & -10 \end{pmatrix}$ ; $ED = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ ; $DE = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ -3 & -4 & -3 \\ -3 & 11 & 6 \end{pmatrix}$ ; $EBD = \begin{pmatrix} -4 & 15 \\ -3 & 30 \end{pmatrix}$. □

3. a. On trouve quasi-immédiatement que l'équation est équivalente à

$$X = \frac{1}{2}(A - B) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

□

b. L'équation est équivalente à

$$2A - 6C = 2X$$

donc

$$X = A - 3C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 8 & -3 & -6 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

□

4. a. Le système est équivalent à

$$\begin{cases} X - Y = & F \\ \quad 3X = & F + G \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Y = & -\dfrac{2}{3}F + \dfrac{1}{3}G \\ X = & \dfrac{1}{3}F + \dfrac{1}{3}G \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{cases}$$

On a donc $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. □

b. Le système est équivalent à

$$\begin{cases} X - Y + Z = & ED \\ \quad 2Y + Z = & -ED + H \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \quad 3Y - 2Z = & -ED + G \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} X - Y + Z = & ED \\ \quad 2Y + Z = & -ED + H \\ \qquad 7Z = & ED - 2G + 3H \quad L_3 \leftarrow -2L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7X - 7Y = & 6ED + 2G - 3H \qquad L_1 \leftarrow 7L_1 - L_3 \\ \quad 14Y = & -8ED + 2G + 4H \quad L_2 \leftarrow 7L_2 - L_3 \\ \quad 7Z = & ED - 2G + H \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 14X = & 4ED + 6G - 2H \qquad L_1 \leftarrow 2L_1 + L_2 \\ 14Y = & -8ED + 2G + 4H \\ 7Z = & ED - 2G + H \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7X = & 2ED + 3G - H \qquad L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \\ 7Y = & -4ED + G + 2H \\ 7Z = & ED - 2G + H \end{cases}$$

Ainsi, $X = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 7 & 20 \\ 11 & -13 \end{pmatrix}$ ; $Y = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 0 & -40 \\ 27 & -2 \end{pmatrix}$ ; $Z = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} -2 & 10 \\ -16 & 9 \end{pmatrix}$. □

**Exercice 2.** 1. Supposons qu'il en existe deux. On aurait alors $M = aA+bB = a'A+b'B$ où $a, b, a', b'$ sont des éléments de $\mathbb{K}$.

On a alors

$$\begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'+b' & a' \\ b' & a'+b' \end{pmatrix}.$$

Les coefficients antidiagonaux entrainent directement $a = a'$ et $b = b'$.

Ainsi, si on peut écrire $M$ comme combinaison linéaire de $(A, B)$, elle est unique.

Autrement dit, en utilisant un vocabulaire que vous verrez plus tard, la famille $(A, B)$ est libre. □

2. Supposons qu'il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $M = aA + bB$.

C'est équivalent à

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a \\ b & a+b \end{pmatrix}.$$

Ce qui est équivalent au système

$$\begin{cases} a + b = & x \\ \quad a = & y \\ \quad b = & z \\ a + b & = t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = & x - y - z \qquad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 - L_3 \\ a = & y \\ b = & z \\ 0 = & -y - z + t \quad L_4 \leftarrow L_4 - L_2 - L_3 \end{cases}$$

Ainsi, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tel que $M = aA + bB$ si et seulement si

$$\begin{cases} x - y - z = & 0 \\ -y - z + t = & 0 \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} x = & y+z \\ t = & y+z \end{cases}$

Autrement dit, vous verrez ultérieurement qu'on vient de démontrer que
$\mathrm{Vect}(A,B) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) / x = t = y+z \right\}$. □

**Exercice 3.** C'est le classique !
On remarque que $A = -3I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a bien entendu $(-3I_3)N = -3N = N(-3I_3)$ donc on peut utiliser la formule du binôme.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3I_3)^{n-k} N^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} N^k$$

puisque $I_3^{n-k} = I_3$.
Par ailleurs, on remarque que $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.
Ainsi, $\forall k \geqslant 3$, $N^k = 0$ et on a tout simplement,

$$A^n = \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} N^k$$

en posant que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.
On a alors

$$A^n = (-3)^n I_3 + n(-3)^{n-1} N + \frac{n(n-1)}{2} (-3)^{n-2} N^2.$$

On peut factoriser par $(-3)^{n-2}$ pour alléger un peu l'écriture,

$$A^n = (-3)^{n-2} \left( 9I_3 - 3nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2 \right).$$

L'écriture matricielle est $A^n = \begin{pmatrix} (-3)^n & 2n(-3)^{n-1} & n(n-4)(-3)^{n-2} \\ 0 & (-3)^n & n(-3)^{n-1} \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}$.
Astuce : pour vous assurez que vous ne vous êtes pas trompés, il peut être habile de vérifier si pour $n = 0$ on trouve bien l'identité et pour $n = 1$ la matrice de départ. □

**Exercice 4.** 1. Comme l'exercice précédent, on remarque que $A = aI_2 + bN$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a bien entendu $(aI_2)(bN) = abN = (bN)(aI_2)$ donc on peut utiliser la formule du binôme.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (aI_2)^{n-k} (bN)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k$$

puisque $I_2^{n-k} = I_2$.

Par ailleurs, on remarque que $N^2 = 0$. Ainsi, $\forall k \geqslant 2$, $N^k = 0$.

On a tout simplement :

$$A^n = \sum_{k=0}^{1} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k N^k$$

en posant que $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$.

On a alors

$$A^n = a^n I_2 + na^{n-1}bN = a^{n-1}\left(aI_2 + nbN\right).$$

L'écriture matricielle est $A^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b \\ 0 & a^n \end{pmatrix}$. $\square$

2. On remarque que $A^2 = I_3$. Ainsi, si $n$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$, on a alors

$$A^n = A^{2k} = (A^2)^k = I_3^k = I_3.$$

Si $n$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$, donc

$$A^n = A^{2k+1} = A^{2k}A = I_3 A = A.$$

En résumé, si $n$ pair, $A^n = I_3$, sinon $A^n = A$. $\square$

3. Utilisons l'astuce suggérée. On a $A = (a - b)I_2 + bB$.

On a $[(a - b)I_2](bB) = b(a - b)B = (bB)(a - b)I_2$, donc on peut utiliser le binôme de Newton.

Ainsi, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} [(a - b)I_2]^{n-k}(bB)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k (a - b)^{n-k} B^k.$$

On se pose alors la question de savoir ce que vaut $B^k$.

On a $B^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2B$. Ainsi, on peut supposer que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = 2^{k-1}B$.

On le montre par récurrence en posant $\mathcal{P}(k) : B^k = 2^{k-1}B$.

Il est bien évident que $B^1 = 2^0 B$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

On a $B^{k+1} = B^k B$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $B^k = 2^{k-1}B$, ainsi

$$B^{k+1} = 2^{k-1}B^2 = 2^{k-1}2B = 2^k B$$

en se souvenant que $B^2 = 2B$.

Ainsi, $\mathcal{P}(k + 1)$ est vraie.

On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = 2^{k-1}B$.

Revenons-en à $A^n$. On a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} B^k = (a-b)^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} B^k.$$

On isole le terme en $k = 0$ parce que la formule sur $B^k$ n'est vraie que pour $k \geqslant 1$.
En utilisant ce que nous venons de démontrer, on a

$$A^n = (a-b)^n I_2 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} 2^{k-1} B.$$

En essayant de faire apparaitre une formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}
A^n = \quad & (a-b)^n I_2 + \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} b^k (a-b)^{n-k} 2^{k-1} \right) B \\
= \quad & (a-b)^n I_2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2b)^k (a-b)^{n-k} \right) B \\
= \quad & (a-b)^n I_2 + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2b)^k (a-b)^{n-k} - (a-b)^n \right) B \\
= \quad & (a-b)^n I_2 + \frac{1}{2} \left( (a+b)^n - (a-b)^n \right) B.
\end{aligned}$$

L'écriture matricielle est donc : $A^n = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} (a+b)^n + (a-b)^n & (a+b)^n - (a-b)^n \\ (a+b)^n - (a-b)^n & (a+b)^n + (a-b)^n \end{pmatrix}$.
□

**Exercice 5.** On peut tout à fait faire utiliser la formule du binôme en écrivant que $A = 3I_3 + B$, vérifier que les matrices commutent, calculer $B^k$ comme dans l'exercice précédent et faire à nouveau apparaitre une formule du binôme. Ou on peut faire une récurrence parce que l'énoncé a gentiment donné le résultat. Faisons la récurrence pour changer.
On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : A^n = \dfrac{3^{n-1}}{2}(3^n - 1)B + 3^n I_3$.
On a $A^0 = I_3$ et $\dfrac{3^{-1}}{2}(3^0 - 1)B + 3^0 I_3 = I_3$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a $A^{n+1} = AA^n$. Or en utilisant $\mathcal{P}(n)$ on a

$$\begin{aligned}
A^{n+1} = \quad & A \left( \frac{3^{n-1}}{2}(3^n - 1)B + 3^n I_3 \right) \\
= \quad & (B + 3I_3) \left( \frac{3^{n-1}}{2}(3^n - 1)B + 3^n I_3 \right) \\
= \quad & \frac{3^{n-1}}{2}(3^n - 1)B^2 + 3^n B + 3I_3 \frac{3^{n-1}}{2}(3^n - 1)B + 3^{n+1} I_3.
\end{aligned}$$

Or $B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = 6B$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= \frac{3^{n-1}}{2}(3^n-1)6B + 3^nB + \frac{3^n}{2}(3^n-1)B + 3^{n+1}I_3 \\
&= \left(6\frac{3^{n-1}}{2}(3^n-1) + 3^n + \frac{3^n}{2}(3^n-1)\right)B + 3^{n+1}I_3 \\
&= \left(3^n(3^n-1) + 3^n + \frac{3^n}{2}(3^n-1)\right)B + 3^{n+1}I_3 \\
&= 3^n\left(3^n - 1 + 1 + \frac{3^n-1}{2}\right)B + 3^{n+1}I_3 \\
&= 3^n\left(\frac{2\times 3^n + 3^n - 1}{2}\right)B + 3^{n+1}I_3 \\
&= 3^n\left(\frac{3\times 3^n - 1}{2}\right)B + 3^{n+1}I_3 \\
&= 3^n\left(\frac{3^{n+1}-1}{2}\right)B + 3^{n+1}I_3
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n) : A^n = \dfrac{3^{n-1}}{2}(3^n-1)B + 3^nI_3$.
L'autre solution est de voir que $A = B + 3I_3$ donc, comme $B(3I_3) = 3B = 3I_3B$, on peut appliquer la formule du binôme et remarquer que

$$A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B^k(3I_3)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}B^k.$$

Or on a $B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \\ 12 & 12 & 12 \end{pmatrix} = 6B$. Ainsi, on peut supposer que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = 6^{k-1}B$.
On le montre par récurrence en posant $\mathcal{P}(k) : B^k = 6^{k-1}B$.
Il est bien évident que $B^1 = 6^0B$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.
On a $B^{k+1} = B^kB$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $B^k = 6^{k-1}B$, ainsi

$$B^{k+1} = 6^{k-1}B^2 = 6^{k-1}6B = 6^kB$$

en se souvenant que $B^2 = 6B$.
Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = 6^{k-1}B$.
Revenons-en à $A^n$. On a

$$A^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}B^k = 3^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}B^k.$$

On isole le terme en $k=0$ parce que la formule sur $B^k$ n'est vraie que pour $k \geqslant 1$.
En utilisant ce que nous venons de démontrer, on a

$$A^n = 3^nI_3 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}6^{k-1}B.$$

En essayant de faire apparaitre une formule du binôme, on a

$$\begin{aligned}
A^n &= 3^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}3^{n-k}6^{k-1}\right)B\\
&= 3^n I_3 + \frac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}6^{k}3^{n-k}\right)B\\
&= 3^n I_3 + \frac{1}{6}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}6^{k}3^{n-k}-3^n\right)B\\
&= 3^n I_3 + \frac{1}{6}\left(9^n-3^n\right)B\\
&= 3^n I_3 + \frac{3^n}{6}\left(3^n-1\right)B\\
&= 3^n I_3 + \frac{3^{n-1}}{2}\left(3^n-1\right)B.
\end{aligned}$$

Ce type de matrice est croisé très régulièrement, et on a besoin de calculer sa puissance énième avec ou sans connaissance du résultat final. Il faut donc maitriser les deux méthodes. □

**Exercice 6.** 1. Non elle a deux colonnes identiques. □

2. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -a & a+1 & a+1 \\ a & -a & -a \end{pmatrix}$ et $A^3 = A$. □

3. Si $n$ est pair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.

   Montrons que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{2k} = A^2$.

   On le montre par récurrence en posant $\mathcal{P}(k)$ : $A^{2k} = A^2$.

   Il est bien évident que $A^{2\times 1} = A^2$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Soit $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

   On a $A^{2(k+1)} = A^{2k+2} = A^{2k}A^2$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $A^{2k} = A^2$, ainsi
   $$A^{2(k+1)} = A^2A^2 = A^3A = AA = A^2$$
   car on a vu que $A^3 = A$.

   Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

   On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{2k} = A^2$.

   Par ailleurs, si $n$ est impair, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.

   Ainsi, $A^n = A^{2k+1} = A^{2k}A = A^2A = A^3 = A$.

   En résumé, si $n$ est pair non nul, $A^n = A^2$ et si $n$ est impair, $A^n = A$. □

**Exercice 7** (Même genre que le précédent)**.** 1. Le système homogène associé est

   $\begin{cases} -5x+2y+2z &= 0 \\ -3x+y+z &= 0 \\ -9x+4y+4z &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x &= 0 & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ -3x+y+z &= 0 & \\ 3x &= 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 4L_2 \end{cases}$ qui est un système de rang 2 (puisque les premières et dernières lignes sont équivalentes). Ainsi, la matrice n'est pas inversible. □

2. On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ et $A^3 = A$. □

3. Il semblerait que, pour $A^4 = A^3A = A^2$ et $A^5 = A^4A = A^2A = A^3 = A$.

   On peut donc penser que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(k)$ : $A^{2k+1} = A$.

   Il est bien évident que $A^{2\times 0+1} = A$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

   On a $A^{2(k+1)+1} = A^{2k+3} = A^{2k+1}A^2$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $A^{2k+1} = A$, ainsi
$$A^{2(k+1)+1} = AA^2 = A^3 = A$$
   car on a vu que $A^3 = A$.

   Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

   On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^{2k+1} = A$.

   Par ailleurs, si $k \in \mathbb{N}^*$, on a $A^{2k} = A^{2k-1}A = AA = A^2$.

   Et pour finir, on a comme d'habitude, $A^0 = I_3$. □

**Exercice 8.** 1. $A^3 = -I_3$, ce qu'on peut réécrire en $A(-A^2) = I_3$. On a donc $A^{-1} = -A^2$. □

2. $A^3 = A$, donc si $A$ était inversible, en multipliant par $A^{-1}$, on aurait $A^{-1}A^3 = A^{-1}A$, ce qu'on écrit en $A^2 = I_3$. En calculant $A^3$, on a bien vu que $A^2 \neq I_3$, donc $A$ n'est pas inversible. □

3. $A^3 - 2A^2 - 5A + 10I_3 = 0$ ce qui est équivalent à $A\left(-\dfrac{1}{10}(A^2 - 2A - 5I_3)\right) = I_3$,donc $A^{-1} = -\dfrac{1}{10}(A^2 - 2A - 5I_3)$ □

4. En isolant le terme en $k = 0$, on a $\alpha_0 I_n + \sum_{i=1}^{d} \alpha_i A^i = 0$.

   Lorsque $\alpha_0 \neq 0$, c'est équivalent à
$$\left(-\frac{1}{\alpha_0}\sum_{i=1}^{d} \alpha_i A^{i-1}\right) A = I_n.$$
   Ou encore, en posant $k = i - 1$, à
$$\left(-\frac{1}{\alpha_0}\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_{k+1} A^{k}\right) A = I_n.$$
   Autrement dit, $A$ est inversible et on a $A^{-1} = -\dfrac{1}{\alpha_0}\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_{k+1}A^k$.

   Si on considère un polynôme qui le vérifie du plus petit degré possible (donc tel que tout polynôme de degré inférieur strictement n'annule pas $A$), on peut montrer que $A$ est inversible si et seulement si $\alpha_0 \neq 0$. □

**Exercice 9.** 1. a. Les techniques habituelles amènent à $P^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ □

b. En la calculant, on remarque qu'elle est diagonale : $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ □

c. On a $P^{-1}AP = D$, donc en multipliant à gauche par $P$ et à droite par $P^{-1}$, on a $PP^{-1}APP^{-1} = PDP^{-1}$, donc $A = PDP^{-1}$. $\square$

d. La question qui revient presque tous les ans.
Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $A^n = PD^nP^{-1}$ ».
Pour $n = 0$, on a $A^0 = I_3$ et $PD^0P^{-1} = PP^{-1} = I_3$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n \\ &= APD^nP^{-1} \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\ &= PDP^{-1}PD^nP^{-1} \text{ d'après la question précédente} \\ &= PDD^nP^{-1} \\ &= PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Ainsi, pour tout entier naturel $n$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. $\square$

2. a. Pas de secret, il faut poser proprement le calcul pour avoir :

$$A^n = \begin{pmatrix} -3+2^{-n+2} & 2-2^{-n+1} & 1-2^{-n} \\ -4+2^{-n+2} & 3-2^{-n+1} & 1-2^{-n} \\ -4+2^{-n+2} & 2-2^{-n+1} & 2-2^{-n} \end{pmatrix}$$

$\square$

b. Il est clair que $2^{-n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, car $-1 < \dfrac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

**Exercice 10.** Il n'y a pas de technique cachée non plus. On peut utiliser la formule quand on est dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ sinon, il faut passer par le système associé et le résoudre. On trouve les résultats suivants : $\square$

$A = \begin{pmatrix} 8 & \frac{5}{2} \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ $\square$

$B = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\square$

$C =$ Non inversible. $\square$

$D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ $\square$

$E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\square$

$F = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -10 & -2 & 8 \\ -5 & 8 & -2 \\ 0 & 6 & 6 \end{pmatrix}$ $\square$

$$G = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad \square$$

$$H = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & -5 & -1 \\ 1 & -5 & 1 \end{pmatrix} \quad \square$$

**Exercice 11.** 1. Attention à ne pas faire d'opération interdite !

On pose le système homogène associé :

$$\begin{cases} (3-\lambda)x - 2y + 2z = & 0 \\ 3x + (-2-\lambda)y + 3z = & 0 \\ 2x - 2y + (3-\lambda)z = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (3-\lambda)x - 2y + 2z = & 0 \\ (6 + (3-\lambda)(-2-\lambda))x + (2-2\lambda)z = & 0 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 + (-2-\lambda)L_1 \\ (-1+\lambda)x + (1-\lambda)z = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2y + 2z + (3-\lambda)x = & 0 \\ (1-\lambda)z + (-1+\lambda)x = & 0 \\ 2(1-\lambda)z + (-\lambda+\lambda^2)x = & 0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -2y + 2z + (3-\lambda)x = & 0 \\ (1-\lambda)z + (-1+\lambda)x = & 0 \\ (2 - 3\lambda + \lambda^2)x = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

Le système n'est pas de rang 3 lorsque $1-\lambda = 0$ ou $2 - 3\lambda + \lambda^2 = 0$ (dont les deux racines évidentes sont 1 et 2).

La matrice $A_\lambda$ n'est donc pas inversible lorsque $\lambda = 1$ ou $\lambda = 2$. $\square$

2. On pose le système homogène associé :

$$\begin{cases} (2-\lambda)x + y - 7z = & 0 \\ 2x + (3-\lambda)y - 8z = & 0 \\ 2x + 2y + (-7-\lambda)z = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} (2-\lambda)x + y - 7z = & 0 \\ (2 - (3-\lambda)(2-\lambda))x + (-8 + 7(3-\lambda))z = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - (3-\lambda)L_1 \\ (-2+2\lambda)x + (7-\lambda)z = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y + (2-\lambda)x - 7z = & 0 \\ 2(-1+\lambda)x + (7-\lambda)z = & 0 \\ (-4 + 5\lambda - \lambda^2)x + (13 - 7\lambda)z = & 0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \end{cases}$$

Or $-4 + 5\lambda - \lambda^2 = -(\lambda-1)(\lambda-4)$, donc le système est en fait

$$\iff \begin{cases} y + (2-\lambda)x - 7z = & 0 \\ 2(\lambda-1)x + (7-\lambda)z = & 0 \\ -(\lambda-1)(\lambda-4)x + (13-7\lambda)z = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y + (2-\lambda)x - 7z = & 0 \\ 2(\lambda-1)x + (7-\lambda)z = & 0 \\ [2(13-7\lambda) + (\lambda-4)(7-\lambda)]\, z = & 0 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + (\lambda-4)L_2 \end{cases}$$

Le système n'est pas de rang 3 lorsque $2(\lambda-1) = 0$ ou $2(13-7\lambda) + (\lambda-4)(7-\lambda) = 0$.

La première égalité donne $\lambda = 1$, la deuxième par contre est équivalente à

$$26 - 14\lambda - 28 + 11\lambda - \lambda^2 = 0 \iff -2 - 3\lambda - \lambda^2 = 0.$$

On reconnait $-1$ comme racine évidente, le produit des deux doit faire 2, donc l'autre est $-2$.

La matrice $B_\lambda$ n'est donc pas inversible lorsque $\lambda = -2, -1$ ou 1. $\square$

3. On pose le système homogène associé :

$$\left\{\begin{array}{rl} (2-\lambda)x - y + z = & 0 \\ -4x + (5-\lambda)y - 2z = & 0 \\ -6x + 6y + (-3-\lambda)z = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} (2-\lambda)x - y + z = & 0 & \\ -2\lambda x + (3-\lambda)y = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ (-6 + (3+\lambda)(2-\lambda))x + (3-\lambda)y = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + (3+\lambda)L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} z - y + (2-\lambda)x = & 0 \\ (3-\lambda)y - 2\lambda x = & 0 \\ (3-\lambda)y + (-\lambda - \lambda^2)x = & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} z + (2-\lambda)x - y = & 0 & \\ (3-\lambda)y - 2\lambda x = & 0 & \\ (\lambda - \lambda^2)x = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Le système n'est pas de rang 3 lorsque $3 - \lambda = 0$ ou $\lambda - \lambda^2 = 0$.

La première égalité donne $\lambda = 3$, dans la deuxième on reconnait 0 1 comme racines évidentes.

La matrice $C_\lambda$ n'est donc pas inversible lorsque $\lambda = 0, 1$ ou 3. $\square$

**Exercice 12.** 1. a. On a $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, donc

$$Tr(A+B) = \sum_{i=1}^{n}(a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} + \sum_{i=1}^{n} b_{ii}.$$

On a donc $Tr(A+B) = Tr(A) + Tr(B)$. $\square$

b. On a $\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, donc

$$Tr(\lambda A) = \sum_{i=1}^{n}(\lambda a_{ii}) = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

On a donc $Tr(\lambda A) = \lambda Tr(A)$. $\square$

2. On a $AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, donc

$$Tr(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}.$$

D'autre part, on a $BA = \left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, donc

$$Tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{ki} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

en échangeant les sommes. C'est exactement la même chose que ci-dessus sauf que le nom des indices a été échangé.

Ainsi, on a $Tr(AB) = Tr(BA)$. $\square$

3. Supposons qu'il existe un tel couple.

   On aurait alors $Tr(AB - BA) = Tr(I_n)$, or $Tr(I_n) = n$.

   Ainsi, on aurait $Tr(AB - BA) = n$.

   Or d'après la première question $Tr(AB - BA) = Tr(AB) + Tr(-BA)$.

   D'après la question d'après, on a $Tr(-BA) = -Tr(BA)$.

   Et d'après la dernière question, on a $Tr(BA) = Tr(AB)$.

   Ainsi, $Tr(AB - BA) = Tr(AB) - Tr(AB) = 0$.

   On aurait donc $0 = n$ ce qui est bien entendu exclu. Il ne peut donc pas exister de tel couple. □

**Exercice 13.** 1. a. On trouve $A = I + 2N$. □

b. Remarquons que $I$ et $N$ commutent. On peut donc utiliser la formule du binôme pour calculer $A^n$ avec $n \geqslant 1$. On a

$$A^n = (2N + I)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2N)^k I^{n-k}.$$

Remarquons de plus que $N^2 = 0$. Les seuls termes non nuls de cette somme sont donc obtenus pour $k = 0$ ou 1.

On trouve donc $A^n = I + 2nN$. Ce qu'on peut aussi écrire :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1+2n & 2n \\ -2n & 1-2n \end{pmatrix}.$$

Cette formule est encore vraie pour $n = 0$. □

2. a. On calcule $A^2$ puis on résout $A^2 = aA + bI$. On trouve très rapidement qu'on peut écrire $A^2 = 2A - I$. □

b. Supposons qu'on a à $n$ fixé $A^n = u_n A + v_n I$.

$$A^{n+1} = A.A^n = u_n A^2 + v_n A.$$

Cependant, $A^2 = 2A - I$, on a donc

$$A^{n+1} = (2u_n + v_n)A - u_n I.$$

On trouve donc $u_{n+1} = 2u_n + v_n$ et $v_{n+1} = -u_n$. □

c. On a $A^0 = I$ donc $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$. De plus $A = A$, donc $u_1 = 1$ et $v_1 = 0$ et nous venons de trouver les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} u_{n+1} = & 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = & -u_n \end{cases}$$

On a donc $u_{n+2} = 2u_{n+1} + v_{n+1} = 2u_{n+1} - u_n$. C'est une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On sait parfaitement exprimer $u_n$ en fonction de $n$. Commençons par résoudre l'équation caractéristique. Il s'agit de $X^2 = 2X - 1$ ou $X^2 - 2X + 1 = 0$, c'est-à-dire $(X - 1)^2 = 0$.

$u_n$ s'écrit donc $u_n = (\lambda n + \mu)1^n = \lambda n + \mu$.

Faire $n = 0$ donne

$$\mu = 0$$

et faire $n = 1$ donne

$$\lambda + \mu = 1.$$

On récupère donc $\lambda = 1$ et $\mu = 0$. On en déduit donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n.$$

Par ailleurs, comme $v_n = u_{n+1} - 2u_n$, on trouve $v_n = n + 1 - 2n$ et donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = -n + 1.$$

$\square$

d. On a donc $A^n = nA + (-n+1)I$ c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 2n+1 & 2n \\ -2n & -2n+1 \end{pmatrix}.$$

Cela correspond bien au résultat trouvé dans la première partie. $\square$

# 11 Suites réelles

**Exercice 1.** 1. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n$ existe et $u_n \geqslant 0$. » Comme $u_1 = 1$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a, d'après $\mathcal{P}(n)$, $u_n$ existe et $u_n \geqslant 0$, donc $u_n + 12 \geqslant 12$. On peut donc prendre la racine de ce terme, ce qui assure l'existence de $u_{n+1}$, et on a

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} \geqslant \sqrt{12} \geqslant 0$$

comme la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien définie et, si ça devient utile dans la suite, que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant 0$. $\square$

2. On a $u_1 = 1$, $u_2 = \sqrt{13}$ et $u_3 = \sqrt{12 + \sqrt{13}}$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ semble croissante. Démontrons-le par récurrence.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}'(n)$ : « $u_n \leqslant u_{n+1}$. »

Comme $u_1 = 1$ et $u_2 = \sqrt{13}$, $\mathcal{P}'(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}'(n)$ vraie.

On a, d'après $\mathcal{P}'(n)$, $u_n \leqslant u_{n+1}$, donc $u_n + 12 \leqslant u_{n+1} + 12$. Comme d'après la question précédente, $u_n \geqslant 0$, on peut appliquer la fonction racine carrée qui est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Ainsi, $\sqrt{u_n + 12} \leqslant \sqrt{u_{n+1} + 12}$ ce qui se traduit par $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.

On a donc démontré que $\mathcal{P}'(n+1)$ est vraie.

On vient de démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

$\square$

3. Et si on faisait une récurrence pour la troisième fois de l'exercice ?

On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}''(n)$ : « $0 < u_n < 4$. » Comme $u_1 = 1$, $\mathcal{P}''(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}''(n)$ vraie.

On a, d'après $\mathcal{P}''(n)$, $0 < u_n < 4$, donc $12 < u_n + 12 < 16$. On peut donc prendre la racine de ce terme (tout est positif), et on a

$$\sqrt{12} < u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12} < \sqrt{16} \geqslant 0$$

comme la fonction racine carrée est **strictement** croissante sur $\mathbb{R}$.

Comme $\sqrt{12} \geqslant 0$, $\mathcal{P}''(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 4$.

$\square$

4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée par 4 (évitez de dire bornée, ça laisse un doute sur la pertinence de votre argumentation) donc elle est convergente d'après le théorème des suites monotones.

   Notons $\ell$ sa limite. Comme, d'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 4$, on a

$$0 \leqslant \ell \leqslant 4.$$

   Or $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n + 12 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + 12$.

   Comme la fonction racine carrée est continue sur $\mathbb{R}_+$, elle l'est a fortiori en $12 + \ell$ donc

$$\sqrt{u_n + 12} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\ell + 12}.$$

   Ainsi, comme on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$, en passant à la limite dans cette relation, on obtient

$$\begin{aligned} & \ell = \sqrt{\ell + 12} \\ \Longrightarrow\quad & \ell^2 = \ell + 12 \\ \Longrightarrow\quad & \ell^2 - \ell - 12 = 0. \end{aligned}$$

   Or ce trinôme du second degré admet $-3$ et $4$ comme racines évidentes (si ce n'est pas le cas, déterminez-les comme vous le souhaitez). Ainsi, les seules limites possibles sont $-3$ et $4$. Mais on a vu que $0 \leqslant \ell \leqslant 4$, donc $\ell = 4$.

   On a donc démontré que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 4.$$

   $\square$

**Exercice 2.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = -e^{-u_n} < 0$. Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
Si la suite était convergente vers un réel $\ell$, on aurait $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et, par continuité de la fonction exponentielle, $u_n - e^{-u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - e^{-\ell}$.
On doit donc avoir $\ell = \ell - e^{-\ell}$ ce qui est équivalent à $e^{-\ell} = 0$. Or cette égalité est impossible, ce qui implique que la suite ne peut pas être convergente.
D'après le théorème de convergence des suites monotones, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et ne converge pas, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$. $\square$

**Exercice 3.** 1. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n$ existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 12$. » Comme $u_0 \in [0, 12]$, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a, d'après $\mathcal{P}(n)$, $u_n$ existe et $0 \leqslant u_n \leqslant 12$, donc $0 \geqslant -u_n- \geqslant -12$.. En ajoutant 12, on obtient $12 \geqslant 12 - u_n \geqslant 0$. On peut donc appliquer la fonction racine carrée et comme cette fonction est croissante, on obtient

$$\sqrt{12} \geqslant \sqrt{12 - u_n} \geqslant 0.$$

Ainsi on assure l'existence de $u_{n+1}$ et comme $\sqrt{12} \leqslant 12$, on a

$$12 \geqslant u_{n+1} \geqslant 0.$$

On a donc montré que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 12]$.
□

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $\ell$, alors, comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 12]$, on a $\ell \in [0, 12]$.

   Par ailleurs, on a immédiatement $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\sqrt{12 - u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{12 - \ell}$ par continuité de la fonction racine carrée.

   On a alors $\ell = \sqrt{12 - \ell}$, donc $\ell^2 = 12 - \ell$, soit $\ell^2 + \ell - 12 = 0$.

   On voit que cette équation admet deux solutions, 3 et $-4$, mais comme $\ell \in [0, 12]$, la seule limite possible est $\ell = 3$. □

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} |u_{n+1} - 3| = & \left|\sqrt{12 - u_n} - 3\right| \\ = & \left|\frac{(\sqrt{12 - u_n)} - 3)(\sqrt{12 - u_n} + 3)}{\sqrt{12 - u_n} + 3}\right| \\ = & \frac{|12 - u_n - 9|}{|\sqrt{12 - u_n} + 3|} \\ = & \frac{|3 - u_n|}{\sqrt{12 - u_n} + 3} \text{ car } \sqrt{12 - u_n} + 3 \geqslant 0 \\ = & \frac{|u_n - 3|}{\sqrt{12 - u_n} + 3}. \end{aligned}$$

   Or $\sqrt{12 - u_n} + 3 \geqslant 3$, donc $\dfrac{1}{\sqrt{12 - u_n} + 3} \leqslant \dfrac{1}{3}$, ainsi

$$|u_{n+1} - 3| = \frac{|u_n - 3|}{\sqrt{12 - u_n} + 3} \leqslant \frac{1}{3} |u_n - 3|.$$

   □

4. Notons pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $|u_n - 3| \leqslant \dfrac{1}{3^n} |u_0 - 3|$ ».

   Pour $n = 0$, on a d'un côté $|u_0 - 3|$ et de l'autre $\dfrac{1}{3^0} |u_0 - 3| = |u_0 - 3|$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a
$$|u_{n+1} - 3| \leqslant \frac{1}{3} |u_n - 3|.$$

   Or d'après $\mathcal{P}(n)$, $|u_n - 3| \leqslant \dfrac{1}{3^n} |u_0 - 3|$.

Ainsi,
$$|u_{n+1}-3| \leqslant \frac{1}{3}|u_n-3| \leqslant \frac{1}{3}\frac{1}{3^n}|u_0-3| = \frac{1}{3^{n+1}}|u_0-3|.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\ell| \leqslant \dfrac{1}{3^n}|u_0-\ell|$. □

5. On a $3^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, car $3>1$, donc $\dfrac{1}{3^n}|u_0-3| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

   Ainsi, par le théorème des gendarmes, $|u_n-3| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, autrement dit $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$. □

**Exercice 4.** 1. $f$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+; \quad f'(x) = \frac{2[3(x+1)]-3[2(x+5)]}{9(x+1)^2} = \frac{-24}{9(x+1)^2}.$$

Ainsi, il est clair que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) \leqslant 0$. Ainsi, $f$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs,
$$f(x) = \frac{2x+10}{3x+3} = \frac{2x}{3x}\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{2}{3}\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{1}{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{2}{3}.$$

Ainsi, $f$ est décroissante de $f(0) = \dfrac{10}{3}$ à $\dfrac{2}{3}$ en l'infini. □

2. On note, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n$ existe et $u_n \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right]$. » Comme $u_0 \in \mathbb{R}_+$, on peut appliquer $f$ et on a l'existence de $u_1$ et $u_1 = f(u_0) = f(0) = \dfrac{10}{3}$, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a, d'après $\mathcal{P}(n)$, $u_n$ existe et $u_n \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right] \subset \mathbb{R}_+$.

   Ainsi, peu appliquer $f$ à $u_n$, ce qui assure l'existence de $u_{n+1}$. De plus, la remarque sur la décroissance de $f$ permet d'assurer que comme $\dfrac{2}{3} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{10}{3}$, on a

$$\frac{10}{3} \geqslant f\left(\frac{2}{3}\right) \geqslant f(u_n) \geqslant f\left(\frac{10}{3}\right) \geqslant \frac{2}{3}.$$

   Ainsi, $u_{n+1} \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right]$.

   On a donc $\mathcal{P}(n+1)$ qui est vraie.

   On a donc démontré par récurrence que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right]$. □

3. Comme $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right]$, s'il existe une limite elle est forcément finie et, si on la note $\ell$, on a $\ell \in \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right]$.

   On a $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, ainsi que $2(u_n+5) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2(\ell+5)$, puis $3(u_n+1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3(\ell+1)$. Par quotient, comme $3(\ell+1) \neq 0$, on a

$$\frac{2(u_n+5)}{3(u_n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{2(\ell+5)}{3(\ell+1)}.$$

Ainsi, $\ell$ vérifie

$$\ell = \frac{2(\ell+5)}{3(\ell+1)},$$

donc

$$3\ell^2+\ell-10=0.$$

Cherchons le discriminant $\Delta = 1^2 - 4\times 3\times(-10) = 121$.

Il a donc deux racines $\dfrac{-1-11}{6} = -2$ et $\dfrac{-1+11}{6} = \dfrac{5}{3}$;

Comme $-2 \notin \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{10}{3}\right]$, la seule possibilité est $\ell = \dfrac{5}{3}$. $\square$

4. Soit $n\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
\left|u_{n+1}-\frac{5}{3}\right| &= \left|\frac{2(u_n+5)}{3(u_n+1)}-\frac{5}{3}\right| \\
&= \left|\frac{2u_n+10-5(u_n+1)}{3(u_n+1)}\right| \\
&= \left|\frac{-3u_n+5}{3u_n+3}\right| \\
&= \frac{|-3u_n+5|}{|3u_n+3|} \\
&= 3\frac{\left|u_n-\frac{5}{3}\right|}{|3u_n+3|}
\end{aligned}$$

Or on sait que $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $u_n \geqslant \frac{2}{3}$, donc $3u_n+3\geqslant 5$.

Ainsi, $\dfrac{1}{|3u_n+3|} = \dfrac{1}{3u_n+3} \leqslant \dfrac{1}{5}$.

On a donc,

$$\left|u_{n+1}-\frac{5}{3}\right| = 3\frac{\left|u_n-\frac{5}{3}\right|}{|3u_n+3|} \leqslant 3\frac{\left|u_n-\frac{5}{3}\right|}{5} = \frac{3}{5}\left|u_n-\frac{5}{3}\right|.$$

Ensuite, faisons une récurrence.

Notons pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ : « $\left|u_n-\dfrac{5}{3}\right| \leqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\left|u_1-\dfrac{5}{3}\right|$ ».

Pour $n=1$, on a d'un côté $\left|u_1-\dfrac{5}{3}\right|$ et de l'autre $\left(\dfrac{3}{5}\right)^0\left|u_1-\dfrac{5}{3}\right| = \left|u_1-\dfrac{5}{3}\right|$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a

$$\left|u_{n+1}-\frac{5}{3}\right| \leqslant \frac{3}{5}\left|u_n-\frac{5}{3}\right|.$$

Or d'après $\mathcal{P}(n)$, $\left|u_n-\dfrac{5}{3}\right| \leqslant \left(\dfrac{3}{5}\right)^{n-1}\left|u_1-\dfrac{5}{3}\right|$.

Ainsi,

$$\left|u_{n+1}-\frac{5}{3}\right| \leqslant \frac{3}{5}\left|u_n-\frac{5}{3}\right| \leqslant \frac{3}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}\left|u_1-\frac{5}{3}\right| = \left(\frac{3}{5}\right)^{n}\left|u_1-\frac{5}{3}\right|.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|u_n - \frac{5}{3}\right| \leqslant \left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \left|u_1 - \frac{5}{3}\right|$

Ensuite, on remarque que comme $-1 < \frac{3}{5} < 1$, on a $\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

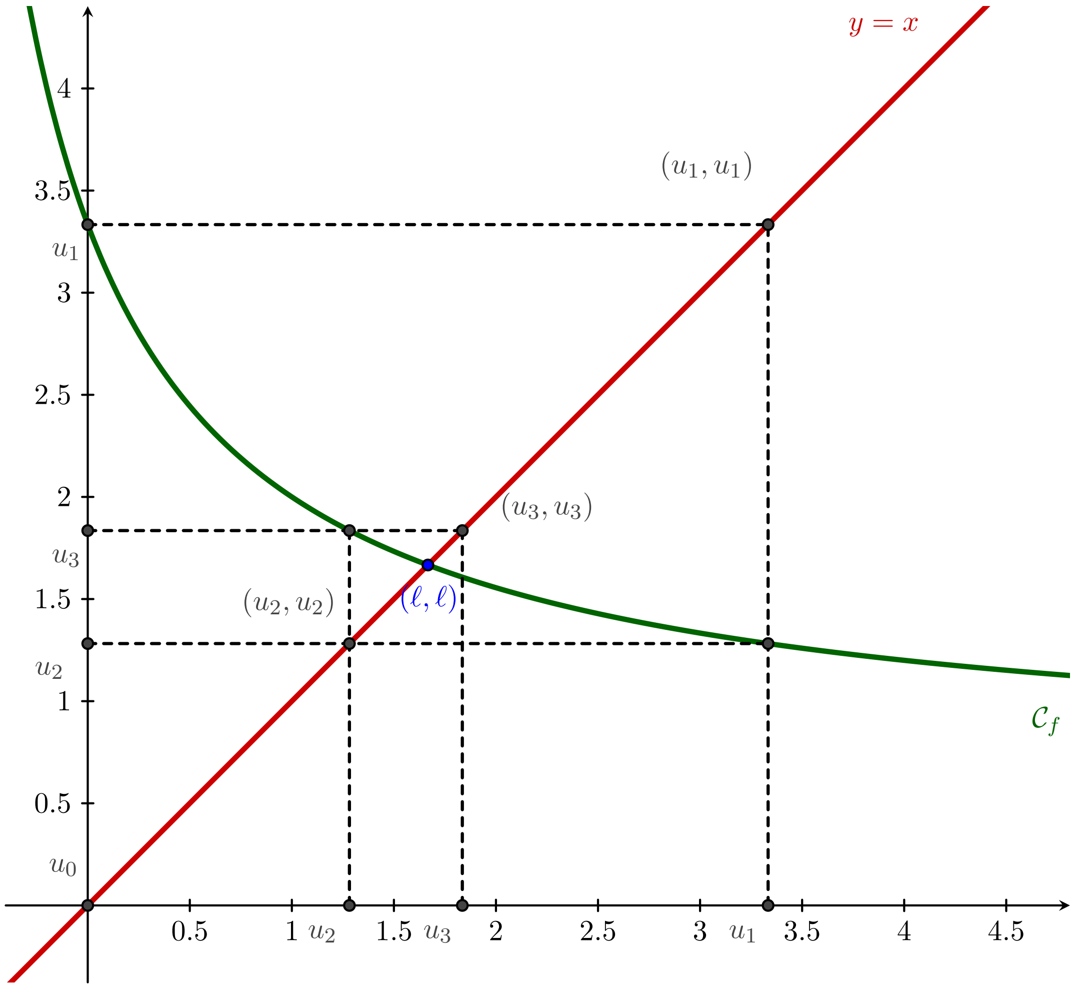
Donc d'après le théorème des gendarmes, $u_n - \frac{5}{3} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Autrement dit, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et on a

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{3}.$$

□

5. On trace sur un même graphe la fonction $f$, et la droite d'équation $y = x$. On place $u_0$ sur l'axe des abscisses, puis grâce au graphe de $f$ $u_1$ sur l'axe des ordonnées. On remarque que la droite horizontale passant par $(0, u_1)$ coupe la droite d'équation $y = x$ en $(u_1, u_1)$ ce qui permet de le reporter sur l'axe des abscisses... Et on recommence.

   La suite se rapproche du point d'intersection entre $f$ et la droite d'équation $y = x$, c'est-à-dire la solution de $f(\ell) = \ell$ que nous avons déterminé ci-dessus.




□

**Exercice 5.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leqslant 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et d'après les règles usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - u_n^2 = \ell - \ell^2$.
Ainsi, on a forcément $\ell = \ell - \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.
La seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.
Si $u_0 < 0$, la suite étant décroissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_0 < 0$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente sa limite serait inférieure ou égale à $u_0 < 0$ ce qui est exclu. Ainsi, si $u_0 < 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et ne converge pas, donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Si $u_0 > 1$, on a $u_1 = u_0 - u_0^2 = u_0(1-u_0) < 0$. Ainsi, le même raisonnement que ci-dessus mais appliqué à partir du rang $n = 1$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
Pour finir, étudions le cas où $u_0 \in [0, 1]$. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n \in [0, 1]$ ».
Il est évident que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors

$$u_{n+1} = u_n - u_n^2 = u_n(1 - u_n).$$

Or si $u_n \in [0, 1]$, $-1 \leqslant -u_n \leqslant 0$ donc $0 \leqslant 1 - u_n \leqslant 1$ puis, comme $u_n > 0$,

$$0 \leqslant u_n(1 - u_n) \leqslant u_n.$$

Et comme $u_n \leqslant 1$, en reconnaissant $u_{n+1}$, on a

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$.
On a donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par 0 donc convergente vers la seule limite possible, 0. □

**Exercice 6.** Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + u_n^2$, donc $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geqslant 0$. Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Supposons $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente et notons $\ell \in \mathbb{R}$ sa limite. On aurait alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et d'après les règles usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + u_n^2 = \ell + \ell^2$.
Ainsi, on a forcément $\ell = \ell + \ell^2 \iff \ell^2 = 0 \iff \ell = 0$.
La seule limite possible de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 0.
Si $u_0 > 0$, la suite étant croissante, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant u_0 > 0$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ était convergente sa limite serait supérieure ou égale à $u_0 > 0$ ce qui est exclu. Ainsi, si $u_0 > 0$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et ne converge pas, donc d'après le théorème de convergence des suites monotones, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Si $u_0 < -1$, on a $u_1 = u_0(1 + u_0) > 0$. Ainsi, le même raisonnement que ci-dessus mais appliqué à partir du rang $n = 1$ donne $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
Pour finir, étudions le cas où $u_0 \in [-1, 0]$. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n \in [-1, 0]$ ».
Il est évident que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. On a alors

$$u_{n+1} = u_n + u_n^2 = u_n(1 + u_n).$$

Or si $u_n \in [-1, 0]$, $0 \leqslant 1 + u_n \leqslant 1$ donc $u_n \leqslant u_n(1 + u_n) \leqslant 0$ car $u_n < 0$. Et comme $u_n \geqslant -1$, en reconnaissant $u_{n+1}$, on a

$$-1 \leqslant u_{n+1} \leqslant 0.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
On a donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [-1, 0]$.
On a donc une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante et majorée par 0 donc convergente vers la seule limite possible, 0. $\square$

**Exercice 7.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{u_n - v_n}{3}.$$

La suite $(u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

En particulier, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - v_n = \frac{1}{3^n}(u_0 - v_0)$.

Comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = 0$. $\square$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} + \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 3v_n}{3} = u_n + v_n.$$

On remarque ainsi que la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante. On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = u_0 + v_0$.

Par ailleurs, d'après la question précédente, on avait $u_n - v_n = \frac{1}{3^n}(u_0 - v_0)$.

Ainsi, en faisant la somme des deux, on récupère $2u_n = u_0 + v_0 + \frac{1}{3^n}(u_0 - v_0)$.

Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{u_0 + v_0}{2} + \frac{1}{3^n}\frac{u_0 - v_0}{2}.$$

En faisant la différence, on récupère $2v_n = u_0 + v_0 - \frac{1}{3^n}(u_0 - v_0)$. Autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_0 + v_0}{2} - \frac{1}{3^n}\frac{u_0 - v_0}{2}.$$

$\square$

3. On n'a aucune difficulté à conclure, comme dans la première question, que comme $-1 < \frac{1}{3} < 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{u_0 + v_0}{2}.$$

$\square$

**Exercice 8.** 1. On a $\frac{n}{n^3+1} = \frac{n}{n^3}\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}}$.

Or $\frac{1}{1+\frac{1}{n^3}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{n}{n^3+1} \sim \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$ .

De plus $\frac{1}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{n^3+1} = 0$. $\square$

2. On a $\frac{5n^2}{n^3} = \frac{5n^2}{n^3}\left(1 + \frac{1}{5n^2}\right)$.

Or $1 + \frac{1}{5n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\frac{5n^2}{n^3} \sim \frac{5n^2}{n^3} = \frac{5}{n}$ .

De plus $\frac{5}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5n^2+1}{n^3} = 0$. $\square$

3. On a $\dfrac{n^7+n^3+1}{n^6+n^2-12} = \dfrac{n^7}{n^6}\dfrac{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^7}}{1+\frac{1}{n^4}-\frac{12}{n^6}}$.

   Or $\frac{1+\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^7}}{1+\frac{1}{n^4}-\frac{12}{n^6}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{n^7+n^3+1}{n^6+n^2-12} \sim \dfrac{n^7}{n^6} = n$ .

   De plus $n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^7+n^3+1}{n^6+n^2-12} = +\infty$. □

4. On a $\dfrac{n^4+1}{3n^4+n^3+12n^2-72n+1} = \dfrac{n^4}{3n^4}\dfrac{1+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{3n}+\frac{4}{n^2}-\frac{24}{n^3}+\frac{1}{3n^4}}$.

   Or $\frac{1+\frac{1}{n^4}}{1+\frac{1}{3n}+\frac{4}{n^2}-\frac{24}{n}+\frac{1}{3n^4}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{n^4+1}{3n^4+n^3+12n^2-72n+1} \sim \dfrac{n^4}{3n^4} = \dfrac{1}{3}$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^4+1}{3n^4+n^3+12n^2-72n+1} = \dfrac{1}{3}$. □

5. On a $\dfrac{e^{-n}+n}{n^2} = \dfrac{n}{n^2}\left(1+\dfrac{e^{-n}}{n}\right)$.

   Or $1+\frac{e^{-n}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc $\dfrac{e^{-n}+n}{n^2} \sim \dfrac{n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$.

   De plus $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{-n}+n}{n^2} = 0$. □

6. On a $\dfrac{e^n+n}{n+\ln(n)} = \dfrac{e^n}{n}\dfrac{1+ne^{-n}}{1+\frac{\ln(n)}{n}}$.

   Or $\frac{1+ne^{-n}}{1+\frac{\ln(n)}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ par croissances comparées, donc $\dfrac{e^n+n}{n+\ln(n)} \sim \dfrac{e^n}{n}$.

   De plus, par croissances comparées, $\dfrac{e^n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^n+n}{n+\ln(n)} = +\infty$.
   □

**Exercice 9.** 1. On a $u_n = n^2\left(1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right) \sim n^2$. Ainsi,

$$\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

   Ainsi, elles ne sont pas équivalentes. □

2. On a $u_n = n^4\left(1-\dfrac{3}{n}-\dfrac{2}{n^3}+\dfrac{1}{n^4}\right) \sim n^4$.

   Par ailleurs, $v_n = n^4\left(1+\dfrac{1}{n^3}\right) \sim n^4$.

   Ainsi,
$$\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{n^4}{n^4} = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

   Ainsi, elles sont équivalentes. □

3. En accélérant un peu, on a $u_n \sim n^2$ et $v_n =\sim 2n^2$.

   Ainsi,
$$\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}.$$

   Ainsi, elles ne sont pas équivalentes. □

4. En accélérant toujours, on a $u_n \sim n^5$ et $v_n =\sim n^4$.

Ainsi,

$$\frac{u_n}{v_n} \sim \frac{n^5}{n^4} = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Ainsi, elles ne sont pas équivalentes. $\square$

**Exercice 10** (Constante d'Euler, un classique)**.** 1. Notons $h$ la fonction définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = x - \ln(1+x)$, bien définie et dérivable car sur cet intervalle $1+x > 0$, donc on compose des fonctions dérivables puis on fait une combinaison de fonctions dérivables.

On a $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $x$ puisque $1+x > 0$. Donc $h$ est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi $h$ est minimale en 0. Or $h(0) = 0$, donc $\forall x \in ]-1+\infty[$, $h(x) \geqslant 0$, ce qui est équivalent à

$$\forall x \in ]-1;+\infty[; \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

$\square$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = &\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ = &\ \frac{1}{n} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ = &\ \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ = &\ \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, en appliquant l'inégalité à $x = \dfrac{1}{n} > -1$, on a

$$\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n},$$

autrement dit $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est donc croissante.

Passons à l'autre suite. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = &\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ = &\ \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\ = &\ \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ = &\ \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \\ = &\ \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right) \\ = &\ \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Or d'après la question précédente, en appliquant l'inégalité à $x = -\dfrac{1}{n+1} > -1$, on a

$$\ln\left(1 - \frac{1}{1+n}\right) \leqslant -\frac{1}{n+1},$$

autrement dit $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) \leqslant 0$.

La suite $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est donc décroissante.

Pour finir, on a

$$\begin{aligned} u_n - v_n &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= -\frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi, il est clair que $u_n - v_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Les suites $(u_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_n)_{n \geqslant 2}$ sont donc adjacentes. □

3. Les suites $(u_n)_{n \geqslant 2}$ et $(v_n)_{n \geqslant 2}$ sont adjacentes donc elles convergent vers la même limite, que nous noterons $\gamma$ selon les requêtes. □

4. Remarquons que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = v_n + \ln(n)$.

   Ainsi, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n)\left(1 + \frac{v_n}{\ln(n)}\right)$.

   On a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} v_n = \gamma$ donc par quotient, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{\ln(n)} = 0$.

   Ainsi, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{v_n}{\ln(n)}\right) = 1$.

   On a donc

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n).$$

   □

5. En montrant que $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \gamma \leqslant v_n$ écrire une fonction **gamma(eps)** qui renvoie la valeur de $\gamma$ à **eps** près.

   On a $(u_n)_{n \geqslant 2}$ qui est croissante et converge vers $\gamma$ donc $\forall n \geqslant 2$, $u_n \leqslant \gamma$.

   De la même façon, comme $(v_n)_{n \geqslant 2}$ est décroissante et converge vers $\gamma$ donc $\forall n \geqslant 2$, $\gamma \leqslant v_n$. Ainsi, on a bien l'encadrement proposé.

   On a $v_n - u_n = \frac{1}{n}$. Lorsque $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$ on aura donc $u_n$ et $v_n$ qui seront à moins de $\varepsilon$ de $\gamma$. Ainsi, on peut écrire

```python
from math import log

def gamma(eps):
    n=1
    S=1
    while 1/n>=eps:
        n+=1
        S+=1/n
    return S-log(n)
```

A noter que, si vous souhaitez tester cette fonction, il ne faut pas être trop gourmand dans le choix de `eps`, beaucoup d'erreurs d'arrondi apparaissent dans ce calcul. □

**Exercice 11.** 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n = & \left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - 2\sqrt{n+2} - \left(\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - 2\sqrt{n+1}\right) \\
= & \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\
= & \frac{1 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} + 2(n+1)}{\sqrt{n+1}} \\
= & \frac{(2n+3) - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}} \\
= & \frac{[(2n+3) - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}][(2n+3) + 2\sqrt{(n+1)(n+2)}]}{\sqrt{n+1}[(2n+3) + 2\sqrt{(n+1)(n+2)}]} \\
= & \frac{(2n+3)^2 - 4(n+1)(n+2)}{\sqrt{n+1}[(2n+3) + 2\sqrt{(n+1)(n+2)}]} \\
= & \frac{1}{\sqrt{n+1}[(2n+3) + 2\sqrt{(n+1)(n+2)}]}
\end{aligned}$$

Ainsi, $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc croissante.

Maintenant, considérons

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n = & \left(\sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - 2\sqrt{n+1} - \left(\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - 2\sqrt{n}\right) \\
= & \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\
= & \frac{1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \\
= & \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}} \\
= & \frac{[2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)][2\sqrt{n(n+1)} + (2n+1)]}{\sqrt{n+1}[2\sqrt{n(n+1)} + (2n+1)]} \\
= & \frac{4n(n+1) - (2n+1)^2}{\sqrt{n+1}[2\sqrt{n(n+1)} + (2n+1)]} \\
= & \frac{-1}{\sqrt{n+1}[2\sqrt{n(n+1)} + (2n+1)]}
\end{aligned}$$

Ainsi, $v_{n+1} - v_n < 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.

Pour finir, considérons

$$\begin{aligned} v_n - u_n = & \left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - 2\sqrt{n} - \left(\left(\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}\right) - 2\sqrt{n+1}\right) \\ = & \ 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} \\ = & \ 2\frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ = & \ 2\frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ = & \ \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \end{aligned}$$

Ainsi, il est clair que $\lim_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Les deux suites sont donc adjacentes et convergent vers leur limite commune notée $\ell \in \mathbb{R}$. □

2. Remarquons que, puisque la $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc décroissante et que les deux tendent vers la même limite $\ell$, on a forcément, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n \leqslant \ell \leqslant v_n.$$

Autrement dit, en retranchant $u_n$ à chaque terme, on obtient

$$0 \leqslant \ell - u_n \leqslant v_n - u_n.$$

Or $\ell - u_n = |u_n - \ell|$ et $v_n - u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ d'après la question précédente.

Comme $\sqrt{n+1} \geqslant \sqrt{n}$, on a $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \geqslant 2\sqrt{n}$ donc en prenant l'inverse,

$$\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ainsi, on a $v_n - u_n = \dfrac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

On a donc, en reprenant notre encadrement

$$|u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

□

3.
```
from math import sqrt

def limite():
    n=1
    S=1
    while 1/sqrt(n)>=10**(-2):
        n+=1
        S+=1/sqrt(n)
    return S-2*sqrt(n+1)
```

On aurait aussi pu déterminer pour quel $n$ on a $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 10^{-2}$ (soit $n \geqslant 10^4$) et faire une boucle for :

```
from math import sqrt

def limite():
    S=0
    for n in range(1,10001):
        S+=1/sqrt(n)
    return S-2*sqrt(1,10001)
```

$\square$

4. On a, pour $n \geqslant 1$, $S_n = v_n + 2\sqrt{n} = 2\sqrt{n}\left(1 + \frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

   On a $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 0$.

   Ainsi, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 + \frac{v_n}{2\sqrt{n}} = 1$, donc $S_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. $\square$

**Exercice 12.** 1. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $a \leqslant u_n \leqslant b$ et $a \leqslant v_n \leqslant b$. ».

Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Cela implique que $2a \leqslant u_n + v_n \leqslant 2b$, donc $a \leqslant \frac{u_n + v_n}{2} \leqslant b$, soit $a \leqslant v_{n+1} \leqslant b$.

Par ailleurs, on a $a \leqslant u_n \leqslant b$, donc comme $a > 0$, $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant \frac{1}{a}$. De même, on a $\frac{1}{b} \leqslant \frac{1}{v_n} \leqslant \frac{1}{a}$.

Ainsi, en ajoutant ces deux inégalités on a

$$\frac{2}{b} \leqslant \frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n} \leqslant \frac{2}{a}.$$

Ce qui se traduit en

$$\frac{2}{b} \leqslant \frac{2}{u_{n+1}} \leqslant \frac{2}{a}.$$

En simplifiant par 2 et inversant (car $\frac{2}{b} > 0$), on a

$$b \geqslant u_{n+1} \geqslant a.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$ et $a \leqslant v_n \leqslant b$. $\square$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$u_{n+1} = 2\left(\frac{1}{\frac{1}{u_n} + \frac{1}{v_n}}\right)\frac{u_n v_n}{u_n v_n} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

$\square$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + v_n}{2} - \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \\
&= \frac{(u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2 - 4u_n v_n}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \geqslant 0$ car $u_n + v_n > 0$ d'après la question précédente. On peut le réécrire en $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n \geqslant 0$. Par ailleurs, c'est vrai pour $n = 0$ puisque $a \leqslant b$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

Revenons-en au calcul précédent. On a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} \\
&= \frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{v_n - u_n}{u_n + v_n}.
\end{aligned}$$

Or, comme $u_n \geqslant 0$, on a $\dfrac{v_n - u_n}{u_n + v_n} \leqslant \dfrac{v_n + u_n}{u_n + v_n} = 1$

Comme $v_n - u_n \geqslant 0$, on obtient $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$. $\square$

4. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$. ».

Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $v_n - u_n = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

D'après la question précédente, on a $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$. Or d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$.

Ainsi,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$. $\square$

5. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$. Comme $\dfrac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Par ailleurs, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = &= \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} - u_n \\ &= \frac{2u_n v_n - u_n(u_n + v_n)}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n v_n - u_n^2}{u_n + v_n} \\ &= \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}. \end{aligned}$$

Or comme $v_n - u_n \geqslant 0$, on a $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Ensuite, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = &\frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\ = &\frac{u_n - v_n}{2}. \end{aligned}$$

Or comme $u_n - v_n \leqslant 0$, on a $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et leur différence tend vers 0, donc ces deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc et tendent vers la même limite. □

**Exercice 13.** 1. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $a \leqslant u_n \leqslant b$ et $a \leqslant v_n \leqslant b$. ».

Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

Cela implique que $2a \leqslant u_n + v_n \leqslant 2b$, donc $a \leqslant \dfrac{u_n + v_n}{2} \leqslant b$, soit $a \leqslant v_{n+1} \leqslant b$.

Par ailleurs, on a $a \leqslant u_n \leqslant b$, donc comme $a > 0$, $v_n > 0$ donc

$$av_n \leqslant u_n v_n \leqslant bv_n.$$

Comme $v_n \geqslant a$, on a $av_n \geqslant a^2$ (car $a > 0$) et comme $v_n \leqslant b$ et $b > 0$, on a $bv_n \leqslant b^2$.

Ainsi, on a

$$a^2 \leqslant u_n v_n \leqslant b^2.$$

On peut appliquer la racine, croissante sur $\mathbb{R}_+$ et on obtient

$$\sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{u_n v_n} \leqslant \sqrt{b^2}.$$

Autrement dit, comme $a$ et $b$ sont positifs,

$$a \leqslant v_{n+1} \leqslant b.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a \leqslant u_n \leqslant b$ et $a \leqslant v_n \leqslant b$. □

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} = & \frac{u_n + v_n}{2} - \sqrt{u_n v_n} \\ = & \frac{u_n + v_n - 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n}}{2} \\ = & \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, il est clair que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \geqslant 0$. On peut le réécrire en $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - u_n \geqslant 0$. Par ailleurs, c'est vrai pour $n = 0$ puisque $a \leqslant b$.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.

Reprenons notre calcul :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} = & \frac{(\sqrt{u_n} - \sqrt{v_n})^2(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2}{2(\sqrt{u_n} + \sqrt{v_n})^2} \\ = & \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} + v_n)} \\ \leqslant & \frac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + v_n)} \text{ car } 2\sqrt{u_n}\sqrt{v_n} > 0 \\ \leqslant & \frac{1}{2}(v_n - u_n)\frac{v_n - u_n}{u_n + v_n}. \end{aligned}$$

Or, comme $u_n \geqslant 0$, on a $\dfrac{v_n - u_n}{u_n + v_n} \leqslant \dfrac{v_n + u_n}{u_n + v_n} = 1$

Comme $v_n - u_n \geqslant 0$, on obtient $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$. $\square$

3. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$. »

Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque $v_n - u_n = b - a = \dfrac{b-a}{2^0}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

D'après la question précédente, on a $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$. Or d'après $\mathcal{P}(n)$, on a $v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$.

Ainsi,

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leqslant \frac{1}{2}\frac{b-a}{2^n} = \frac{b-a}{2^{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \dfrac{b-a}{2^n}$. $\square$

4. On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{b-a}{2^n}$. Comme $\dfrac{b-a}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, on a par encadrement $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.

Par ailleurs, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = & = \sqrt{u_n v_n} - u_n \\ = & \sqrt{u_n}(\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n}). \end{aligned}$$

Or comme $v_n \geqslant u_n$, on a $\sqrt{v_n} \geqslant \sqrt{u_n}$ (la fonction racine est croissante) donc $\sqrt{v_n} - \sqrt{u_n} \geqslant 0$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.

Ensuite, on a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n = & \frac{u_n + v_n}{2} - v_n \\ = & \frac{u_n - v_n}{2}. \end{aligned}$$

Or comme $u_n - v_n \leqslant 0$, on a $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et leur différence tend vers 0, donc ces deux suites sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. □

**Exercice 14.** On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite obtenue en posant $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n}$

1. Notons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n$ existe et $1 \leqslant u_n$. »

   Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie au vu des données.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a $1 \leqslant u_n$, donc on peut prendre l'inverse (fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), et on obtient
   $$\frac{1}{u_n} \leqslant 1.$$
   En prenant l'opposé, on obtient
   $$-1 \leqslant -\frac{1}{u_n}.$$
   En ajoutant 2, on récupère
   $$1 \leqslant 2 - \frac{1}{u_n}.$$
   On obtient bien l'existence de $u_{n+1}$ ainsi que le fait que $1 \leqslant u_{n+1}$.

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant u_n$.

   □

2. On peut soit faire une récurrence (mais c'est lassant) ou considérer, pour $n \in \mathbb{N}$,

   $$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = & 2 - \frac{1}{u_n} - u_n \\ = & \frac{2u_n - 1 - u_n^2}{u_n} \\ = & \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n}. \end{aligned}$$

   Or comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, il est clair que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante. □

3. Il s'agit d'une suite décroissante, minorée donc c'est une suite convergente. De plus, comme elle est minorée par 1, il est clair que sa limite que nous noterons $\ell$ est telle que $1 \leqslant \ell \leqslant 2$.

   Ainsi, on a $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $2 - \dfrac{1}{u_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2 - \dfrac{1}{\ell}$.

   Ainsi, on a $\ell = 2 - \dfrac{1}{\ell}$, donc $\ell^2 = 2\ell - 1$, puis $\ell^2 - 2\ell + 1 = 0$ autrement dit $(\ell - 1)^2 = 0$.

   Ainsi, on a forcément $\ell = 1$. $\square$

4. En calculant les premiers termes, on peut conjecturer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

   Notons donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}'(n)$ : « $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$ ».

   On a $u_0 = 2$ et $\dfrac{0+2}{0+1} = 2$ donc $\mathcal{P}'(0)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a $u_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{u_n} = 2 - \dfrac{n+1}{n+2} = \dfrac{n+3}{n+2}$.

   Ainsi, $\mathcal{P}'(n+1)$ est vraie.

   Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{n+2}{n+1}$.

   Pour retrouver le sens de variation, on calcule, pour $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+3)(n+1) - (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} < 0.$$

   Ainsi, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

   Pour finir $u_n = \dfrac{n+2}{n+1} = \dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

   Je me permets de préciser que c'est parce que $u_0$ est bien choisi qu'on obtient facilement l'expression explicite de $u_n$ et donc qu'on retrouve très facilement les résultats des questions précédentes. $\square$

**Exercice 15.** 1. Notons donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n$ existe et $u_n \geqslant 1$. »

Il est clair que $\mathcal{P}(0)$ est vraie au vu des données.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $u_n \geqslant 1$, donc on peut prendre l'inverse qui reste tel que $\dfrac{1}{u_n} > 0$, donc $\dfrac{2}{u_n} > 0$.

Par ailleurs, comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a $u_n^2 \geqslant 1$.

Ainsi, $u_n^2 + \dfrac{2}{u_n} \geqslant 1$. On obtient bien l'existence de $u_{n+1}$ ainsi que le fait que $u_{n+1} \geqslant 1$.

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc démontré que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$.

$\square$

2. On considère, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n^2 + \frac{2}{u_n} - u_n \\ &= u_n(u_n - 1) + \frac{2}{u_n}. \end{aligned}$$

Comme $u_n \geqslant 1$, on a $u_n(u_n - 1) \geqslant 0$ et $\dfrac{2}{u_n} \geqslant 0$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, il est clair que $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. $\square$

3. Supposons que la suite converge vers une limite $\ell$. Alors comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$, on a forcément $\ell \geqslant 1$.

   Ainsi, on aurait $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $u_n^2 + \dfrac{2}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell^2 + \frac{2}{\ell}$..

   On a donc l'équation $\ell = \ell^2 + \frac{2}{\ell}$. Equation qui implique

$$\frac{\ell^3 - \ell^2 + 2}{\ell} = 0.$$

   On devrait donc avoir $\ell^3 - \ell^2 + 2 = 0$ ou encore $\ell^2(\ell - 1) + 2 = 0$ ce qui est impossible car $\ell^2(\ell - 1) \geqslant 0$ puisque $\ell \geqslant 1$.

   Remarquons qu'on aurait aussi pu factoriser la quantité, remarquer que $-1$ est racine évidente et donc que $\ell^3 - \ell^2 + 2 = (\ell + 1)(\ell^2 - 2\ell + 2)$. Ce trinôme du second degré n'ayant pas de racines réelles (son discriminant est strictement négatif), la seule limite envisageable est $-1$ qui est impossible puisque $\ell \geqslant 1$.

   Ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut pas être convergente. Comme elle est croissante, on a forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. $\square$

**Exercice 16.** 1. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n \in [0, 1]$. »

Vu l'énoncé, on a $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraies.

On a, comme la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$0 \leqslant u_n^3 \leqslant 1.$$

En ajoutant l'inégalité provenant de $\mathcal{P}(n+1)$,

$$0 \leqslant u_{n+1} + u_n^3 \leqslant 2.$$

En ajoutant 1 puis en multipliant par $\dfrac{1}{3}$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{3}(1 + u_{n+1} + u_n^3) \leqslant 1.$$

Soit $u_{n+2} \in [0, 1]$. Ainsi, $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0, 1]$. $\square$

2. On a $u_0 = 0$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $u_2 = \dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{1}{2} + 0^3\right) = \dfrac{1}{2}$. Un dernier calcul amène $u_3 = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}^3\right) = \frac{13}{24}$.

   Il semblerait que la suite soit croissante.

Notons $\mathcal{P}'(n)$ : « $u_n \leqslant u_{n+1}$. »

Vu l'énoncé et le calcul précédent, on a $\mathcal{P}'(0)$ et $\mathcal{P}'(1)$ vraies (et même $\mathcal{P}'(2)$, mais c'est inutile).

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}'(n)$ et $\mathcal{P}'(n+1)$ vraies.

On a, comme la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$ implique

$$u_n^3 \leqslant u_{n+1}^3$$

En ajoutant l'inégalité provenant de $\mathcal{P}(n+1)$,

$$u_{n+1} + u_n^3 \leqslant u_{n+2} + u_{n+1}^3.$$

En ajoutant 1 puis en multipliant par $\frac{1}{3}$, on a

$$\frac{1}{3}(1 + u_{n+1} + u_n^3) \leqslant \frac{1}{3}(1 + u_{n+2} + u_{n+1}^3).$$

Soit $u_{n+2} \leqslant u_{n+3}$. Ainsi, $\mathcal{P}'(n+2)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant u_{n+1}$. Autrement dit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. $\square$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par 1. Elle est donc convergente. Notons $\ell$ sa limite. On a $u_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\frac{1}{3}(1 + u_{n+1} + u_n^3) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}(1 + \ell + \ell^3)$.

On en déduit l'équation

$$\ell = \frac{1}{3}(1 + \ell + \ell^3).$$

$$\iff \ell^3 - 2\ell + 1 = 0.$$

On remarque que 1 est racine évidente de $\ell^3 - 2\ell + 1$. Donc il existe trois réels $a, b, c$ tels que

$$\ell^3 - 2\ell + 1 = (\ell - 1)(a\ell^2 + b\ell + c)$$

soit

$$\ell^3 - 2\ell + 1 = a\ell^3 + (b - a)\ell^2 + (c - b)\ell - c.$$

On en déduit le système

$$\begin{cases} a = & 1 \\ b - a = & 0 \\ c - b = & -2 \\ -c = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = & 1 \\ b = & 1 \\ -1 - 1 = & -2 \\ c = & -1 \end{cases}$$

On a donc

$$\ell^3 - 2\ell + 1 = (\ell - 1)(\ell^2 + \ell - 1).$$

Ainsi, on a

$$(\ell - 1)(\ell^2 + \ell - 1) = 0.$$

Cela revient à $\ell = 1$ ou $\ell^2 + \ell - 1$. Le discriminant de cette dernière équation est $\Delta = 5$.

On a donc trois possibilité pour $\ell$ : 1, $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ou $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Or, on a démontré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$, donc $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$ est impossible.

Il reste à trancher entre les deux, que nous noterons $\ell_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $\ell_2 = 1$ avec $\ell_1 < \ell_2$. D'après la valeur approchée qui nous est donnée, on peut remarquer que $u_0 < \ell_1$, $u_1 < \ell_1$ et $u_2 < \ell_1$.

Montrons alors que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell_1$.

Notons $\mathcal{P}''(n)$ : « $u_n \leqslant \ell_1$. »

Vu l'énoncé, on a $\mathcal{P}''(0)$ et $\mathcal{P}''(1)$ vraies.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}''(n)$ et $\mathcal{P}''(n+1)$ vraies.

On a, comme la fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$,

$$u_n^3 \leqslant \ell_1^3.$$

En ajoutant l'inégalité provenant de $\mathcal{P}''(n+1)$,

$$0u_{n+1} + u_n^3 \leqslant \ell_1 + \ell_1^3.$$

En ajoutant 1 puis en multipliant par $\dfrac{1}{3}$, on a

$$\frac{1}{3}(1 + u_{n+1} + u_n^3) \leqslant \frac{1}{3}(1 + \ell_1 + \ell_1^3).$$

Or $\dfrac{1}{3}(1 + \ell_1 + \ell_1^3) = \ell_1$ (c'est comme ça qu'on a trouvé $\ell_1$).

Ainsi, $u_{n+2} \leqslant \ell_1$. Ainsi, $\mathcal{P}''(n+2)$ est vraie.

On a donc montré par récurrence double que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell_1$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell_1 < \ell_2 = 1$, il est impossible que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell_2$. Elle converge vers $\ell_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

On a donc

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

□

**Exercice 17** (Pour s'entrainer à manipuler la définition de limite)**.** 1. Supposons $\ell \notin \mathbb{N}$.

En prenant $\varepsilon = \min(\ell - \lfloor \ell \rfloor, \lfloor \ell \rfloor + 1 - \ell)$, on remarque que, il existe un entier $n_0$ tel que, $\forall n \geqslant n_0$,

$$|u_n - \ell| < \varepsilon,$$

autrement dit

$$\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon.$$

Cependant, puisque $\varepsilon \leqslant \ell - \lfloor \ell \rfloor$, $\ell - \varepsilon \geqslant \lfloor \ell \rfloor$, et comme $\varepsilon \leqslant \lfloor \ell \rfloor + 1 - \ell$, on a

$$\lfloor \ell \rfloor < u_n < \lfloor \ell \rfloor + 1.$$

Or il est rigoureusement impossible d'avoir un entier compris strictement entre deux entiers successifs.

On a donc forcément $\ell \in \mathbb{N}$. □

2. On a désormais $\lim\limits_{p \to +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{N}$. D'après la définition de limite appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on récupère qu'il existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$,

$$|u_n - \ell| < \frac{1}{2},$$

autrement dit

$$\ell - \frac{1}{2} < u_n < \ell + \frac{1}{2}.$$

Or comme $u_n \in \mathbb{N}$, le seul entier possible est $u_n = \ell$. □

3. Nous venons de démontrer que toute suite d'entiers convergente est stationnaire à partir d'un certain rang. □

# 12 Polynômes

## 1. Factorisation de polynômes

**Exercice 1.** 1. Cette équation est équivalente à $x^2 - 4x - 12 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 64$.

Les deux racines sont $\frac{4-8}{2} = -2$ et $\frac{4+8}{2} = 6$. □

2. Cette équation est équivalente à $x^2 + (3 - \sqrt{3})x - 3\sqrt{3} = 0$.

Le discriminant vaut

$$\Delta = (3 - \sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times (-3\sqrt{3}) = 9 - 6\sqrt{3} + 3 + 12\sqrt{3}.$$

Soyons astucieux, on a

$$\Delta = 9 + 6\sqrt{3} + 3 = (3 + \sqrt{3})^2.$$

Ainsi, les deux racines sont $\frac{-3 + \sqrt{3} - (3 + \sqrt{3})}{2} = -3$ et $\frac{-3 + \sqrt{3} + (3 + \sqrt{3})}{2} = \sqrt{3}$.
□

3. Comme précédemment... On trouve $\frac{6 - \sqrt{29}}{7}$ et $\frac{6 + \sqrt{29}}{7}$. □

4. On peut être plus malin. L'équation est équivalente à

$$2x^2 + 7x - 9 = 0.$$

On remarque que 1 est racine évidente. Par ailleurs le produit des deux racines fait $-\frac{9}{2}$. Ainsi, la deuxième est forcément $-\frac{9}{2}$.

Les deux racines sont $-\frac{9}{2}$ et 1. □

5. Le discriminant de ce trinôme est $\Delta = [-(2 - m)]^2 - 4 = m^2 - 4m = m(m - 4)$.

Ainsi, il faut discuter selon la valeur de $m$.

- Si $m \in ]0, 4[$, il n'y a pas de solutions.
- Si $m = 0$, une seule solution 1 (c'est une identité remarquable).
- Si $m = 4$, une seule solution $-1$ (c'est aussi une identité remarquable).

- Si $m < 0$ ou $m > 4$ deux solutions, $\dfrac{2-m-\sqrt{m(m-4)}}{2}$ et $\dfrac{2-m+\sqrt{m(m-4)}}{2}$.

□

6. On peut faire un changement de variable, poser $X = x^2$... ou tout simplement remarquer que
$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2.$$
Ainsi,
$$x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \iff (x-1)^2(x+1)^2 = 0.$$
On a donc deux solutions, 1 et $-1$. □

**Exercice 2.** Comme souvent dans le cas d'exercices très calculatoires, je ne détaillerai que la rédaction de certains cas, pour les autres, je vous laisse la calquer sur ce que vous avez vu précédemment. □

1. On remarque que $P(2) = 0$. On ne trouve pas d'autres racines évidentes. On sait qu'il existe donc $a, b, c$ trois réels tels que $P = (X-2)(aX^2 + bX + c)$.

   Ainsi, on a $P = aX^3 + (b-2a)X^2 + (c-2b)X - 2c$.

   Par identification, on a le système :
$\begin{cases} a = & 1 \\ b-2a = & -2 \\ c-2b = & 1 \\ -2c = & -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = & 1 \\ b = & 0 \\ c = & 1 \\ 1 = & 1 \end{cases}$ On maintiendra bien les 4 équations jusqu'à vérification qu'elle soit vraie pour conserver l'équivalence et s'éviter de vérifier les solutions obtenues.

   Ainsi, on a $P = (X-2)(X^2+1)$.

   En fait, on aurait pu (dû ?) remarquer que $P = X^2(X-2) + (X-2)$ et factoriser directement...

   Si on veut factoriser sur $\mathbb{C}$, on remarque que
$$P = (X-2)(X^2 - i^2) = (X-2)(X-i)(X+i).$$

□

2. On remarque immédiatement que $P(1) = 0$. Par ailleurs, on a $P' = 4X^3 - 3X^2 - 1$, donc $P'(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine double de $P$, donc on sait qu'il existe un polynôme $Q$ de degré 2 tel que $P = (X-1)^2 Q$. Comme $Q$ est de degré 2, on sait qu'il va s'écrire $aX^2 + bX + c$ où $a, b$ et $c$ sont trois réels.

   On a donc $P = (X-1)^2(aX^2 + bX + c) = (X^2 - 2X + 1)(aX^2 + bX + c)$.

   En développant, on a
$$P = aX^4 + (b-2a)X^3 + (c-2b+a)X^2 + (-2c+b)X + c.$$

   Par identification, on a $\begin{cases} a = & 1 \\ b-2a = & -1 \\ a-2b+c = & 0 \\ b-2c = & -1 \\ c = & 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = & 1 \\ b = & 1 \\ c = & 1 \\ -1 = & -1 \\ 1 = & 1 \end{cases}$

   Ainsi, $P = (X-1)^2(X^2 + X + 1)$.

Factorisons $X^2 + X + 1$. Son discriminant est $\Delta = -3$. Ainsi, il ne peut pas être factorisé sur $\mathbb{R}$ mais il a deux racines complexes conjuguées $\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ et $\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{\frac{2i\pi}{3}}$

Ainsi, on a $P = (X - 1)^2(X - e^{\frac{2i\pi}{3}})(X - e^{-\frac{2i\pi}{3}})$.

Ou si on factorise sur $\mathbb{R}$, $P = (X - 1)^2(X^2 + X + 1)$.

D'autres solutions auraient pu être trouvées. Par exemple, on remarque que $P = X^3(X - 1) - (X - 1) = (X - 1)(X^3 - 1)$.

Et ensuite, on factorise $X^3 - 1$ en cherchant les racines complexes. □

3. On trouve deux racines évidentes, $-1$ et $2$.

   Ainsi, il existe $a, b$ tels que $P = (X + 1)(X - 2)(aX + b)$.

   En calculant $P(0)$, on trouve $-20 = -2b$ et en calculant $P(1)$, on trouve $-2(a + b) = -24$, ce qui nous permet de récupérer $b = 10$ puis $-2a = -4$ soit $a = 2$.

   Ainsi, on a $P = (2X + 10)(X + 1)(X - 2) = 2(X + 5)(X + 1)(X - 2)$. □

4. Remarquons que 1 est racine évidente. Par ailleurs, $P' = 6X^2 - 6X$, donc $P'(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine multiple de $P$.

   Comme $P$ est de degré 3, il existe $a, b$ deux réels tels que $P = (X - 1)^2(aX + b)$.

   On peut développer puis identifier ou tenter quelques valeurs. Par exemple, $P(0) = 1$, et $P(0) = b$, donc $b = 1$.

   Enfin, le terme dominant de $P$ est $2X^3$ et, en développant sa forme factorisée, il s'agit de $aX^3$, donc $a = 2$.

   Ainsi, $P = (2X + 1)(X - 1)^2$. □

5. Rappelons-nous que tous les coups sont permis. On trouve rapidement trois racines évidentes : $P(1) = P(-1) = P(2) = 0$.

   Cherchons si un de ces trois racines est double. On a $P' = 4X^3 - 3X^2 - 6X + 1$. Ainsi, $P(-1) = 0$. Donc $-1$ est racine double. On a trouvé 4 racines (comptées avec leur multiplicité) pour un polynôme de degré 4. Ainsi, $P = \alpha(X - 1)(X + 1)^2(X - 2)$. Or le coefficient dominant de $P$ est 1 et $\alpha$.

   Ainsi, $P = (X - 1)(X + 1)^2(X - 2)$ □

6. Remarquons que $P(-1) = 0$ et que $P' = 12X^3 + 3X^2 - 18X - 9$ avec $P'(-1) = 0$.

   Ainsi, $-1$ est racine multiple de $P$. Ainsi, il existe $a, b, c$ trois réels tels que

   $$P = (X + 1)^2(aX^2 + bX + c).$$

   En développant, on trouve

   $$P = (X^2 + 2X + 1)(aX^2 + bX + c) = aX^4 + (2a + b)X^3 + (a + 2b + c)X^2 + (b + 2c)X + c.$$

   Par identification, on a :

   $$\left\{\begin{array}{rl} a = & 3 \\ 2a + b = & 1 \\ a + 2b + c = & -9 \\ b + 2c = & -9 \\ c = & -2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} a = & 3 \\ b = & -5 \\ 3 - 10 - 2 = & -9 \\ -5 - 4 = & -9 \\ c = & -2 \end{array}\right.$$

Ainsi, $P = (X+1)^2(3X^2 - 5X - 2)$.

On peut remarquer que 2 est racine évidente de $3X^2 - 5X - 2$ et que comme le produit des racine fait $-\frac{2}{3}$ l'autre fait $-\frac{1}{3}$ (ou factoriser à l'aide du discriminant).

On a alors $3X^2 - 5X - 2 = 3(X-2)\left(X + \frac{1}{3}\right)$ sans oublier le coefficient dominant.

On encore $3X^2 - 5X - 2 = (X-2)(3X+1)$.

Ainsi, $P = (X+1)^2(X-2)(3X+1)$. $\square$

7. On remarque que $P(1) = P(-2) = 0$. Ainsi, il existe $a, b, c$ trois réels tels que

$$P = (X+2)(X-1)(aX^2 + bX + c).$$

En développant, on trouve

$$P = (X^2+X-2)(aX^2+bX+c) = aX^4+(a+b)X^3+(-2a+b+c)X^2+(-2b+c)X-2c.$$

Par identification, on a :

$$\left\{\begin{array}{rl} a = & 2 \\ a+b = & 21 \\ -2a+b+c = & 50 \\ -2b+c = & -3 \\ -2c = & -70 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} a = & 2 \\ b = & 19 \\ c = & 35 \\ -3 = & -3 \\ -70 = & -70 \end{array}\right.$$

Ainsi, on a $P = (X+2)(X-1)(2X^2 + 19X + 35)$.

Factorisons $2X^2+19X+35$. Son discriminant est $\Delta = 19^2 - 4\times 2\times 35 = 361 - 280 = 81$.

Ainsi, il a deux racines $\frac{-19-9}{4} = -7$ et $\frac{-19+9}{4} = -\frac{5}{2}$.

Ainsi, il se factorise en $2X^2 + 19X + 35 = 2(X+7)\left(X + \frac{5}{2}\right)$.

On a donc $P = 2(X+2)(X-1)(X+7)\left(X + \frac{5}{2}\right)$. $\square$

8. Remarquons que $P(1) = 0$, ainsi, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $P = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.

On a alors $P = aX^3 + (-a+b)X^2 + (-b+c)X - c$.

Par unicité de l'écriture développée réduite, on a le système $\left\{\begin{array}{rl} a = & 6 \\ -a+b = & -5 \\ -b+c = & -3 \\ -2b+c = & -3 \\ -c = & 2 \end{array}\right. \iff$

$$\left\{\begin{array}{rl} a = & 6 \\ b = & 1 \\ c = & -2 \\ -2 = & 2 \end{array}\right.$$

Ainsi, $P = (X-1)(6X^2 + X - 2)$.

Le discriminant de $6X^2 + X - 2$ est $\Delta = 1^2 - 4 \times 6 \times (-2) = 49$.

Ainsi, ce polynôme a deux racines $\frac{-1-7}{2\times 6} = \frac{-8}{12} = -\frac{2}{3}$ et $\frac{-1+7}{2\times 6} = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $6X^2 + X - 2 = 6\left(X + \frac{2}{3}\right)\left(X - \frac{1}{2}\right)$.

Merci de ne pas oublier le coefficient dominant, donc $P = 6(X-1)\left(X+\frac{2}{3}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)$.

En arrangeant un peu les choses pour éviter toute fraction, on peut conclure que

$$P = (X-1)(3X+2)(2X-1).$$

□

9. On trouve deux racines évidentes, 1 et 2. Ainsi, il existe $a, b, c$ trois réels tels que $P = (X-1)(X-2)(aX^2+bX+c)$.

   En développant, on a

   $$P = (X^2-3X+2)(aX^2+bX+c) = aX^4+(-3a+b)X^3+(2a-3b+c)X^2+(2b-3c)X+2c.$$

   Par identification, on a :

   $$\begin{cases} a = & 1 \\ -3a+b = & -4 \\ 2a-3b+c = & 4 \\ 2b-3c = & 1 \\ 2c = & -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = & 1 \\ b = & -1 \\ c = & -1 \\ 1 = & 1 \\ -2 = & -2 \end{cases}$$

   Ainsi, on a $P = (X-1)(X-2)(X^2-X-1)$. Puis on factorise le polynôme d'ordre 2 dont le discriminant est 5. On trouve alors

   $$P = (X-1)(X-2)\left(X-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(X-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).$$

   □

10. Remarquons déjà que $P = 3(X^4+X^3-X-1) = 3[(X+1)X^3-(X+1)] = 3(X+1)(X^3-1)$.

    En utilisant une identité remarquable, on a $P = 3(X+1)(X-1)(X^2+X+1)$. Puis on factorise le polynôme d'ordre 2 dont le discriminant est $-3$. On trouve alors

    $$P = 3(X+1)(X-1)(X^2+X+1) = 3(X-1)(X+1)(X-e^{\frac{2i\pi}{3}})(X-e^{-\frac{2i\pi}{3}}).$$

    Notons que l'on aurait pu passer par les complexes pour factoriser $X^3-1$, comme vous le verrez dans la question 11. □

11. Comme $P(-2) = 0$, il existe il existe $a, b, c$ trois réels tels que $P = (X+2)(aX^2+bX+c)$.

    En développant, on a

    $$P = aX^3+(2a+b)X^2+(2b+c)X+2c.$$

    Par identification, on a :

    $$\begin{cases} a = & 2 \\ 2a+b = & 6 \\ 2b+c = & 3 \\ 2c = & -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = & 2 \\ b = & 2 \\ c = & -1 \\ -2 = & -2 \end{cases}$$

    Ainsi, $P = (X+2)(2X^2+2X-1)$. Puis on factorise le polynôme d'ordre 2 dont le discriminant est 12. On trouve alors

$P = 2(X+2)\left(X - \dfrac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)\left(X - \dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)$. Ou encore

$$P = 2(X+2)\left(X + \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(X + \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right).$$

□

12. On trouve que 1 et 2 sont racines évidentes. Comme $P' = 3X^2 - 8X + 5$ et que $P'(1) = 0$, 1 est racine d'ordre multiple. Comme $\deg(P) = 3$ et que son coefficient dominant est 1, on ne peut qu'avoir

$$P = (X-1)^2(X-2).$$

□

13. On trouve que $-3, -1$ et 2 sont racines évidentes. Puis que 2 est racine double. Comme le coefficient dominant de $P$ est 2, on a

$$P = 2(X+3)(X+1)(X-2)^2.$$

□

14. On peut soit voir que 2 est racine évidente, et factoriser pour trouver : $P = (X-2)(X^2+2X+4) = (X-2)(X+1+i\sqrt{3})(X+1-i\sqrt{3})$.

   Sinon, on cherche les racines sous forme trigonométrique $\rho e^{i\theta}$. On trouve rapidement que $\rho^3 = 2^3$, donc $\rho = 2$ puisque $\rho > 0$.

   Ensuite, on a $3\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ce qui permet de trouver trois solutions

$$2, 2e^{\frac{2i\pi}{3}}, 2e^{\frac{4i\pi}{3}} = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$$

   ce qui donne la même factorisation que ci-dessus. □

15. C'est $\dfrac{1}{3}$ la racine évidente qui permet de faire comme ci-dessus (factorisation via discriminant ou complexes sous forme trigonométrique). On conclue par :

$$P = (3X-1)(9X^2+3X+1) = (3X-1)(X - \frac{-1-i\sqrt{3}}{6})(X - \frac{-1+i\sqrt{3}}{6}).$$

□

16. Comme $-1$ est racine évidente, on trouve rapidement que $P = (X+1)(mX^2 - mX + 1)$.

   Maintenant, il faut distinguer des cas :

   - Si $m = 0$, $P = X + 1$.
   - Si $m \neq 0$, on essaie de factoriser le polynôme $mX^2 - mX + 1$ dont le discriminant est $\Delta = m^2 - 4m = m(m-4)$.
     a. Si $m = 4$, on a une seule racine et on trouve $P = (X+1)(2X-1)^2$.
     b. Si $m \notin [0, 4]$, on prend le discriminant et on trouve

$$P = m(X+1)\left(X - \frac{m - \sqrt{m(m-4)}}{2m}\right)\left(X - \frac{m + \sqrt{m(m-4)}}{2m}\right).$$

c. Si $m \in ]0,4[$, on a deux racines complexes conjuguées, on ne peut pas factoriser outre mesure le polynôme. Vous verrez l'an prochain que

$$P = m(X+1)\left(X - \frac{m - i\sqrt{m(4-m)}}{2m}\right)\left(X - \frac{m + i\sqrt{m(4-m)}}{2m}\right).$$

$\square$

**Exercice 3.** Il suffit de faire le tableau de signe si on a la factorisation. Je vous les donne, les méthodes sont à s'inspirer par les exercices précédents. $\square$

1. Aucun piège, on obtient :

$$4X^2 + 33X - 27 = 4(X+9)(X - \frac{3}{4}).$$

   Un tableau de signe pour conclure (ou une jolie phrase). $\square$

2. Le discriminant de ce trinôme est

$$(4-\sqrt{2})^2 + 16\sqrt{2} = 16 - 8\sqrt{2} + 2 + 16\sqrt{2} = 16 + 8\sqrt{2} + 2 = (4+\sqrt{2})^2.$$

   Ainsi, on a
$$X^2 + (4-\sqrt{2})X - 4\sqrt{2} = (X+4)(X-\sqrt{2}).$$
   Un tableau de signe pour conclure (ou une jolie phrase). $\square$

3. On trouve que 1 est racine évidente d'ordre 2, puis que

$$X^3 + 2X^2 - 7X + 4 = (X+4)(X-1)^2.$$

   Ce polynôme est donc du signe de $X+4$. Doit-on aller plus loin pour conclure ? $\square$

**Exercice 4.** Pour toutes ces questions, on réfléchit à quel doit être le degré du polynôme recherché, on pose ses coefficients ($a$, $b$, $c$...), on élève au carré et on identifie. Si on y arrive, c'est bon. Sinon, c'est que ce n'était pas un carré. $\square$

1. On cherche $a, b, c$ tels que $P = (aX^2 + bX + c)^2 = a^2X^4 + 2abX^3 + (2ac + b^2)X^2 + 2bcX + c^2$.

   Ainsi, on doit avoir $\begin{cases} a^2 = & 1 \\ 2ab = & 4 \\ 2ac + b^2 = & 12 \\ 2bc = & 16 \\ c^2 = & 16 \end{cases}$.

   On doit avoir $a = 1$ ou $a = -1$. Si $a = 1$, alors on trouve $b = 2$, donc $c = 4$ et ainsi les deux équations suivantes sont vérifiées donc toutes le sont. Ainsi, on a

$$P = (X^2 + 2X + 4)^2.$$

   (Il est bien entendu qu'il y a deux solutions : n'oubliez pas l'opposé !). $\square$

2. La même technique amène à $Q = (X^2 + X + 1)^2$. $\square$

3. C'est encore plus long mais pas plus difficile de montrer que $R = (X^3 + X^2 + X + 1)^2$. $\square$

## 2. Exercices plus théoriques

**Exercice 5.** 1. On a $P(a) = a$, $P(b) = b$ et $P(c) = c$ et ainsi, on a $Q(a) = Q(b) = Q(c) = 0$. □

2. Remarquons que le degré de $Q$ est inférieur ou égal à 2 puisqu'il s'agit de la somme de 4 polynômes de degré inférieur ou égal à 2.

   Or $Q$ a trois racines distinctes, donc $Q$ est le polynôme nul, soit $P - X = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Ainsi, on a montré que $P = X$. □

3. Il suffit de prendre $R = \alpha\dfrac{(X-b)(X-c)}{(a-b)(a-c)} + \beta\dfrac{(X-a)(X-c)}{(b-a)(b-c)} + \gamma\dfrac{(X-a)(X-b)}{(c-a)(c-b)}$.

   Imaginons qu'il existe un second polynôme $S$ vérifiant les mêmes conditions. On aurait alors $\deg(R - S) \leqslant \max(\deg(R), \deg(S)) \leqslant 2$.

   Par ailleurs, $(R - S)(a) = (R - S)(b) = (R - S)(c) = 0$, donc le polynôme $R - S$ admettrait au moins trois racines alors que $\deg(R-S) \leqslant 2$. On a alors $R-S = 0_{\mathbb{K}[X]}$, donc $R = S$.

   Un seul polynôme vérifie ces conditions. □

**Exercice 6.** 1. On a $P_1 = X + 1$.

Ensuite, on a $P_2 = 1 + X + \dfrac{X(X+1)}{2}$. Ainsi $P_2 = \dfrac{(X+1)(X+2)}{2}$.

Pour finir, on a $P_3 = P_2 + \dfrac{X(X+1)(X+2)}{3!} = \dfrac{(X+1)(X+2)}{2} + \dfrac{X(X+1)(X+2)}{6}$.

Ainsi, on a $P_3 = \dfrac{(X+1)(X+2)(X+3)}{6}$. □

2. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « $P_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+k)$. »

   Il est clair que $\mathcal{P}(1)$ est vraie d'après la question précédente.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   Comme $P_{n+1} = P_n + \dfrac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X+i)}{(n+1)!}$.

   D'après $\mathcal{P}(n)$, on a

$$\begin{aligned} P_{n+1} &= \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}(X+k) + \frac{\displaystyle\prod_{i=0}^{n}(X+i)}{(n+1)!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\left((n+1)\prod_{k=1}^{n}(X+k) + \prod_{i=0}^{n}(X+i)\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n}(X+k)\left((n+1)+X\right) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\prod_{k=1}^{n+1}(X+k). \end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc montré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X+k)$. □

**Exercice 7.** 1. Notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ l'écriture développée réduite de $P$ ou $a_0, \dots, a_n$.

On a $P(-X) = \sum_{k=0}^n a_k(-X)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k X^k$.

Ainsi, $P(X) = P(-X)$ amène, par unicité de l'écriture développée réduite de $P$ : $\forall k \in [\![0, n \gg$, $(-1)^k a_k = a_k$.

Ainsi, lorsque $k$ est pair, l'équation est $a_k = a_k$ mais si $k$ est impair, c'est $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$.

Ainsi, les polynômes sont ceux dont tous les coefficients correspondants à des puissances impaires sont nuls. □

2. De la même façon, notons $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ l'écriture développée réduite de $P$ ou $a_0, \dots, a_n$.

   On a $P(-X) = \sum_{k=0}^n a_k(-X)^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k X^k$.

   Ainsi, $-P(X) = P(-X)$ amène, par unicité de l'écriture développée réduite de $P$ : $\forall k \in [\![0, n \gg$, $(-1)^k a_k = -a_k$.

   Ainsi, lorsque $k$ est impair, l'équation est $a_k = a_k$ mais si $k$ est pair, c'est $a_k = -a_k$ donc $a_k = 0$.

   Ainsi, les polynômes sont ceux dont tous les coefficients correspondants à des puissances paires sont nuls. □

3. Une récurrence immédiate montre que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(n) = P(0)$.

   Ainsi, le polynôme $Q = P - P(0)$ a une infinité de racines (tous les entiers), donc il est nul !

   Ainsi, on a $P = P(0)$, donc $P$ est constant. □

4. Remarquons que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $P(2k\pi) = P(0) = 0$. Donc $P$ a une infinité de racines, et ainsi seul le polynôme nul satisfait cette relation. □

**Exercice 8.** Supposons qu'il existe un tel réel $T$. Dans ce cas, une récurrence immédiate amène à, $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(nT) = P(0)$.
On pose alors $Q = P - P(0)$ et on remarque que $Q$ admet une infinité de racines (tous les $nT$, où $n \in \mathbb{N}$). Ainsi, $Q$ est le polynôme nul, puis $P = P(0)$ donc $P$ est constant. □

# 13 Probabilités

## 1. Avec du dénombrement

**Exercice 1.** 1. Si on tire deux boules simultanément, on modélise l'expérience en utilisant des combinaisons. Ainsi $\Omega$ sera l'ensemble des combinaisons à deux éléments de $[\![1, 9]\!]$ que l'on munira de la probabilité uniforme. Formellement, on peut écrire $\Omega = \{C \subset [\![1, 9]\!] / \operatorname{Card}(C) = 2\}$.

On a $\operatorname{Card}(\Omega) = \binom{9}{2} = 36$.

Ensuite, on note $A$ l'événement « obtenir deux boules de même parité ».

Ainsi, $A = \{C \subset \{1, 3, 5, 7, 9\} / \operatorname{Card}(C) = 2\} \cup \{C \subset \{2, 4, 6, 8\} / \operatorname{Card}(C) = 2\}$.

On aurait pu dire que $A$ est l'union disjointe des tirages où on pioche deux boules impaires et ceux où on pioche deux boules paires, soit l'ensemble des combinaisons à deux éléments prises dans $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ réuni avec l'ensemble des combinaisons à deux éléments prises dans $\{2, 4, 6, 8\}$.

Comme l'union est disjointe, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(\{C \subset \{1,3,5,7,9\}/\, \text{Card}(C) = 2\}) + \text{Card}(\{C \subset \{2,4,6,8\}/\, \text{Card}(C) = 2\})$.

Et donc $\text{Card}(A) = \binom{5}{2} + \binom{4}{2} = 10 + 6 = 16$.

Ainsi, $P(A) = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$. $\square$

2. Si on tire deux boules l'une après l'autre sans remise, on modélise l'expérience en listes sans répétition. Ainsi $\Omega$ sera l'ensemble des listes sans répétition à deux éléments de $[\![1,9]\!]$ que l'on munira de la probabilité uniforme. Formellement, on peut écrire $\Omega = \{(a,b) \in [\![1,9]\!]^2/a \neq b\}$.

   On a $\text{Card}(\Omega) = \binom{9}{7} = 9 \times 8 = 72$.

   Ensuite, on note $A$ l'événement « obtenir deux boules de même parité ».

   Ainsi, $A = \{(a,b) \in \{1,3,5,7,9\}^2/a \neq b\} \cup \{(a,b) \in \{2,4,6,8\}^2/a \neq b\}$.

   On aurait pu dire que $A$ est l'union disjointe des tirages où on pioche deux boules impaires et ceux où on pioche deux boules paires, soit l'ensemble des listes sans répétition à deux éléments prises dans $\{1,3,5,7,9\}$ réuni avec l'ensemble des listes sans répétition à deux éléments prises dans $\{2,4,6,8\}$.

   Comme l'union est disjointe, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(\{(a,b) \in \{1,3,5,7,9\}^2/a \neq b\}) + \text{Card}(\{(a,b) \in \{2,4,6,8\}^2/a \neq b\})$.

   Et donc $\text{Card}(A) = \frac{5!}{3!} + \frac{4!}{2!} = 20 + 12 = 32$.

   Ainsi, $P(A) = \frac{32}{72} = \frac{4}{9}$. $\square$

3. Si on tire deux boules l'une après l'autre avec remise, on modélise l'expérience en utilisant des listes. Ainsi $\Omega$ sera l'ensemble des listes à deux éléments de $[\![1,9]\!]$ que l'on munira de la probabilité uniforme. Formellement, on peut écrire $\Omega = [\![1,9]\!]^2$

   On a $\text{Card}(\Omega) = 9^2 = 81$.

   Ensuite, on note $A$ l'événement « obtenir deux boules de même parité ».

   Ainsi, $A = \{1,3,5,7,9\}^2 \cup \{2,4,6,8\}^2$.

   On aurait pu dire que $A$ est l'union disjointe des tirages où on pioche deux boules impaires et ceux où on pioche deux boules paires, soit l'ensemble des listes à deux éléments prises dans $\{1,3,5,7,9\}$ réuni avec l'ensemble des listes à deux éléments prises dans $\{2,4,6,8\}$.

   Comme l'union est disjointe, on a $\text{Card}(A) = \text{Card}(\{1,3,5,7,9\}^2) + \text{Card}(\{2,4,6,8\}^2)$.

   Et donc $\text{Card}(A) = 5^2 + 4^2 = 41$.

   Ainsi, $P(A) = \frac{41}{81}$. $\square$

4. Le tirage simultané ou sans remise ne change rien au niveau des probabilités.

   Le tirage avec remise donne une probabilité légèrement supérieure, ce qui était prévisible puisque la boule qu'on a obtenu au premier tirage peut-être à nouveau obtenue au second.

   Par ailleurs, les questions 2 et 3 auraient pu être traitées en utilisant une modélisation par événements élémentaires du type $A_1$ : « obtenir une boule paire au premier tirage » et $A_2$ : « obtenir une boule paire au second tirage ».

Ainsi, on cherchait à calculer $P((A_1 \cap A_2) \cup (\overline{A_1} \cap \overline{A_2})) = P(A_1 \cap A_2) + P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2})$ car les événements sont disjoints.

Ensuite, selon le cas, soit on utilise des probabilités conditionnelles (question 2), soit on invoque l'indépendance des événements (question 3). $\square$

**Exercice 2.** 1. On note dans tout l'exercice $\Omega = [\![1,6]\!]^2$ que nous munirons de la probabilité uniforme. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 6^2 = 36$.

On a $A = \{2,4,6\} \times [\![1,6]\!]$, donc $P(A) = \dfrac{3 \times 6}{6^2} = \dfrac{1}{2}$.

On a $B = [\![1,6]\!] \times \{1,3,5\}$, donc $P(B) = \dfrac{6 \times 3}{6^2} = \dfrac{1}{2}$.

Enfin, $C = \{1,3,5\}^2 \cup \{2,4,6\}^2$, ainsi $P(C) = P(\{1,3,5\}^2 \cup \{2,4,6\}^2)$. Par incompatibilité, on a

$$P(C) = P(\{1,3,5\}^2) + P(\{2,4,6\}^2) = \frac{3^2}{6^2} + \frac{3^2}{6^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}.$$

On a donc $A \cap B \cap C = \emptyset$, donc $P(A \cap B \cap C) = 0$. De plus, $P(A)P(B)P(C) = \dfrac{1}{8}$ $\square$

2. On $A \cap B = \{2,4,6\} \times \{1,3,5\}$, donc $P(A \cap B) = \dfrac{3^2}{6^2} = \dfrac{1}{4}$.

De plus, $P(A)P(B) = \dfrac{1}{4}$. $\square$

3. On a $A \cap C = \{2,4,6\}^2$, donc $P(A \cap C) = \dfrac{3^2}{6^2} = \dfrac{1}{4}$.

De plus, $P(A)P(C) = \dfrac{1}{4}$.

Encore une fois, $B \cap C = \{1,3,5\}^2$, donc $P(B \cap C) = \dfrac{3^2}{6^2} = \dfrac{1}{4}$.

De plus, $P(B)P(C) = \dfrac{1}{4}$. $\square$

4. Les événements $A, B$ et $C$ sont deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants. $\square$

**Exercice 3.** 1. Tant que nous faisons des tirages sans remises, nous prendrons $\Omega$ l'ensemble des 4-listes sans répétition de $[\![1,n]\!]$ que nous munirons de la probabilité uniforme. Notons déjà que $\mathrm{Card}(\Omega) = \dfrac{n!}{(n-4)!}$. Notons $A_k$ l'événement « le plus petit numéro tiré est $k$ ».

Ainsi, $A_1$ est l'ensemble des 4-listes sans répétition de $[\![1,n]\!]$ qui contiennent le numéro 1. Elles sont constituées par 1 et trois éléments de l'ensemble $[\![2,n]\!]$. Il y a $\dbinom{n-1}{3}$ façons de déterminer ces 3 éléments. Une fois le contenu du tirage fixé, il reste $4!$ façons d'organiser ces éléments. Ainsi, $\mathrm{Card}(A_1) = \dbinom{n-1}{3}4! = \dfrac{(n-1)!}{3!(n-4)!}4! = 4\dfrac{(n-1)!}{(n-4)!}$.

Ainsi

$$P(A_1) = \frac{4\frac{(n-1)!}{(n-4)!}}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{4}{n}.$$

$\square$

2. Remarquons que si $n \leqslant 4$, c'est impossible. Si $n \geqslant 5$, on a de la même façon $A_2$ est l'ensemble des 4-listes sans répétition de $[\![2, n]\!]$ qui contiennent le numéro 2. Elles sont constituées par 2 et trois éléments de l'ensemble $[\![3, n]\!]$. Il y a $\binom{n-2}{3}$ façons de déterminer ces 3 éléments. Une fois le contenu du tirage fixé, il reste 4! façons d'organiser ces éléments. Ainsi, $\mathrm{Card}(A_2) = \binom{n-2}{3} 4! = \frac{(n-2)!}{3!(n-5)!} 4! = 4\frac{(n-2)!}{(n-5)!}$.

   Ainsi
   $$P(A_2) = \frac{4\frac{(n-2)!}{(n-5)!}}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{4(n-4)}{n(n-1)}.$$
   Notons avec satisfaction que la probabilité est nulle si $n = 4$. □

3. On commence à comprendre, cette fois-ci, on remarque que si $k \geqslant n-2$, c'est impossible. Sinon, on a de la même façon $A_k$ est l'ensemble des 4-listes sans répétition de $[\![k, n]\!]$ qui contiennent le numéro $k$. Elles sont constituées par $k$ et trois éléments de l'ensemble $[\![k+1, n]\!]$. Il y a $\binom{n-k}{3}$ façons de déterminer ces 3 éléments. Une fois le contenu du tirage fixé, il reste 4! façons d'organiser ces éléments. Ainsi,
   $$\mathrm{Card}(A_k) = \binom{n-k}{3} 4! = \frac{(n-k)!}{3!(n-k-3)!} 4! = 4\frac{(n-k)!}{(n-k-3)!}.$$
   Ainsi
   $$P(A_k) = \frac{4\frac{(n-k)!}{(n-k-3)!}}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{4(n-k)!(n-4)!}{n!(n-k-3)!}.$$
   On remarque qu'on peut écrire :
   $$P(A_k) = \frac{4(n-k)(n-k-1)(n-k-2)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$
   On peut à cette occasion remarquer que si $k \geqslant n-2$, cette expression fait 0 donc reste valable. □

4. Notons $B_k$ l'événement « le plus grand numéro tiré est $k$ ».

   On doit avoir $k \geqslant 4$, sinon c'est impossible (donc la probabilité est nulle).

   Dans le cas où $k \geqslant 4$, on a $B_k$ est l'ensemble des 4-listes sans répétition de $[\![1, k]\!]$ qui contiennent le numéro $k$. Elles sont constituées par $k$ et trois éléments de l'ensemble $[\![1, k-1]\!]$. Il y a $\binom{k-1}{3}$ façons de déterminer ces 3 éléments. Une fois le contenu du tirage fixé, il reste 4! façons d'organiser ces éléments. Ainsi,
   $$\mathrm{Card}(B_k) = \binom{(k-1)}{3} 4! = \frac{(k-1)!}{3!(k-4)!} 4! = 4\frac{(k-1)!}{(k-4)!}.$$
   Ainsi,
   $$P(B_k) = \frac{4\frac{(k-1)!}{(k-4)!}}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \frac{4(k-1)!(n-4)!}{(k-4)!n!}.$$
   Cela se simplifie en
   $$P(B_k) = \frac{4(k-1)(k-2)(k-3)}{n(n-1)(n-2)(n-3)}.$$

On peut à cette occasion remarquer que le résultat reste valable si $k \geqslant 3$ : cette expression fait 0. $\dfrac{4(k-1)!(n-4)!}{n!(k-4)!}$. □

5. Dans ce cas, on prend $\Omega = [\![1,n]\!]^4$ que l'on munit de la probabilité uniforme. Une vraie difficulté apparait : le nombre de fois que le plus petit ou le plus grand des numéros apparait. Cela complique énormément les considérations précédentes et nous allons devoir trouver une façon de voir les choses bien plus efficace.

   On introduit $C_k$ l'événement « tous les numéros sont plus grands que $k$ ». Ainsi, $C_k = [\![k,n]\!]^4$.

   Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(C_k) = \dfrac{(n-k+1)^4}{n^4}$. Par convention, on prendra $C_{n+1} = \emptyset$ et $P(C_{n+1}) = 0$ ce qui est compatible avec la formule précédente.

   On remarque alors que $A_k = C_k \setminus C_{k+1}$, on a donc, comme $C_{k+1} \subset C_k$,

$$P(A_k) = P(C_k) - P(C_{k+1}) = \frac{(n-k+1)^4 - (n-k)^4}{n^4}.$$

   On introduit $D_k$ l'événement « tous les numéros sont plus petit que $k$ ». Ainsi, $D_k = [\![1,k]\!]^4$.

   Ainsi, pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $P(D_k) = \dfrac{k^4}{n^4}$. Par convention, on prendra $D_0 = \emptyset$ et $P(D_0) = 0$ ce qui est compatible avec la formule précédente.

   On remarque alors que $B_k = D_k \setminus D_{k-1}$, on a donc, comme $D_{k-1} \subset D_k$,

$$P(B_k) = P(D_k) - P(D_{k-1}) = \frac{k^4 - (k-1)^4}{n^4}.$$

   Remarquons que cette technique est effectivement plus efficace que la précédente puisqu'elle marche aussi bien dans le cas précédent que dans celui-ci.

   Par exemple, sans remise, on aurait eu $P(D_k) = \dfrac{\frac{k!}{(k-4)!}}{\frac{n!}{(n-4)!}} = \dfrac{\binom{k}{4}}{\binom{n}{4}}$, donc

$$P(B_k) = \frac{\binom{k}{4} - \binom{k-1}{4}}{\binom{n}{4}} = \frac{\binom{k-1}{3}}{\binom{n}{4}}$$

   la dernière égalité d'après la formule de Pascal. Si on ne fait pas apparaitre les coefficients binomiaux, il suffit de faire une réduction au même dénominateur pour obtenir le résultat. □

**Exercice 4.** 1. On modélisera l'urne par l'ensemble $[\![1,n]\!]$ et on supposera que les entiers de 1 à 10 représentent les boules rouges, les autres les blanches.

Ainsi, on prend $\Omega$ l'ensemble des combinaisons à 10 éléments pris parmi $[\![1,n]\!]$. On le munit de la probabilité uniforme.

Notons $A$ l'événement « quatre boules exactement sont rouges ». $A$ est l'ensemble des combinaisons qui s'écrivent $C \cup D$ où $C$ est une combinaison à 4 éléments de $[\![1,10]\!]$ et $D$ une combinaison à 6 éléments de $[\![11,n]\!]$. Ainsi, $\mathrm{Card}(A) = \dbinom{10}{4}\dbinom{n-10}{6}$. On peut donc dire que $p_n = P(A) = \dfrac{\binom{10}{4}\binom{n-10}{6}}{\binom{n}{10}}$.

Autrement dit,

$$p_n = \frac{(10!(n-10)!)^2}{4!6!^2(n-16)!n!}.$$

□

2. On peut programmer en Python la simulation du problème, puis essayer d'évaluer la probabilité de récupérer 4 boules en rouges en faisant un grand nombre de tirages et en regardant la fréquence où on obtient exactement 4 boules rouges. Enfin en tâtonnant, on peut essayer de trouver lorsqu'elle est maximale ou encore le faire proprement en lisant toutes les probabilités en partant de $n = 16$... et on regarde quand c'est maximum.

   Par exemple :

```
from random import random

def nbboulesblanchespiochees(n):
    X=0
    nbb=10
    for k in range(10):
        if random()<=nbb/(n-k):
            X+=1
            nbb-=1
    return X


def freq4(n,N):
    f=0
    for k in range(N):
        if nbboulesblanchespiochees(n)==4:
            f+=1
    return f/N

def listeprobas(maximum,N):
    liste=[0]*(maximum-15)
    for k in range(16,maximum+1):
        liste[k-16]=freq4(k,N)
    return liste

def maxiproba(maximum, N):
    liste=listeprobas(maximum,N)
    maxi=liste[0]
    pos=0
    for k in range(1,len(liste)):
        if liste[k]>maxi:
            maxi=liste[k]
            pos=k
    return pos+16
```

   Mathématiquement, on va étudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Comme il s'agit d'une suite strictement positive on va considérer le rapport $\frac{p_{n+1}}{p_n}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{p_{n+1}}{p_n} &= \frac{\frac{(10!(n-9)!)^2}{4!6!^2(n-15)!(n+1)!}}{\frac{(10!(n-10)!)^2}{4!6!^2(n-16)!n!}} \\
&= \frac{(10!(n-9)!)^2 4!6!^2(n-16)!n!}{4!6!^2(n-15)!(n+1)!(10!(n-10)!)^2} \\
&= \frac{(n-9)^2}{(n-15)(n+1)} \\
&= \frac{n^2-18n+81}{n^2-14n-15} \\
&= \frac{(n^2-14n-15)+(-4n+96)}{n^2-14n-15} \\
&= 1+4\frac{-n+24}{n^2-14n-15} \\
&= 1+4\frac{-n+24}{(n-15)(n+1)}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\frac{p_{n+1}}{p_n} \geqslant \iff -n+24 \geqslant 0 \iff n \leqslant 24$.

La suite est donc croissante jusqu'en $n = 24$, pour $n = 24$ et $n = 25$ elle vaut la même chose, puis elle est décroissante.

Ainsi, elle est maximale pour $n = 24$ ou 25 (c'est la même valeur).

Remarquons alors que pour $n = 25$, $\frac{4}{10} = \frac{10}{25}$, autrement dit, la probabilité est maximale lorsque la proportion de boules blanches dans l'urne est la même que la proportion de boules blanches dans les boules piochées. □

**Exercice 5.** 1. Notons $\Omega$ l'ensemble des répartitions. $\Omega = [\![1,3]\!]^5$ puisque le $i$ème terme de la liste d'un élément de $\Omega$ indique dans quelle urne on place la boule numéro $i$.

Ainsi, $\mathrm{Card}(\Omega) = 3^5$. □

2. Munissons $\Omega$ de la probabilité uniforme.

Notons $A$ l'événement évoqué. On a $A = \{(i,i,i,i,i)/i \in [\![1,3]\!]\}$.

Ainsi $P(A) = \frac{3}{3^5} = \frac{1}{3^4}$. □

3. On garde le même univers et la même probabilité. Notons $B$ cet événement.

On a $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ où $B_i$ est l'événement « l'urne $i$ » est la seule urne vide.

Ainsi, $B_1 = [\![2,3]\!]^5 \setminus \{(2,2,2,2,2),(3,3,3,3,3)\}$. On a ainsi, $\mathrm{Card}(B_1) = 2^5 - 2$. De la même façon, on a $\mathrm{Card}(B_2) = \mathrm{Card}(B_3) = 2^5 - 2$.

Par incompatibilité des événements, on a $\mathrm{Card}(B) = \mathrm{Card}(B_1)+\mathrm{Card}(B_2)+\mathrm{Card}(B_3) = 3(2^5-2)$.

Ainsi, $P(B) = \frac{3(2^5-2)}{3^5} = \frac{2^5-2}{3^4}$.

□

4. Notons $C$ cet événement. On a $C = A \cup B$.

Ainsi, $P(C) = P(A \cup B)$. Or comme $A \cap B = \emptyset$, on a

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{3}4 + \frac{2^5-2}{3^4} = \frac{2^5-1}{3^4}.$$

$\square$

5. On a $C = U_1 \cup U_2 \cup U_3$ où $U_i$ est l'événement « l'urne $i$ est vide.

   Ainsi,

   $$P(C) = P(U_1)+P(U_2)+P(U_3)-P(U_1 \cap U_2)-P(U_1 \cap U_3)-P(U_2 \cap U_3)+P(U_1 \cap U_2 \cap U_3).$$

   Or, par symétrie, on peut simplifier cette quantité en

   $$P(C) = 3P(U_1) - 3P(U_1 \cap U_2) + P(U_1 \cap U_2 \cap U_3).$$

   Or $U_1 = [\![2, 3]\!]^5$, donc $P(U_1) = \frac{2^5}{3^5}$.

   De plus $U_1 \cap U_2 = \{(3, 3, 3, 3, 3)\}$, donc $P(U_1 \cap U_2) = \frac{1}{3^5}$.

   Pour finir $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = \emptyset$, donc $P(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 0$.

   On peut donc en conclure que

   $$P(C) = 3\frac{2^5}{3^5} - 3\frac{1}{3^5} + 0 = \frac{2^5 - 1}{3^4}.$$

   $\square$

**Exercice 6** (Les allumettes de Banach)**.** 1. Considérons l'expérience aléatoire piocher dans la poche gauche ou la poche droite qui est répétée $2N-k$ fois (il a $2N$ allumettes et il en reste $k$). On se place donc dans $\Omega = \{g, d\}^{2N-k}$ avec la probabilité uniforme. On a $\mathrm{Card}(\Omega) = 2^{2N-k}$.

Considérons l'événement $G$ : « il finit le paquet gauche et il reste $k$ allumettes dans le paquet droit ».

Les éléments de $G$ sont les listes contenant $N$ éléments $g$ et $N-k$ éléments $d$ dont le dernier élément est $g$. Ainsi, il y en a autant que de façons de choisir les $N-1$ positions des éléments $g$ dans les $2N-k-1$ premières positions.

Ainsi, $P(G) = \frac{\binom{2N-k-1}{N-1}}{2^{2N-k}}$. On trouve la même chose pour la poche droite. Les deux événements sont incompatibles et leur réunion forme l'événement que l'on cherche, donc la probabilité recherchée vaut $2\frac{\binom{2N-k-1}{N-1}}{2^{2N-k}} = \frac{\binom{2N-k-1}{N-1}}{2^{2N-k-1}}$. $\square$

2. Cette fois-ci il a en réalité pioché $N+1$ allumettes (donc une de trop lorsqu'il se rend compte que le paquet est vide) ainsi, cela revient au même que la question précédente sauf qu'il faut considérer qu'une des poches contient $N+1$ allumettes. Ainsi, la probabilité recherchée vaut $\frac{\binom{2N-k}{N}}{2^{2N-k}}$. $\square$

**Exercice 7.** 1. Par indépendance des manches, si l'ordre des $n$ victoires et $n$ défaites est fixé, alors la probabilité que cela se réalise est $p^n q^n$. De plus, il y a $\binom{2n}{n}$ façons de fixer la position des $n$ victoires parmi les $2n$ manches. Ainsi, la probabilité de faire une partie nulle est $\binom{2n}{n} p^n q^n$. $\square$

2. Notons $A_k$ l'événement « $A$ gagne exactement $k$ manches ».

De la même façon, par indépendance des manches, si l'ordre des $k$ victoires et $2n-k$ défaites est fixé, alors la probabilité que cela se réalise est $p^k q^{2n-k}$. De plus, il y a $\binom{2n}{k}$ façons de fixer la position des $n$ victoires parmi les $2n$ manches. Ainsi, $P(A_k) = \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k}$.

Enfin, sinon note $G$ l'événement $A$ gagne, alors $G = \bigcup_{k=n+1}^{2n} A_k$ donc

$$P(G) = P\left(\bigcup_{k=n+1}^{2n} A_k\right).$$

Par incompatibilité des événements, on a

$$P(G) = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k}.$$

$\square$

3. En inversant $p$ et $q$, on trouve immédiatement que la probabilité que $B$ gagne (notons cet événement $H$) est $P(H) = \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} p^{2n-k} q^k$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} P(G) - P(H) &= \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} p^{2n-k} q^k \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} (p^k q^{2n-k} - p^{2n-k} q^k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k} (1 - p^{2n-2k} q^{2k-2n}) \\ &= \sum_{k=n+1}^{2n} \binom{2n}{k} p^k q^{2n-k} \left(1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{2(k-n)}\right). \end{aligned}$$

Or, si $p > \frac{1}{2}$ alors $q < \frac{1}{2} < p$, donc $\frac{q}{p} < 1$ donc $1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{2(k-n)} > 0$ Ainsi, on n'ajoute que des termes strictement positifs, donc $P(G) - P(H) > 0$.

Mais si $p \leqslant \frac{1}{2}$ alors $q \leqslant \frac{1}{2} \leqslant p$, donc $\frac{q}{p} \geqslant 1$ donc $1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{2(k-n)} \leqslant 0$ Ainsi, on n'ajoute que des termes négatifs, donc $P(G) - P(H) \leqslant 0$.

On a donc $p > \frac{1}{2}$ si et seulement si la probabilité que $A$ gagne est strictement supérieure à celle que $B$ gagne. $\square$

**Exercice 8.** 1. a. Supposons que les poissons sont animaux de 1 à $N$ et que les animaux marqués sont numérotés de 1 à $a$. Ainsi, l'ensemble des échantillons possibles est l'ensemble des combinaisons à $n$ éléments pris dans $[\![1, N]\!]$. Il y en a $\binom{N}{n}$. $\square$

b. Il s'agit des combinaisons qui s'écrivent $A \cap B$ où $A$ est une combinaison de $k$ éléments de $[\![1, a]\!]$ et $B$ est une combinaison d'éléments de $n-k$ éléments de $[\![a+1, N]\!]$. Ainsi, il y en a $\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}$. $\square$

c. Si on munit $\Omega$ de la probabilité uniforme, on a $\dfrac{\binom{a}{k}\binom{N-a}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

On peut écrire

$$p(N) = \frac{a!}{k!(a-k)!}\frac{(N-a)!}{(n-k)!(N+k-a-n)!}\frac{n!(N-n)!}{N!}.$$

□

2. a. Il suffit de poser le calcul,

$$\begin{aligned} q(N) = & \frac{a!}{k!(a-k)!}\frac{(N-a)!}{(n-k)!(N+k-a-n)!}\frac{n!(N-n)!}{N!} \\ & \frac{k!(a-k)!}{a!}\frac{(n-k)!(N+k-a-n-1)!}{(N-1-a)!}\frac{(N-1)!}{n!(N-n-1)!} \\ = & \frac{(N-a)(N-n)}{(N+k-a-n)N}. \end{aligned}$$

□

b. On a

$$\begin{aligned} q(N)-1 = & \frac{(N-a)(N-n)-(N+k-a-n)N}{(N+k-a-n)N} \\ = & \frac{N^2-(a+n)N+an-(N^2+(k-a-n)N)}{(N+k-a-n)N} \\ = & \frac{(n+a-k-a-n)N+an}{(N+k-a-n)N} \\ = & \frac{-kN+an}{(N+k-a-n)N}. \end{aligned}$$

Cette quantité est strictement négative si et seulement si $N > \dfrac{an}{k}$. □

c. $q(N)-1<0 \iff p(N) < P(N-1)$, donc la suite $(p(N))_{N\geqslant a+n}$ est croissante puis strictement décroissante à partir du moment où $N > \dfrac{an}{k}$. Ainsi, on peut prendre $N_0 = \lfloor \dfrac{an}{k} \rfloor$ pour avoir son maximum. Attention, si par hasard $\dfrac{an}{k}$ est un entier, il y a $N_0$ et $N_0+1$ qui fonctionnent. □

3. Dans ce cas, $N_0 = \lfloor \dfrac{200\times 150}{15} \rfloor = 2000$. □

**Exercice 9.** 1. Toute la difficulté est de bien modéliser le problème.

On va dire que le placard est un ensemble $E = \{g_i, d_i / i \in [\![1, 10]\!]$ où $g_i$ représente la chaussure gauche numéro $i$ et $d_i$ la droite.

Ensuite, on va noter $\Omega$ l'ensemble des combinaisons à 4 éléments de $E$. Ainsi $\mathrm{Card}(\Omega) = \begin{pmatrix}20\\4\end{pmatrix} = \dfrac{20\times 19\times 18\times 17}{4\times 3\times 2} = 5\times 19\times 3\times 17 = 4845$.

On munit $\Omega$ de la probabilité uniforme.

Notons $A$ l'événement « obtenir deux paires de chaussures ».

Ainsi, $A = \{\{g_i, d_i, g_j, d_j\} / \text{ où } \{i,j\} \text{ est une combinaison à deux éléments de } [\![1,10]\!]\}$.

Ainsi, $\mathrm{Card}(A) = \begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix} = 5\times 9 = 45$.

On a donc $P(A) = \dfrac{5\times 9}{5\times 19\times \times 3\times 17} = \dfrac{3}{19\times 17} = \dfrac{3}{323}$. □

2. Notons $B$ cet événement. Il est plus facile de remarquer que $\overline{B}$ est l'événement « n'avoir que des chaussures isolées. ». Il y a $\binom{10}{4}$ façons de choisir les 4 paires de chaussures différentes et il y a deux possibilités par chaussures. On aurait pu écrire formellement

   $B = \{\{a_i, b_j, c_k, d_\ell\}/(a, b, c, d) \in \{g, d\}^2, \{i, j, k, \ell\}$ combinaison à 4 éléments de $[\![1, 10]\!]\}$.

   Ainsi,
$$\mathrm{Card}(B) = \binom{10}{4} 2^4 = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 2^4}{4 \times 3 \times 2} = 10 \times 3 \times 7 \times 2^4.$$
   On aurait pu écrire formellement

   $B = \{\{a_i, b_j, c_k, d_\ell\}/(a, b, c, d) \in \{g, d\}^2, \{i, j, k, \ell\}$ combinaison à 4 éléments de $[\![1, 10]\!]\}$.

   Enfin,
$$P(\overline{B}) = \frac{10 \times 3 \times 7 \times 2^4}{5 \times 19 \times 3 \times 17} = \frac{32 \times 7}{323} = \frac{224}{323}.$$
   On a donc $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = \frac{99}{323}$. □

3. Notons $C$ cet événement. On remarque que $C$ est exactement $B \setminus A$ avec $A \subset B$, donc
$$P(C) = P(B \setminus A) = P(B) - P(A) = \frac{99}{323} - \frac{3}{323} = \frac{96}{323}.$$
   □

## 2. Sans dénombrement

**Exercice 10.** Notons $A$ l'événement « $A$ atteint la cible » et $B$ l'événement « $B$ atteint la cible ».
On a $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$.
Par ailleurs,
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
De plus, on sait que $A$ et $B$ sont indépendants, donc
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$
Enfin, on sait que $P(B) = \frac{1}{2}P(A)$. Donc
$$P(A \cup B) = P(A) + \frac{1}{2}P(A) - \frac{1}{2}(P(A))^2.$$
Autrement dit, on a l'équation
$$\frac{5}{8} = \frac{3}{2}P(A) - \frac{1}{2}(P(A))^2.$$
C'est équivalent à
$$\frac{1}{2}(P(A))^2 - \frac{3}{2}P(A) + \frac{5}{8} = 0.$$
Son discriminant est $\Delta = \frac{9}{4} - 4\frac{5}{16} = 1$.
Ainsi, il y a deux solutions
$$P(A) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \text{ ou } P(A) = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$
Seule la première est acceptable. Ainsi, on peut affirmer que $P(A) = \frac{1}{2}$. □

**Exercice 11.** 1. Nous avons besoin de noter certains événements :

- $N$ : « le test est négatif » ;
- $S$ : « la personne est en état d'ébriété ».

On cherche donc à déterminer $P(S|\overline{N})$. Ainsi, on a d'après la formule de probabilité des causes,

$$P(S|\overline{N}) = \frac{P(\overline{N}|S)P(S)}{P(\overline{N})}.$$

Or, d'après la formule des probabilités totales appliquées au système complet d'événements $(S, \overline{S})$,

$$P(\overline{N}) = P(\overline{N}|S)P(S) + P(\overline{N}|\overline{S})P(\overline{S}) = P(\overline{N}|S)P(S) + (1 - P(N|\overline{S}))(1 - P(S)).$$

Ainsi,

$$P(\overline{N}) = \frac{90}{100}\frac{2}{100} + \left(1 - \frac{95}{100}\right)\left(1 - \frac{2}{100}\right).$$

Donc

$$P(\overline{N}) = \frac{180}{10000} + \frac{490}{10000} = \frac{670}{10000}.$$

Ainsi,

$$P(S|\overline{N}) = \frac{\frac{90}{100}\frac{2}{100}}{\frac{670}{10000}} = \frac{180}{670} = \frac{18}{67}.$$

On trouve à peu près $0,27$. □

2. Cette fois-ci, c'est $P(S|N) = \dfrac{P(N|S)P(S)}{P(N)}$.

Or on a $P(N|S)P(S) = \left(1 - P(\overline{N}|S)\right)P(S) = \frac{20}{10000}$ et $P(N) = 1 - P(\overline{N}) = \frac{9330}{10000}$.

Ainsi, $P(S|N) = \dfrac{\frac{20}{10000}}{\frac{9330}{10000}} = \dfrac{2}{933}$.

On trouve à peu près $0,001$. □

3. Cette fois-ci, on cherche $P((N \cap S) \cup (\overline{N} \cap \overline{S}))$. Par incompatibilité des événements, on a

$$P((N \cap S) \cup (\overline{N} \cap \overline{S})) = P(N \cap S) + P(\overline{N} \cap \overline{S}).$$

Ainsi,

$$P((N \cap S) \cup (\overline{N} \cap \overline{S})) = P(N|S)P(S) + P(\overline{N}|\overline{S})P(\overline{S}).$$

Soit encore,

$$P((N \cap S) \cup (\overline{N} \cap \overline{S})) = (1 - P(\overline{N}|S))P(S) + (1 - P(N|\overline{S}))P(\overline{S}).$$

Et donc

$$P((N \cap S) \cup (\overline{N} \cap \overline{S})) = \left(1 - \frac{90}{100}\right)\frac{2}{100} + \left(1 - \frac{95}{100}\right)\frac{98}{100}.$$

On a donc

$$P((N \cap S) \cup (\overline{N} \cap \overline{S})) = \frac{20}{10000} + \frac{490}{10000} = \frac{51}{1000}.$$

La probabilité que le résultat soit faux est donc autour $0,05$. □

**Exercice 12.** 1. On a, d'après la formule du crible,

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)= \;& P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)\\ &-P(A_1\cap A_2)-P(A_1\cap A_3)-P(A_1\cap A_4)\\ &-P(A_2\cap A_3)-P(A_2\cap A_4)-P(A_3\cap A_4)\\ &+P(A_1\cap A_2\cap A_3)+P(A_1\cap A_2\cap A_4)\\ &+P(A_1\cap A_3\cap A_4)+P(A_2\cap A_3\cap A_4)\\ &-P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4).\end{aligned}$$

En éliminant le terme nul et en regroupant les termes égaux par symétrie du problème, on a

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=4P(A_1)-6P(A_1\cap A_2)+4P(A_1\cap A_2\cap A_3).$$

Le plus rapide est de calculer ces probabilités avec du dénombrement (même si on peut tout à fait le faire autrement). On note $\Omega=[\![1,4]\!]^n$ que l'on munit de la probabilité uniforme.

On a $A_1=[\![2,4]\!]^n$, donc $P(A_1)=\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

De même, on a $A_1\cap A_2=[\![3,4]\!]^n$, donc $P(A_1\cap A_2)=\left(\frac{2}{4}\right)^n$.

Enfin, $A_1\cap A_2\cap A_3=\{(4,\dots,4)\}$, donc $P(A_1\cap A_2\cap A_3)=\left(\frac{1}{4}\right)^n$.

Ainsi, on a $P(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)=4\left(\frac{3}{4}\right)^n-6\left(\frac{1}{2}\right)^n+4\left(\frac{1}{4}\right)^n$. □

2. On a $A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4$ est l'événement « au moins une boule n'a jamais été piochée », donc on a $p_n=P(\overline{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})$ ce qui donne immédiatement le résultat demandé. □

3. Comme $\frac{1}{4},\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{4}$ sont entre $-1$ et 1, on trouve immédiatement que $\lim\limits_{n\to+\infty}p_n=1$.
   Il parait prévisible qu'en piochant beaucoup de fois, on finisse par récupérer tous les numéros. □

**Exercice 13.** 1. Notons l'événement $T$ : « on utilise la pièce truquée » et $F_i$ : « on fait face au lancer $i$ ». En utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(T,\overline{T})$, on a $P(F_1)=P(F_1|T)P(T)+P(F_1|\overline{T})P(\overline{T})$.

Ainsi, on a

$$P(F_1)=1\frac{1}{5}+\frac{1}{2}\frac{4}{5}=\frac{3}{5}.$$

□

2. Il s'agit d'appliquer la formule de probabilité des causes, ainsi on a

$$P(T|F_1)=\frac{P(F_1|T)P(T)}{P(F_1)}=\frac{1\frac{1}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{1}{3}.$$

□

3. En utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(T,\overline{T})$, on a

$$P\left(\bigcap_{k=1}^n F_k\right)=P\left(\bigcap_{k=1}^n F_k\middle|T\right)P(T)+P\left(\bigcap_{k=1}^n F_k\middle|\overline{T}\right)P(\overline{T}).$$

Or $P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k|T\right) = 1$ et

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\middle|\overline{T}\right) = \prod_{k=1}^{n} P(F_k|\overline{T}) = \frac{1}{2^n}$$

par indépendance des lancers sachant $T$ (**une fois la pièce fixée**).

Ainsi, on a

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = \frac{1}{5} + \frac{1}{2^n}\frac{4}{5}$$

On va désormais utiliser la formule de probabilité des causes, et on a

$$p_n = P\left(T\middle|\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = \frac{P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k|T\right)P(T)}{P\left(\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) =}.$$

Ainsi,

$$p_n = P\left(T\middle|\bigcap_{k=1}^{n} F_k\right) = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{5} + \frac{1}{2^n}\frac{4}{5}}.$$

On a donc $p_n = \dfrac{1}{1+\frac{4}{2^n}}$. □

4. On a bien évidemment, $\lim_{n\to+\infty} p_n = 1$, autrement dit plus on a lancé la pièce en obtenant que des faces, plus on peut penser que la pièce est truquée. □

5. On cherche à résoudre

$$\begin{aligned}
p_n \geqslant \frac{95}{100} &\iff \frac{1}{1+\frac{4}{2^n}} \geqslant \frac{95}{100} \\
&\iff \frac{20}{19} \geqslant 1 + \frac{4}{2^n} \\
&\iff \frac{1}{19} \geqslant \frac{4}{2^n} \\
&\iff \frac{1}{76} \geqslant \frac{1}{2^n} \\
&\iff -\ln(76) \geqslant -n\ln(2) \text{ car la fonction } \ln \text{ est strictement croissante} \\
&\iff n \geqslant \frac{\ln(76)}{\ln(2)}.
\end{aligned}$$

Or $\frac{\ln(76)}{\ln(2)} \simeq 6,25$, donc on prend $n = 7$.

Au bout de 7 face consécutifs, on a une probabilité supérieure à $0,95$ d'utiliser la pièce truquée. □

**Exercice 14.** 1. Notons, pour tout l'exercice, l'événement $A_i$ : « on joue avec la pièce $A$ au $i$ème lancer » et $F_i$ : « on obtient face au rang $i$ ».

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n = P(A_n)$. En utilisant la formule des probabilités totales appliqué au système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$

$$P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}|A_n)P(A_n) + P(A_{n+1}|\overline{A_n})P(\overline{A_n}).$$

Or $P(A_{n+1}|A_n) = P(F_n|A_n) = \dfrac{1}{2}$ et $P(A_{n+1}|\overline{A_n}) = P(\overline{F_n}|\overline{A_n}) = 1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$.

Ainsi,
$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{3}P(\overline{A_n}).$$

On remarque que cette formule reste vraie si le système complet d'événements avait des événements négligeables.

Ainsi, on a
$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{2}P(A_n) + \frac{1}{3}(1 - P(A_n)).$$

Ainsi, on a
$$p_{n+1} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3}.$$

Cherchons $\ell \in \mathbb{R}$, tel que $\ell = \dfrac{1}{6}\ell + \dfrac{1}{3}$ soit $\ell = \dfrac{2}{5}$.

On pose alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$, on a
$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6}p_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}.$$

Or $p_n = u_n + \dfrac{2}{5}$, donc
$$u_{n+1} = \frac{1}{6}\left(u_n + \frac{2}{5}\right) + \frac{5}{15} - \frac{6}{15} = \frac{1}{6}u_n.$$

On constate donc que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{6}$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = \dfrac{1}{6^{n-1}}u_1$.

Or $u_1 = p_1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{5} = \dfrac{1}{10}$.

Ainsi, $u_n = \dfrac{1}{6^{n-1}}\dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{6^n}\dfrac{6}{10}$ et donc
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ p_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{6^n}.$$

□

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il s'agit encore une fois d'appliquer la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(A_n, \overline{A_n})$.On a alors
$$P(F_n) = P(F_n|A_n)P(A_n) + P(F_n|\overline{A_n})P(\overline{A_n}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{2}{3}(1 - p_n).$$

   En utilisant le résultat que l'on vient de faire, on a
$$P(F_n) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{5}\frac{1}{6^n}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{3}{5} - \frac{3}{5}\frac{1}{6^n}\right).$$

   En conclusion, on a $P(F_n) = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{10}\dfrac{1}{6^n}$. □

**Exercice 15.** 1. Notons $F_i$ l'événement « faire face au $i$ème lancer. »

Ainsi, $p_1 = P(\overline{F_1}) = a$.

De même, on a $p_2 = P(F_1 \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2}))$. Comme les événements sont incompatibles, on a

$$p_2 = P(F_1) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}).$$

Or comme les lancers sont indépendants, on a

$$p_2 = P(F_1) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}).$$

Ainsi, $p_2 = 1 - a + a^2$. □

2. Notons, pour $n \geqslant 1$, $T_n$ l'événement « avoir exactement $n$ points ». Appliquons la formule des probabilités totales au système complet d'événements $(F_1, \overline{F_1})$,

Ainsi, on a $p_{n+2} = P(T_{n+2}) = P(T_{n+2}|F_1)P(F_1) + P(T_{n+2}|\overline{F_1})P(\overline{F_1})$.

Or $P(T_{n+2}|F_1) = P(T_n) = p_n$ et $P(T_{n+2}|\overline{F_1}) = P(T_{n+1}) = p_{n+1}$.

Ainsi, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+2} = (1-a)p_n + ap_{n+1}$. □

3. Il s'agit d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. On remarque même qu'on peut étendre la définition de cette suite : si on pose $p_0 = 1$, on a bien $p_2 = 1 - a + a^2$ et $(1-a)p_0 + ap_1 = 1 - a + a^2$.

Résolvons l'équation caractéristique associée :

$$X^2 = aX + (1-a) \iff X^2 - aX + (a-1) = 0.$$

Remarquons que 1 est racine évidente, et donc, comme le produit des racines vaut $a-1$, l'autre vaut $a-1$.

Ainsi, il existe $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \lambda + (a-1)^n \mu.$$

En faisant $n = 0$, on récupère $\lambda + \mu = 1$ et en faisant $n = 1$, on a $\lambda + \mu(a-1) = a$.

On a donc le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = & 1 \\ \lambda + (a-1)\mu = & a \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = & 1 \\ (a-2)\mu = & a-1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$

Comme $a \neq 0$, on a $\iff \begin{cases} \lambda = & \frac{1}{2-a} \\ \mu = & \dfrac{1-a}{2-a} \end{cases}$

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$p_n = \frac{1}{2-a} + \frac{1-a}{2-a}(a-1)^n = \frac{1-(a-1)^{n+1}}{2-a}.$$

□

**Exercice 16.** 1. a. On a évidemment $u_0 = 1$ et $u_N = 0$. □

b. Pour $k \in [\![1, N-1]\!]$, on a On utilise la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(G, \overline{G})$ où $G$ est « A gagne la première partie. » On a alors $P(A_{k,0}) = P_G(A_{k,0})P(G) + P_{\overline{G}}(A_{k,0})P(\overline{G})$.

Or $P_G(A_{k,0}) = P(A_{k+1,1})$ et $P_{\overline{G}}(A_{k,0}) = P(A_{k-1,1})$, donc l'égalité devient

$$P(A_{k,0}) = P(A_{k+1,1})p + P(A_{k-1,1})q.$$

Soit, avec la supposition de l'énoncé,

$$\forall k \in [\![1, N-1]\!], \quad u_k = u_{k+1}p + u_{k-1}q.$$

□

c. On peut réécrire l'égalité précédente en

$$\forall k \in [\![0, N-2]\!], \quad pu_{k+2} - u_{k+1} + qu_k = 0.$$

Résolvons l'équation caractéristique associée :

$$pX^2 - X + q = 0.$$

Remarquons que 1 est racine évidente, et donc, comme le produit des racines vaut $\frac{q}{p}$, l'autre vaut $\frac{q}{p}$.
Si $p = q = \frac{1}{2}$, alors il n'y a qu'une racine double et on a l'existence de $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que, $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $u_k = (\lambda k + \mu)1^n = \lambda k + \mu$.
En faisant $k = 0$, on récupère $\mu = 1$. En faisant $k = N$, on récupère $\lambda N + 1 = 0$, donc $\lambda = -\frac{1}{N}$.
Ainsi, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a $u_k = -\frac{1}{N}k + 1 = \frac{N-k}{N}$.
Si $p \neq q$, on a deux racines distinctes, donc il existe $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que $\forall k \in [\![0, N]\!]$, on a

$$u_k = \lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

En faisant $k = 0$, on récupère $\lambda + \mu = 1$ et en faisant $k = N$, on a $\lambda + \mu \left(\frac{q}{p}\right)^N = 0$.
Ainsi, on a le système : $\begin{cases} \lambda + \mu = & 1 \\ \lambda + \left(\frac{q}{p}\right)^N \mu = & 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = & 1 \\ \left(\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1\right)\mu = & -1 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$

Comme $a \neq 0$, on a $\iff \begin{cases} \lambda = & \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \\ \mu = & \frac{-1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \end{cases}$

Ainsi, on a, pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, $u_k = \dfrac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1}$ □

d. Inutile de tout refaire, il faut simplement échanger $p$ et $q$ et $k$ avec $N - k$.
Ainsi, si $p = q = \frac{1}{2}$, on a $v_k = \frac{k}{N}$
Et si $p \neq q$, on a $v_k = \dfrac{\left(\frac{p}{q}\right)^N - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-k}}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1}$.
Calculons, pour $k \in [\![0, N]\!]$, $u_k + v_k$.

Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, $u_k + v_k = \dfrac{N-k}{N} + \dfrac{k}{N} = 1$.
Si $p \neq q$, on a

$$u_k + v_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} + \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^N - \left(\frac{p}{q}\right)^{N-k}}{\left(\frac{p}{q}\right)^N - 1}.$$

En multipliant le numérateur et le dénominateur de la première fraction par $p^N$ et la seconde par $q^N$, on a

$$u_k + v_k = \frac{q^N - q^k p^{N-k}}{q^N - p^N} + \frac{p^N - p^{N-k}q^k}{p^N - q^N} = \frac{p^N - q^N}{p^N - q^N} = 1.$$

On trouve que dans tous les cas, $\forall k \in [\![0, N]\!]$, $u_k + v_k = 1$. Autrement dit, il y aura presque surement un gagnant et un perdant ce qu'on peut reformuler en affirmant que le jeu se termine presque surement. □

2. Il s'agit de calculer $\lim\limits_{N \to +\infty} u_k$.

Si $p = q = \dfrac{1}{2}$, on a $u_k = \dfrac{N-k}{N} = 1 - \dfrac{k}{N} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1$.

Si $p > \dfrac{1}{2}$, on a $q < \dfrac{1}{2}$ donc $\dfrac{q}{p} < 1$, ainsi on a

$$u_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^k}{-1} = \left(\frac{q}{p}\right)^k.$$

Enfin, si $p < \dfrac{1}{2}$, on a $\dfrac{q}{p} > 1$, donc

$$u_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{k-N}}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^{-N}} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 1.$$

Ainsi, la probabilité que le joueur $A$ se ruine est bien : $\begin{cases} 1 & \text{si } p \leqslant \dfrac{1}{2} \\ \left(\dfrac{q}{p}\right)^k & \text{si } p > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Dans un jeu équitable ou défavorable, il est presque certain qu'un joueur finisse ruiné fasse à un joueur beaucoup plus riche que lui. Avec un jeu favorable, le jeu peu durer indéfiniment avec une probabilité qui dépend de la fortune de départ en plus des probabilités de gain. □

**Exercice 17** (Un peu de réflexion)**.** 1. Notons $V$ l'événement : « le candidat à choisi une boite vide ».

On supposera que la répartition des boites est équiprobable donc $P(V) = \dfrac{2}{3}$.

Notons $C$ l'événement : « le candidat gagne en changeant de boite ».

On a alors, d'après la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $(V, \overline{V})$,

$$P(C) = P(C|V)P(V) + P(C|\overline{V})P(\overline{V}).$$

Ainsi,

$$P(C) = 1 \times \frac{2}{3} + 0 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Ainsi, la stratégie de changer de boite amène à une victoire de probabilité $\dfrac{2}{3}$.

En notant $D$ l'événement : « le candidat gagne sans changer de boite », on a de la même façon :

$$P(D) = P(D|V)P(V) + P(D|\overline{V})P(\overline{V}) = 0 \times \frac{2}{3} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, la stratégie de ne pas changer de boite amène à une victoire de probabilité $\dfrac{1}{3}$.
□

2. En fait, c'est à peu près la même chose. Essayons une autre formalisation. Notons $A$ l'événement « Alice est graciée », et de la même façon les événements $B$ et $C$.

   Et notons $G$ le gardien désigne Bob.

   On a, d'après la formule de Bayes appliquées au système complet d'événements $(A, B, C)$,

$$P(C|G) = \frac{P(G|C)P(C)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C)}.$$

   Ce qu'on remplace en

$$P(C|G) = \frac{1 \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}.$$

   Alors que

$$P(A|G) = \frac{P(G|A)P(A)}{P(G|A)P(A) + P(G|B)P(B) + P(G|C)P(C)}.$$

   et donc

$$P(A|G) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}\frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

   Ainsi, dans ce cas, Alice n'a obtenu aucune information la concernant (normal, le gardien aurait toujours pu désigner l'un des deux autres prisonnier), mais Claire peut être un peu soulagée. □

# 14 Limites et continuité

**Exercice 1.** 1. Soit $\varepsilon > 0$. On cherche $\eta > 0$ tel que si $x \in ]-1-\eta, -1+\eta[$, $\left|(x^2 + x + 1) - 1\right| < \varepsilon$.

Considérons cette dernière inéquation. On a

$$\begin{aligned} \left|(x^2 + x + 1) - 1\right| < \varepsilon &\iff \left|x^2 + x\right| < \varepsilon \\ &\iff |x|\,|x+1| < \varepsilon \end{aligned}$$

Remarquons que si on prend $\eta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, on a $-1-\eta < x < -1+\eta$, donc $-2 < x < 0$ puis $|x| < 2$. De plus, on a $|x+1| < \frac{\varepsilon}{2}$ donc

$$|x|\,|x+1| < \varepsilon$$

ce que nous voulions.

Ainsi, $\lim_{x\to -1}(x^2+x+1) = 1$. □

2. Soit $\varepsilon > 0$.

   Remarquons que l'on a $\frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$. Ainsi, l'inégalité $\left|\frac{2x-1}{x+1} - 2\right| < \varepsilon$ est équivalente à

$$|3|\, x+1 < \varepsilon \Longleftrightarrow |x+1| > \frac{3}{\varepsilon}.$$

   En prenant $A = \max\left(0, \frac{3}{\varepsilon} - 1\right)$, on a pour tout $x > A$, $|x+1| > \frac{3}{\varepsilon}$ ce qui démontre l'inégalité souhaitée.

   Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$. □

3. Soit $M \in \mathbb{R}$.

   Remarquons que si $M \leqslant 0$, l'inégalité $\frac{1}{(x-1)^2} > M$ est toujours vérifiée, donc on prendre n'importe quoi pour $\eta$.

   Si $M > 0$, on a

$$\frac{1}{(x-1)^2} > M \Longleftrightarrow (x-1)^2 < \frac{1}{M} \Longleftrightarrow |x-1| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

   car la fonction racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Cette dernière inégalité est équivalente à

$$1 - \frac{1}{\sqrt{M}} < x < 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

   Ainsi, en prenant $\eta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, on a pour tout $x \in \left]1 - \frac{1}{\sqrt{M}}; 1 + \frac{1}{\sqrt{M}}\right[ \setminus \{1\}$, $(x-1)^2 < \frac{1}{M}$ donc l'inégalité recherchée.

   Ainsi, on a bien, $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^2} = +\infty$. □

**Exercice 2.** 1. On a, pout tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = x-1$. Ainsi, il est clair que $\lim_{x\to-1} f(x) = -2$.

La même forme permet de démontrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. □

2. On a, pout tout $x \neq -1$, $f(x) = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1} = \frac{x^2-x+1}{x^4-x^3+x^2-x+1)}$.

   Ainsi, il est clair que $\lim_{x\to-1} f(x) = \frac{3}{5}$.

   En $+\infty$, on écrit

$$f(x) = \frac{x^3}{x^5}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^5}} = \frac{1}{x^2}\frac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^5}}.$$

Ainsi, il est clair que $\dfrac{1+\frac{1}{x^3}}{1+\frac{1}{x^5}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et comme $\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc par produit, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

3. On a, pour $x \geqslant 0$ et $x \neq 3$, $f(x) = \dfrac{(x-3)(\sqrt{x}+\sqrt{3})}{x-3} = \sqrt{x}+\sqrt{3}$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = 2\sqrt{3}$.

   La même forme donne la limite en $+\infty$. Mais sinon, on aurait pu écrire $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}}\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}} = \sqrt{x}\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}}$.

   Ainsi, il est clair que $\dfrac{1-\frac{3}{x}}{1-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ et comme $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, donc par produit, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. □

4. Pour $x \geqslant -1$ et $x \neq 3$, on a $f(x) = \dfrac{x+1-4}{(x-3)(\sqrt{x+1}+2)} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}$.

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = \dfrac{1}{4}$.

   La même forme donne évidemment $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

5. Pour $x \geqslant 1$ et $x \neq 4$, on a

$$f(x) = \frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{3})}{(x-1)-3} = (x+4)(\sqrt{x-1}+\sqrt{3}).$$

   Ainsi, $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 8 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}$.

   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ par produit de limites. □

6. Le domaine de définition est pénible à chercher, mais on est clairement bien défini sur

un intervalle ouvert autour de 1, mais pas en 1. Sur cet intervalle, on a

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\left(1-(2-\sqrt{4-3x})\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)}{\left(1-\left(2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}\right)\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)} \\
&= \frac{\left(\sqrt{4-3x}-1\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)}{\left(\sqrt{\frac{1}{3-2x}}-1\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)} \\
&= \frac{\left((4-3x)-1\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3-2x}}+1\right)}{\left(\frac{1}{3-2x}-1\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)\left(\sqrt{4-3x}+1\right)} \\
&= \frac{3\,(1-x)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3-2x}}+1\right)(3-2x)}{\left(1-(3-2x)\right)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)\left(\sqrt{4-3x}+1\right)} \\
&= -\frac{3\,(1-x)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3-2x}}+1\right)(3-2x)}{2\,(1-x)\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)\left(\sqrt{4-3x}+1\right)} \\
&= -\frac{3\left(1+\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}\right)\left(\sqrt{\frac{1}{3-2x}}+1\right)(3-2x)}{2\left(1+\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}\right)\left(\sqrt{4-3x}+1\right)}
\end{aligned}$$

On a alors $\lim\limits_{x\to 1} -\frac{3}{2}\frac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\frac{1}{3-2x}}}} = -\frac{3}{2}$. □

7. La fonction est définie sur $]-\infty,-1[\cup]0,+\infty[$. Pour $x>0$, on a

$$f(x) = x\ln(x) - x\ln(x+1).$$

Par croissance comparée, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ et par produit, on a $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x+1) = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0$. □

8. Pour $x>0$, on a $f(x) = x\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right)$. Or $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ par croissances comparées.

Ainsi, $\left(1-\frac{\ln(x)}{x}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

Par conséquent, par produit de limites, on trouve $\lim\limits_{x\to+\infty} x-\ln(x) = +\infty$. □

9. On trouve pour $x\in\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{e^x}{x^4}\frac{1-x^2e^{-x}}{1+\frac{1}{x^4}}.$$

Or $1-x^2e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$ par croissances comparées et $1+\frac{1}{x^4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

De plus, par croissances comparées, $\frac{e^x}{x^4} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$, ainsi, par produits de limites, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x-x^2}{x^4+1} = +\infty$. □

10. On a, pour $x > 0$, $x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$.

    Tout d'abord, comme, par croissances comparées $\lim\limits_{x\to 0} -x\ln(x) = 0$, par composition de limite et continuité de la fonction exponentielle, on a $\lim\limits_{x\to 0} e^{-x\ln(x)} = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} x^{-x} = 1$.

    Ensuite comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -x\ln(x) = -\infty$, par composition de limite, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x\ln(x)} = 0$. Autrement dit $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-x} = 0$. □

11. On a, pour $x > -2$, $(x+2)^{-x} = e^{-x\ln(x+2)}$.

    Or $-x\ln(x+2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ par produit, donc par composition avec exponentielle qui est une fonction continue, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+2)^{-x} = 0$. □

12. On a, pour $x \in \mathbb{R}$, $2^{-x^2+2} = e^{(-x^2+2)\ln(2)}$.

    Or $(-x^2+2)\ln(2) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$ par produit, donc par composition avec exponentielle qui est une fonction continue, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} 2^{-x^2+2} = 0$. □

**Exercice 3.** Pour $x \notin \{-1, 1\}$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{a}{x^2-1} - \frac{b}{x+1} &= \frac{a}{x^2-1} - \frac{b(x-1)}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{a - bx + b}{(x+1)(x-1)} \\
&= \frac{-b(x+1) + a + 2b}{(x+1)(x-1)} \\
&= -\frac{b}{x-1} + \frac{a+2b}{(x+1)(x-1)}
\end{aligned}$$

On peut alors calculer les limites en utilisant les règles habituelles.
Si $a + 2b = 0$, alors on a $\lim\limits_{x\to-1} \left(\frac{a}{x^2-1} - \frac{b}{x+1}\right) = \frac{b}{2}$.
Si $a + 2b > 0$, alors on a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left(\frac{a}{x^2-1} - \frac{b}{x+1}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \left(\frac{a}{x^2-1} - \frac{b}{x+1}\right) = +\infty$
Si $a + 2b < 0$, alors on a $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x>-1}} \left(\frac{a}{x^2-1} - \frac{b}{x+1}\right) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \left(\frac{a}{x^2-1} - \frac{b}{x+1}\right) = -\infty$ □

**Exercice 4.** 1. Sur $\mathbb{R}_-^*$, $f$ est une fonction de référence continue. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $f$ est le produit de deux fonctions de références donc continue. La fonction $f$ est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

En 0, on a $f(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x<0}} x^2 = 0$ et enfin $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}} xe^x = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$.

$f$ est donc continue en 0.

On peut en conclure que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$. □

2. Sur $\mathbb{R}_-^*$, $g$ est une fonction constante donc continue. Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto -x$ est continue et exp est continue sur $\mathbb{R}$, donc $x \mapsto e^{-x}$ est continue et par suite $x \mapsto 1 - e^{-x}$ aussi. La fonction $g$ est donc continue sur $\mathbb{R}^*$.

En 0, on a $g(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 0 = 0$ et enfin $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} 1 - e^{-x} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = g(0)$.

$g$ est donc continue en 0.

On peut en conclure que $g$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

3. Sur $\mathbb{R}_-^*$, $h$ est une fonction constante donc continue. Sur $]0, e[$, $h$ est le produit de deux fonctions continues donc continue. Enfin, sur $]e, +\infty[$, $h$ est une fonction de référence continue. La fonction $h$ est donc continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, e\}$.

   En 0, on a $h(0) = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 0 = 0$ et enfin $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x\ln(x) = 0$ par croissances comparées. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = h(0)$.

   $h$ est donc continue en 0.

   Enfin, en $e$, on a $h(e) = e$ et $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x<e}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x<e}} x\ln(x) = e$ et enfin $\lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} h(x) = \lim\limits_{\substack{x \to e \\ x>e}} x = e$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to e} h(x) = h(e)$.

   $h$ est donc continue en $e$.

   On peut en conclure que $h$ est continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

**Exercice 5.** 1. Sur $]-\infty, 1[$, $f$ est constante donc continue. Sur $]1, +\infty[$, $f$ est la combinaison linéaire d'une fonction constante et d'une fonction de référence continue. Ainsi, $f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

En 1, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} 0 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 1 - \dfrac{1}{x^2} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$.
On peut donc prolonger $f$ par continuité en posant $f(1) = 0$. Ainsi, $f$ est désormais une fonction continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

2. Sur $]-\infty, 0[$, $g$ est constante donc continue. Sur $]0, 1[$, $g$ est une fonction de référence continue. Sur $]1, +\infty[$, $g$ est constante donc continue. Ainsi, $g$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

   En 0, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 0 = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$. On peut donc prolonger $g$ par continuité en posant $f(0) = 0$.

   En 1, on a $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} 1 = 1$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = 1$. On peut donc prolonger $g$ par continuité en posant $g(1) = 1$.

   Ainsi, une fois prolongée par continuité en 0 et en 1, $g$ est désormais une fonction continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

**Exercice 6.** Notons $T > 0$ une période de $f$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
On a déjà démontré par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(x+nT) = f(x)$. (On peut se rapporter aux exercices du chapitre sur les éléments d'analyse.)
Ainsi, il est clair que $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x + nT) = f(x)$.
Par ailleurs, on sait qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$. Or comme $\lim\limits_{n \to +\infty} x + nT = +\infty$, ainsi, par composition, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x + nT) = \ell$.
On a donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \ell$. Autrement dit, $f$ est constante. $\square$

**Exercice 7.** 1. C'est un polynôme, donc $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

2. C'est un quotient de polynômes, donc $f$ est définie et continue sur l'ensemble des réels tels que $x^2+x+1 \neq 0$. Or le discriminant de ce polynôme est strictement négatif (il vaut $-3$), donc $x^2+x+1$ ne s'annule pas.

   $f$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R}$. $\square$

3. Sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$, $x \longmapsto x^2-1$ est définie, continue et positive. On peut donc la composer avec la fonction racine carrée qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Ainsi, $f$ est définie et continue sur $]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$. $\square$

4. C'est un quotient de polynômes, donc $f$ est définie et continue sur l'ensemble des réels tels que $x^2+2x-3 \neq 0$. Or le le dénominateur s'annule uniquement en $-3$ et en $1$ (racines évidentes, ou discriminant, comme vous le souhaitez).

   $f$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3,1\}$. $\square$

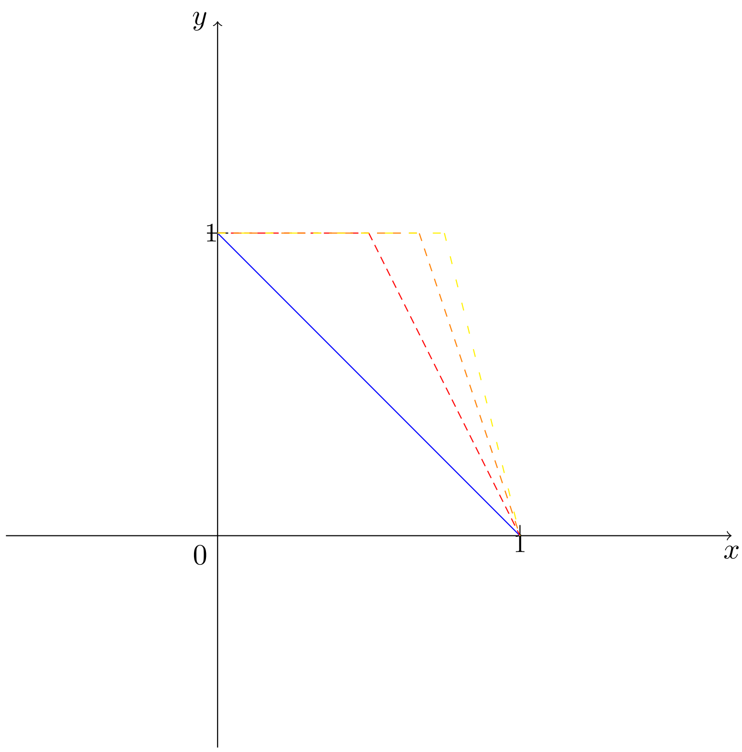
5. Sur $[1,+\infty[$, $x \longmapsto x-1$ est définie, continue et positive. On peut donc la composer avec la fonction racine carrée qui est continue sur $\mathbb{R}_+$.

   Ainsi, $f$ est définie et continue sur $[1,+\infty[$. $\square$

6. Sur $]-1,+\infty[$, $x \longmapsto x+1$ est définie, continue et strictement positive. On peut donc la composer avec la fonction logarithme népérien qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   Ainsi, $f$ est définie et continue sur $]-1,+\infty[$. $\square$

**Exercice 8.** 1. Plus le trait est discontinu, plus l'indice est élevé. En bleu la courbe représentative de $f_1$, en rouge de $f_2$, en orange de $f_3$ et en jaune de $f_4$. Les couleurs ne sont pas très visibles.




$\square$

2. $f$ est constante donc continue sur $[0,1-\frac{1}{n}[$ et est affine donc continue sur $]1-\frac{1}{n},1]$.

Par ailleurs,

$$\lim_{\substack{x\to 1-\frac{1}{n}\\ x<1-\frac{1}{n}}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to 1-\frac{1}{n}\\ x>1-\frac{1}{n}}} f_n(x) = f_n\left(1-\frac{1}{n}\right),$$

donc elle est continue en $1-\frac{1}{n}$.

Ainsi, elle est continue sur $[0,1]$. □

3. Soit $x \in [0,1[$. Comme $1-\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0$, $0 < x < 1 - \dfrac{1}{n}$.

   Ainsi, $\forall n \geqslant n_0,\ f_n(x) = 1$.

   Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f_n(1) = 0$.

   Ainsi, $\forall x \in [0,1],\ \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[ \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

   Autrement dit $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1[ \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$

   $f(1) = 0$ et pour $x < 1$, $f(x) = 1$. □

4. Elle est évidemment continue sur $[0,1[$ (constante) mais elle n'est pas continue en 1 car $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 1 \neq 0 = f(1)$. □

**Exercice 9.** 1. Commençons par chercher quand le dénominateur s'annule. Or en remarquant qu'on a certaines racines évidentes, on trouve que $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2) = x(x-1)(x+2)$.

Ainsi, $f$ est un quotient de polynômes donc est définie et continue partout où son dénominateur ne s'annule pas, donc sur $\mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\}$.

Par ailleurs, remarquons que $x^2+2x-3 = (x-1)(x+3)$ (toujours grâce aux racines évidentes). Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-2,0,1\}$, $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{x(x-1)(x+2)} = \dfrac{x+3}{x(x+2)}$.

On remarque alors que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \dfrac{4}{3}$. On peut donc prolonger $f$ par continuité en 1 en posant $f(1) = \dfrac{4}{3}$.

Par ailleurs, les limites en 0 et $-2$ sont des quotients de valeurs finies sur 0 donc valent $+\infty$ ou $-\infty$ à gauche et à droite selon les signes des quantités. Aucun prolongement n'est possible en 0 ou $-2$. □

2. Plaçons-nous sur $D = ]-\infty,-2[\cup]-2,0]\cup]2,+\infty[$, ainsi, $\forall x \in D$, $x^2-4 \neq 0$ et $x^2-2x \geqslant 0$.

   Sur $D$, le numérateur est la somme d'un polynôme (donc défini et continu) et de la composition de $x \mapsto x^2-2x$ (qui est définie, continue et positive) avec la fonction racine carrée qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc le numérateur définit bien une fonction continue sur $D$. Par ailleurs, le dénominateur est un polynôme qui ne s'annule pas sur $D$. Ainsi $f$ est bien définie et continue sur $D$.

   Il est clair que $f$ n'admet pas de limite en $-2$ : le dénominateur tend vers 0 et le numérateur vers $-4+2\sqrt{2}$.

Pour tout $x > 2$, on a

$$f(x) = \frac{x-2+\sqrt{x^2-2x}}{(x-2)(x+2)} = \frac{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}{\sqrt{x-2}(x+2)}.$$

Ainsi le numérateur tend vers $\sqrt{2}$ en 2 et le dénominateur vers 0. Il n'y a donc pas de limite finie en 2.

$f$ ne se prolonge par continuité nulle part. $\square$

3. Pour avoir $x^2-2x \geqslant 0$, on se place sur $]-\infty,0] \cup [2,+\infty[$.

   De plus, cherchons quand $x-2+\sqrt{x^2-2x} = 0$, ce qui implique $x-2 = -\sqrt{x^2-2x}$ ce qui implique $(x-2)^2 = x^2-2x$ donc $x^2-4x+4 = x^2-2x$, soit $x = 2$. Ainsi, le dénominateur ne s'annule qu'en 2.

   Notons donc $D = ]-\infty,0] \cup ]2,+\infty[$. Par ailleurs, sur $D$,

   Sur $D$, le dénominateur est la somme d'un polynôme (donc défini et continu) et de la composition de $x \mapsto x^2-2x$ (qui est définie, continue et positive) avec la fonction racine carrée qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$. Donc le dénominateur définit bien une fonction continue sur $D$ qui ne s'annule pas. Par ailleurs, le numérateur est un polynôme. Ainsi $f$ est bien définie et continue sur $D$.

   Le seul prolongement par continuité envisageable est en 2. On a, pour $x > 2$,

   $$f(x) = \frac{(x-2)(x+2)}{x-2+\sqrt{x^2-2x}} = \frac{\sqrt{x-2}(x+2)}{\sqrt{x-2}+\sqrt{x}}.$$

   Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} f(x) = 0$ donc on peut prolonger $f$ par continuité en posant $f(2) = 0$. $\square$

4. Sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est le quotient de deux fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, $f$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$.

   Remarquons que si $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2-2x}{x} = x-2$. Et si $x < 0$, $f(x) = \dfrac{x^2+2x}{x} = x+2$.

   Ainsi, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x) = 2$. $f$ n'admet donc pas de limite en 0 et ne peut donc pas être prolongée par continuité. $\square$

5. Remarquons que $x^2+x-6 = (x-2)(x+3)$ (factorisation en cherchant les deux racines qui s'avèrent être évidentes). Ainsi, sur $\mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$, $f$ est un quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas. $f$ est donc définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$.

   Remarquons que le numérateur admet 2 comme racine évidente, donc on peut le factoriser par $x-2$.

   On a donc $x^3+x^2-8x+4 = (x-2)(x^2+3x-2)$ (ce qui se trouve en identifiant les coefficients ou en devinant la factorisation et en la vérifiant).

   On a donc, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-3,2\}$,

   $$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+3x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{x^2+3x-2}{x+3}.$$

   On a donc $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \dfrac{8}{5}$. On peut donc prolonger $f$ par continuité en 2 en posant $f(2) = \dfrac{8}{5}$.

   Par contre, $f$ n'admet pas de limite en $-3$ (le numérateur tend vers -2 et le dénominateur vers 0), donc elle ne se prolonge pas par continuité en $-3$. $\square$

**Exercice 10.** 1. Soit $x \in I$.

Remarquons que, si $f(x) \geqslant g(x)$ (soit $\max(f(x), g(x)) = f(x)$ et $\min(f(x), g(x)) = g(x)$), alors on a

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \sup(f,g)(x)$$

et

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2} = g(x) = \inf(f,g)(x).$$

Et si $f(x) < g(x)$ (soit $\max(f(x), g(x)) = g(x)$ et $\min(f(x), g(x)) = f(x)$), alors on a

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-f(x)+g(x)}{2} = g(x) = \sup(f,g)(x)$$

et

$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \inf(f,g)(x).$$

Ainsi, on a bien $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$. □

2. Si $f$ et $g$ sont bien continues en $x_0$ alors $|f-g|$ aussi par composition. Par combinaison linéaire, il en est de même pour $\sup(f,g)$ et $\inf(f,g)$ puisque $\sup(f,g) = \dfrac{f+g+|f-g|}{2}$ et $\inf(f,g) = \dfrac{f+g-|f-g|}{2}$. □

**Exercice 11.** Si on a $(f(x))^2 - 3f(x) + 2 = 0$ alors, comme les racines évidentes de $X^2 - 3X + 2$ sont 1 et 2, on a $f(x) = 1$ ou $f(x) = 2$.
S'il existe $a$ et $b$ tels que $f(a) = 1$ et $f(b) = 2$, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires entre $a$ et $b$, on aurait l'existence d'un réel $c$ tel que $f(c) = \dfrac{3}{2}$ ce qui est impossible.
Ainsi, il n'y a que deux fonctions continues qui satisfont cette condition, ce sont les fonctions constantes égales à 1 et à 2. □

**Exercice 12.** 1. On a, pour $x > 0$, $f(x) = \dfrac{x^2}{x}\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = x\dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}}$.

Ainsi, il est clair que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc $f$ n'est pas bornée. □

2. On a, par les opération usuelles, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Donc il existe un réel $A \leqslant -1$ tel que $\forall x \in ]-\infty, A[$, $-1 \leqslant f(x) \leqslant 1$ (c'est la définition de limite nulle pour $\varepsilon = 1$.)

Par ailleurs, sur $[A, -1]$, $f$ est une fonction continue (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annuel pas). Ainsi, il existe deux réels $m$ et $M$ tels que, $\forall x \in [A, -1]$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Ainsi, $\forall x \in ]-\infty, -1]$, $\min(-1, m) \leqslant f(x) \leqslant \max(1, M)$. Ainsi, $f$ est bornée sur $]-\infty, -1]$. □

**Exercice 13.** 1. $f$ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme) et on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ainsi, $f$ est continue, strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tout entier, donc établit une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. □

2. $f$ est un quotient de polynôme, donc dérivable sur son ensemble de définition qui est $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

   Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x) = \dfrac{2(x-1)-(2x+1)}{(x-1)^2} = -\dfrac{3}{(x-1)^2}$.

   Ainsi, $f$ est strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, continue et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ (car, pour $x \neq 0$, on a $f(x) = \dfrac{2+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$) et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} f(x) = +\infty$.

   Ainsi, $f$ établit une bijection de $]1,+\infty[$ dans $]2,+\infty[$.

   Pour le deuxième cas, c'est plus compliqué. On remarque que sur $]-\infty,1[$ $f$ est continue, strictement décroissante $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = -\infty$. Ainsi, $f$ établit une bijection de $]-\infty,1[$ dans $]-\infty,2[$.

   On peut donc conclure que $\forall y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$, $y$ admet un unique antécédent par $f$ dans $\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Si $y > 2$, on se sert de la première partie de la question, et si $y < 2$ de la suite. Ainsi, $f$ établit une bijection de $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ dans $\mathbb{R}\setminus\{2\}$.

   Il aurait été presque aussi simple de chercher directement un antécédent et de montrer son unicité sans utiliser le théorème de la bijection. □

3. On a $f(-2) = -1 = f(0)$ donc elle n'est pas injective donc certainement pas bijective. □

**Exercice 14.** Remarquons que $f$ est la somme de fonction dérivables sur $]a,b[$ (inverses de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas). Ainsi, on a

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} < 0.$$

La fonction $f$ est strictement décroissante et continue sur $]a,b[$. De plus, on a $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = -\infty$. $f$ établit donc une bijection de $]a,b[$ dans $\mathbb{R}$.

Ensuite, pour déterminer sa réciproque. On prend $y \in \mathbb{R}$. Cherchons $x \in ]a,b[$ tel que $f(x) = y$. C'est équivalent à

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = y \\
\iff\quad & (x-b)+(x-a) = y(x-a)(x-b) \text{ car } x-a \neq 0 \text{ et } x-b \neq 0 \\
\iff\quad & yx^2 - (a+b)yx - 2x + aby + a + b \\
\iff\quad & yx^2 - (ay+by+2)x + (bay+a+b) = 0.
\end{aligned}$$

Si $y = 0$, on a $x = \dfrac{a+b}{2}$, donc un unique antécédent et il est bien dans l'intervalle $]a,b[$. Si $y \neq 0$, on a un trinôme du second degré et il vaut

$$\begin{aligned}
\Delta =\ & (ay+by+2)^2 - 4y(bay+a+b) \\
=\ & a^2y^2 + b^2y^2 + 4 + 2aby^2 + 4ay + 4by - 4aby^2 - 4ay - 4by \\
=\ & (a^2+b^2-2ab)y^2 + 4 \\
=\ & (a-b)^2y^2 + 4.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\Delta > 0$, donc on a deux racines. On a donc

$$x_1 = \frac{ay + by + 2 - \sqrt{(a-b)^2y^2 + 4}}{2y} \text{ et } x_2 = \frac{ay + by + 2 + \sqrt{(a-b)^2y^2 + 4}}{2y}.$$

On les réécrit en

$$x_1 = \frac{a+b}{2} - \frac{2 - \sqrt{(a-b)^2y^2 + 4}}{2y} \text{ et } x_2 = \frac{a+b}{2} + \frac{2 + \sqrt{(a-b)^2y^2 + 4}}{2y}.$$

Remarquons que $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ (c'est la remarque précédente).
Ainsi, si $y > 0$, comme $f$ est décroissante, l'antécédent de $y$ est forcément strictement inférieur à $\frac{a+b}{2}$. Il s'agit donc de $x_1$. Mais si $y < 0$, l'antécédent de $y$ est forcément strictement supérieur à $\frac{a+b}{2}$. Il s'agit donc encore une fois de $x_1$.
Ainsi, $f^{-1}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f^{-1}(y) = \begin{cases} \dfrac{a+b}{2} - \dfrac{2 + \sqrt{(a-b)^2y^2 + 4}}{2y} & \text{si } y \neq 0 \\ \dfrac{a+b}{2} & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

Il aurait été possible de s'épargner l'utilisation du théorème de la bijection à condition de montrer que $x_1 \in ]a, b[$ et $x_2 \notin ]a, b[$ pour n'importe quel $y \in \mathbb{R}^*$. Ça se fait, mais il faut le faire proprement. Ce n'est pas forcément plus économique. □

**Exercice 15.** Considérons $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{15} - x^{11} - 2. \end{array}$ Il est clair que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et les techniques classiques assurent que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = 0$, ce qui revient à l'existence d'une solution à l'équation demandée.
A noter qu'on peut généraliser cette démonstration pour montrer que tout polynôme de degré impair s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$. □

**Exercice 16.** Posons $g$ la fonction définie sur $[a, b]$ par $\forall x \in [a, b]$, $g(x) = f(x) - x$. Il s'agit d'une fonction continue sur $[a, b]$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $[a, b]$.
Par ailleurs, on a $g(a) = f(a) - a \geqslant 0$ car $f(a) \in [a, b]$ et $g(b) = f(b) - b \leqslant 0$ car $f(b) \in [a, b]$.
Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = 0$, c'est-à-dire $f(c) = c$.

Pour l'autre cas, notons $x_1$ un élément de $[a, b]$ tel que $f(x_1) = a$ et $x_2$ un autre élément de $[a, b]$ tel que $f(x_2) = b$ (ils existent car $[a, b] \subset f([a, b])$).
On a alors $g(x_1) = a - x_1 \leqslant 0$ car $x_1 \in [a, b]$ et $g(x_2) = b - x_2 \geqslant 0$ car $x_2 \in [a, b]$.
Ainsi, on applique le théorème des valeurs intermédiaires sur l'intervalle $[\min(x_1, x_2); \max(x_1, x_2)]$ ($g$ est bien continue puisque cet intervalle est inclus dans $[a, b]$) pour obtenir l'existence d'un $c$ tel que $g(c) = 0$. On termine comme précédemment. □

**Exercice 17.** Posons $h = f - g$. $h$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme combinaison linéaire de fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Par ailleurs, si $g$ est bornée sur $\mathbb{R}$, cela signifie qu'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $m \leqslant g(x) \leqslant M$.
Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - M \leqslant f(x) - g(x) \leqslant f(x) - m$, soit $f(x) - M \leqslant h(x) \leqslant f(x) - m$.

On a donc $\lim_{x\to+\infty} f(x)-M=+\infty$, donc $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$. De plus, $\lim_{x\to-\infty} f(x)-m=-\infty$, donc $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$. Ainsi, comme $h$ est continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $h(c)=0$, soit $f(c)=g(c)$. □

**Exercice 18.** $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$ signifie qu'il existe deux réels $m$ et $M$ tels que $\forall x\in\mathbb{R}$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$.
Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $m\leqslant f(g(x))\leqslant M$. Donc $f\circ g$ est bornée.
Comme $g$ est continue sur $\mathbb{R}$, il existe $m'$ et $M'$ deux réels tels que, $\forall x\in[m,M]$, $m'\leqslant g(x)\leqslant M'$.
On a alors, $\forall x\in\mathbb{R}$, comme $f(x)\in[m,M]$, $m'\leqslant g(f(x))\leqslant M'$. Ainsi, $g\circ f$ est bornée sur $\mathbb{R}$. □

**Exercice 19.** 1. Notons $T>0$ une période de $f$. $f$ est continue sur $[0,T]$ donc bornée sur $[0,T]$. Ainsi, il existe deux réels $m$ et $M$ tels que $\forall x\in[0,T]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

Si $x\notin[0,T]$, remarquons que $x-\lfloor\frac{x}{T}\rfloor T\in[0,T]$ et $f(x)=f\left(x-\lfloor\frac{x}{T}\rfloor T\right)$.

Donc, $\forall x\in\mathbb{R}$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$. $f$ est bornée sur $\mathbb{R}$. □

2. Si $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell_1$ alors il existe un réel $a<0$ tel que $\forall x\in]-\infty,a[$, $|f(x)-\ell_1|\leqslant 1$ soit $\ell_1-1\leqslant f(x)\leqslant\ell_1+1$.

De même, si $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\ell_2$ alors il existe un réel $b>0$ tel que $\forall x\in]b,+\infty[$, $|f(x)-\ell_2|\leqslant 1$ soit $\ell_2-1\leqslant f(x)\leqslant\ell_2+1$.

Et enfin, sur $[a,b]$, $f$ est continue donc bornée, ainsi, il existe deux réels $m$ et $M$ tels que $\forall x\in[a,b]$, $m\leqslant f(x)\leqslant M$.

On a donc, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\min(\ell_1-1,\ell_2-1,m)\leqslant f(x)\leqslant\max(\ell_1+1,\ell_2+1,M).$$

$f$ est donc bornée sur $\mathbb{R}$. □

3. Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$, il existe un réel $a<0$ tel que $\forall x<a$ $f(x)>f(0)+1$.

De même, comme $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, il existe un réel $b>0$ tel que $\forall x>b$ $f(x)>f(0)+1$.

Sur $[a,b]$, sur $[a,b]$, $f$ est continue donc est bornée et atteint ses bornes, donc en particulier sa borne inférieure. Ainsi, il existe $\gamma\in[a,b]$ tel que $f(\gamma)=\inf_{[a,b]} f(x)$.

Comme $0\in[a,b]$, $f(0)\geqslant f(\gamma)$.

Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)\geqslant f(\gamma)$ (car si $x<a$, $f(x)>f(0)+1$, de même si $x>b$, et sinon c'est ce qu'on vient de dire).

Autrement dit, $f$ atteint sa borne inférieure en $\gamma$. □

4. Notons $\ell=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Si $f$ est constante égale à $\ell$ alors elle remplit les conditions.

Si $f$ n'est pas constante, alors il existe $c\in\mathbb{R}$ telle que $f(c)\neq\ell$. On supposera $f(c)<\ell$ pour la suite.

Comme $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\ell$, il existe un réel $a<0$ tel que $\forall x<a$ $|f(x)-\ell|<\dfrac{\ell-f(c)}{2}$, donc $\dfrac{f(c)+\ell}{2}<f(x)<\dfrac{3\ell-f(c)}{2}$.

De même, comme $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$, il existe un réel $b > 0$ tel que $\forall x > b\ |f(x) - \ell| < \dfrac{\ell - f(c)}{2}$, donc $\dfrac{f(c)+\ell}{2} < f(x) < \dfrac{3\ell - f(c)}{2}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a,b]$, $f(x) > \dfrac{f(c)+\ell}{2}$.

Par ailleurs, sur $[a,b]$, $f$ est continue donc est bornée et atteint ses bornes, donc en particulier sa borne inférieure. Ainsi, il existe $\gamma \in [a,b]$ tel que $f(\gamma) = \inf_{[a,b]} f(x)$.

Comme $f(c) < \dfrac{f(c)+\ell}{2}$, $c \in [a,b]$, donc $f(\gamma) \leqslant f(c) < \dfrac{f(c)+\ell}{2}$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant f(\gamma)$.

Remarquons que si $f(c) > \ell$, on aurait pu appliquer le même raisonnement à $-f$ et on aurait trouvé que $-f$ avait une borne inférieure et l'atteignait, donc $f$ avait une borne supérieure et l'atteignait. $\square$

**Exercice 20.** Commençons par démontrer ce qui est suggéré. On va montrer la contraposée, autrement que si pour tous $a, b, c$ trois éléments de $I$ avec $a < b < c$ tels que $f(b) < \max(f(a), f(c))$ et $f(b) > \min(f(a), f(c))$, alors $f$ est strictement monotone, autrement dit que $f(b)$ est strictement compris entre $f(a)$ et $f(c)$.
Prenons $a, b \in I$ avec $a < b$. On suppose que $f(a) < f(b)$. On veut montrer que $f$ est strictement croissante.
Prenons, $x, y \in I$ avec $x < y$. On a plusieurs cas.

- Si $x < y \leqslant a < b$. Alors, on a $f(x) < f(a) < f(b)$ car $f(a) < f(b)$ et donc $f(x) < f(y) < f(b)$ car $f(x) < f(b)$.
- Si $x \leqslant a < y < b$. On a alors $f(a) < f(y) < f(b)$ car $f(a) < f(b)$ et donc $f(x) < f(y) < f(b)$ car $f(y) < f(b)$.
- Si $x \leqslant a < b \leqslant y$. On a alors $f(x) < f(a) < f(b)$ car $f(a) < f(b)$ et donc $f(x) < f(a) < f(y)$ car $f(x) < f(b)$.
- Si $a < x < y \leqslant b$. On a alors $f(a) < f(x) < f(b)$ car $f(a) < f(b)$ et donc $f(a) < f(x) < f(y)$ car $f(a) < f(y)$.
- Si $a < x < b < y$. On a alors $f(a) < f(x) < f(b)$ car $f(a) < f(b)$ et donc $f(x) < f(y) < f(b)$ car $f(x) < f(b)$.
- Si $a < b \leqslant x < y$. On a alors $f(a) < f(b) < f(y)$ car $f(a) < f(b)$ et donc $f(a) < f(x) < f(y)$ car $f(a) < f(y)$.

Ainsi, dans tous les cas, on a $f(x) < f(y)$, donc $f$ est strictement croissante.
Si on avait $f(a) > f(b)$ alors en considérant $g = -f$, on aurait eu $g$ strictement croissante, donc $f$ strictement décroissante.
Le cas $f(a) = f(b)$ n'est pas pertinent. Il suffit de prendre un troisième élément et la propriété n'est pas vérifiée.
Ainsi, on a montré que si pour tous $a, b, c$ trois éléments de $I$ avec $a < b < c$ tels que $f(b) < \max(f(a), f(b))$ et $f(b) > \min(f(a), f(c)$, alors $f$ est strictement monotone. C'est équivalent à, si $f$ n'est pas strictement monotone, il existe $a, b, c$ trois éléments de $I$ avec $a < b < c$ tels que $f(b) \geqslant \max(f(a), f(c))$ ou $f(b) \leqslant \min(f(a), f(c))$.
Prenons désormais une fonction continue et injective. Nous la supposons non strictement monotone. Ainsi, il existe $a, b, c$ trois éléments de $I$ avec $a < b < c$ tels que $f(b) \geqslant \max(f(a), f(c))$ ou $f(b) \leqslant \min(f(a), f(c))$.

Si on a $f(b) \geqslant \max(f(a), f(c))$, on note $k = \dfrac{f(b) + \max(f(a), f(c))}{2}$, si on a $f(b) \leqslant \min(f(a), f(c))$, on note $k = \dfrac{f(b) + \min(f(a), f(c))}{2}$.
Ainsi, $k$ est compris strictement entre $f(a)$ et $f(b)$ et entre $f(b)$ et $f(c)$. Ainsi, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires qui assure l'existence de $\gamma_1 \in ]a, b[$ tel que $f(\gamma_1) = k$ et de $\gamma_2 \in ]b, c[$ tel que $f(\gamma_2) = k$.
On a donc $f(\gamma_1) = f(\gamma_2)$ avec $\gamma_1 \neq \gamma_2$, ce qui est exclu puisque $f$ est injective.
Ainsi, $f$ ne peut pas être non strictement monotone.
Les seules fonctions continues et injectives sont donc strictement monotones. □

# 15 Espaces vectoriels

**Exercice 1.** 1. Nous allons détailler les deux méthodes vues en cours pour ce premier exercice. Il faut savoir faire les deux, toutes ne s'appliquant pas partout.

**Première méthode :** Trois points à vérifier.

(i) Remarquons que $A \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel.

(ii) Comme $0 + 2 \times 0 - 3 \times 0 = 0$, on a $(0, 0, 0) \in A$.

(iii) Prenons $(x, y, z)$ et $(x', y', z')$ deux éléments de $A$ et $\lambda, \mu$ deux réels. Montrons que $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in A$.
On a
$$\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z').$$
Puis on a
$$\begin{aligned}(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') &= \lambda x + \mu x' + 2\lambda y + 2\mu y' - 3\lambda z - 3\mu z' \\ &= \lambda(x + 2y - 3z) + \mu(x' + 2y' - 3z').\end{aligned}$$
Or $(x, y, z) \in A$, donc $x + 2y - 3z = 0$ et $(x', y', z') \in A$, donc $x' + 2y' - 3z' = 0$. Ainsi,
$$(\lambda x + \mu x') + 2(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') = \lambda \times 0 + \mu \times 0 = 0.$$
On a donc $\lambda(x, y, z) + \mu(x', y', z') \in A$.

Ces trois points permettent d'assurer que $A$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

**Deuxième méthode :** Là encore, on commence par remarquer que $A \subset \mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel.

Ensuite, on réécrit $A$ d'une différente manière. On remarque que
$$(x, y, z) \in A \iff x + 2y - 3z = 0.$$
Soit encore
$$(x, y, z) \in A \iff x = -2y + 3z.$$
Ainsi,
$$\begin{aligned} A &= \{(-2y + 3z, y, z)/(y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{y(-2, 1, 0) + z(3, 0, 1)/(y, z) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \text{Vect}\big((-2, 1, 0), (3, 0, 1)\big).\end{aligned}$$

Ainsi, $A$ est le sous-espace vectoriel engendré par une famille de deux vecteurs. C'est donc un sous-espace vectoriel...

La deuxième méthode a comme avantage d'exhiber une famille génératrice de $A$. Cependant, on ne peut pas toujours l'appliquer, ce qui explique qu'il faille connaître les deux. □

2. Remarquons que $B \subset \mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel.

   Une toute petite réécriture montre que

   $$B = \{x(1,1,0) + y(1,-1,2)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big((1,1,0),(1,-1,2)\big).$$

   Ainsi, $B$ est bien un sous-espace vectoriel. $\square$

3. On a $0+2\times 0-0 \neq 2$ donc $(0,0,0) \notin C$. Ainsi $C$ n'est pas un (sous-)espace vectoriel. $\square$

4. Cherchons si $(0,0,0) \in D$ donc s'il existe un couple $(x,y)$ tel que $(2x-3y, x+1, -x+3y) = (0,0,0)$. C'est équivalent à $\begin{cases} 2x-3y = & 0 \\ x+1 = & 0 \\ -x+3y = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y = & 2 \\ x = & -1 \\ 3y = & -1 \end{cases} \iff$
   $\begin{cases} 3y = & 2 \\ x = & -1 \\ 0 = & -3 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$ Ce système n'admet pas de solution donc $(0,0,0) \notin D$,
   ainsi $D$ n'est pas un espace vectoriel. $\square$

5. **Première méthode :** Trois points à vérifier.

   (i) Remarquons que $E \subset \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^3$ est un espace vectoriel.

   (ii) Comme $2\times 0 = 0$ et $0 = 3\times 0$, donc on a $(0,0,0) \in E$.

   (iii) Prenons $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$ deux éléments de $E$ et $\lambda, \mu$ deux réels. Montrons que $\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') \in A$.
   On a
   $$\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y', \lambda z + \mu z').$$
   Puis on a $2(\lambda x + \mu x') - (\lambda y + \mu y') = \lambda(2x-y) + \mu(2x'-y')$.
   Or $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$ deux éléments de $E$ donc $2x-y=0$ et $2x'-y'=0$.
   Ensuite, $(\lambda y + \mu y') - 3(\lambda z + \mu z') = \lambda(y-3z) + \mu(y'-3z')$.
   Or $(x,y,z)$ et $(x',y',z')$ deux éléments de $E$ donc $y-3z=0$ et $y'-3z'=0$.
   On a donc $\lambda(x,y,z) + \mu(x',y',z') \in E$.

   Ces trois points permettent d'assurer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

   **Deuxième méthode :** Là encore, on commence par remarquer que $E \subset \mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel.

   Ensuite, on réécrit $E$ d'une différente manière. On remarque que

   $$(x,y,z) \in A \iff 2x = y \text{ et } y = 3z.$$

   Soit encore

   $$(x,y,z) \in A \iff x = \frac{1}{2}y \text{ et } z = \frac{1}{3}y.$$

   Ainsi,

   $$\begin{aligned} E = \ & \left\{\left(\tfrac{1}{2}y, y, \tfrac{1}{3}y\right) \Big/ y \in \mathbb{R}^2\right\} \\ = \ & \left\{y\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{3}\right) \Big/ y \in \mathbb{R}^2\right\} \\ = \ & \mathrm{Vect}\left(\left(\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{1}{3}\right)\right) \\ = \ & \mathrm{Vect}\big((3,6,2)\big). \end{aligned}$$

   Ainsi, $E$ est le sous-espace vectoriel engendré par une famille d'un seul vecteur. C'est donc un sous-espace vectoriel... $\square$

6. On a $0 - 3 \times 0 + 9 \times 0 \neq 2$ donc $(0,0,0,0) \notin F$. Ainsi $F$ n'est pas un (sous-)espace vectoriel. $\square$

7. Prenons $(1,1,0) \in G$ et $(1,-1,0) \in G$. On a $(1,1,0)+(1,-1,0) = (2,0,0) \notin G$. Ainsi, $G$ n'est pas un espace vectoriel. $\square$

8. Oui. Attention c'est un piège !

   On a bien $H \subset \mathbb{R}^3$ qui est un espace vectoriel.

   Il faut réaliser que $x^2 + y^2 = 0$ est équivalent à $x = y = 0$ lorsque $x$ et $y$ sont réels. Donc en réalité, $H = \{(0,0,z)/z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\left((0,0,1)\right)$.

   Ainsi $H$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. $\square$

9. Non ! C'est la suite du piège !

   Prenez par exemple $(1,i,0) \in H'$, ainsi que $(-1,i,0)$, mais $(1,i,0) + (-1,i,0) = (0,2i,0) \notin H'$.

   Il faut réaliser que $x^2 + y^2 = 0$ est équivalent à $x - iy = 0$ ou $x + iy = 0$, autrement dit
   $$H' = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3/x - iy = 0 \text{ ou} x + iy = 0\}$$
   soit
   $$H' = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3/x - iy = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3/x + iy = 0\}.$$

   Or on peut deviner qu'il s'agit d'une union de sous-espaces vectoriels, ce qui n'est presque jamais un espace vectoriel (sauf si éventuellement l'un est inclus dans l'autre). $\square$

**Exercice 2.** A chaque fois, on nomme l'espace dont on parle, on écrit $(x,y,z) \in E$ si et seulement ci…, on résout le système et on arrive à mettre $E$ sous forme de sous-espace vectoriel engendré, comme dans la version alternative de résoudre l'exercice 1. On vérifie ensuite que la famille est bien libre, comme dans l'exercice 2. $\square$

1. On pose par exemple $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/x + 2y = 0\}$, donc
   $$(x,y,z) \in E \iff x + 2y = 0 \iff x = -2y.$$

   Ainsi, $E = \{(-2y,y,z)/(y,z) \in \mathbb{R}^2\}$, puis
   $E = \{y(-2,1,0) + z(0,0,1)/(y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

   On a donc $E = \text{Vect}\big((-2,1,0),(0,0,1)\big)$. Or $(-2,1,0)$ et $(0,0,1)$ ne sont pas colinéaires, donc forment une famille libre, donc une base de $E$. $\square$

2. Notons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3/2x - z = 0 \text{ et} y + z = 0\}$.

   On a donc $(x,y,z) \in E \iff \begin{cases} 2x - z &= 0 \\ y + z &= 0 \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} x = & \dfrac{1}{2}z \\ y = & -z \end{cases}$

   Ainsi, $E = \{(\frac{1}{2}z, -z, z)/z \in \mathbb{R}\}$, puis $E = \{z(\frac{1}{2}, -1, 1)/z \in \mathbb{R}\}$.

   On a donc $E = \text{Vect}\big((\frac{1}{2},-1,1)\big) = \text{Vect}\big((1,-2,2)\big)$. Or $(1,-2,2)$ est un vecteur non nul donc forme une famille libre, donc une base de $E$. $\square$

3. On pose par exemple $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x+5y-3z=0 \text{ et } -x-4y+2z=0\}$, donc

$$(x,y,z) \in E \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x+5y-3z & = & 0 \\ -x-4y+2z & = & 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrl} x+5y-3z = & 0 & \\ y-z = & 0 & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rll} x = & -2y & \\ z = & y & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, $E = \{(-2y,y,y)/y \in \mathbb{R}\}$,
puis $E = \{y(-2,1,1)/y \in \mathbb{R}\}$.

On a donc $E = \text{Vect}\big((-2,1,1)\big)$. Or $(-2,1,1)$ est un vecteur non nul donc forme une famille libre, donc une base de $E$. $\square$

4. Notons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 2x+y-3z=0 \text{ et} 4x+2y-5z=0\}$.

On a donc $(x,y,z) \in E \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 2x+y-3z & = & 0 \\ 4x+2y-5z & = & 0 \end{array} \right.$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrl} 2x+y-3z = & 0 & \\ z = & 0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rll} y = & -2x & \\ z = & 0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \end{array} \right.$$

Ainsi, $E = \{(-2y,y,0)/y \in \mathbb{R}\}$, puis $E = \{y(-2,1,0)/y \in \mathbb{R}\}$.

On a donc $E = \text{Vect}\big((-2,1,0)\big)$. Or $(-2,1,0)$ est un vecteur non nul donc forme une famille libre, donc une base de $E$. $\square$

5. Notons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / 4x-2y+6z=0 \text{ et } -2x+y-3z=0\}$.

On a donc $(x,y,z) \in E \iff \left\{ \begin{array}{rcl} 4x-2y+6z & = & 0 \\ -2x+y-3z & = & 0 \end{array} \right.$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrl} 0 = & 0 & L_1 \leftarrow L_1+2L_2 \\ -2x+y-3z = & 0 & L_2 \leftarrow L_2-L_1 \end{array} \right.$$

$\iff y = 2x+3z$

Ainsi, $E = \{(x,2x+3z,z)/(x,z) \in \mathbb{R}^2\}$, puis $E = \{x(1,2,0)+z(0,3,1)/(x,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

On a donc $E = \text{Vect}\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$. Or $\big((1,2,0),(0,3,1)\big)$ est une famille de **deux** vecteurs non colinéaires donc c'est une famille libre donc une base de $E$. $\square$

6. Remarquons que $(0,0,0)$ ne satisfait pas le système donc il ne définit pas un espace vectoriel. La question n'a pas de sens. $\square$

7. Notons $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-3y-z=0 \text{ et} 2x-5y+2z=0 \text{ et } 3x-7y+5z=0\}$.

On a donc $(x,y,z) \in E \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x-3y-z & = & 0 \\ 2x-5y+2z & = & 0 \\ 3x-7y+5z & = & 0 \end{array} \right.$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rrl} x-3y-z = & 0 & \\ y+4z = & 0 & L_2 \leftarrow L_2-2L_1 \\ 2y+8z = & 0 & L_3 \leftarrow L_3-3L_1 \end{array} \right.$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = & 0 \\ y + 4z = & 0 \\ 0 = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = & -11z \\ y = & -4z \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

Ainsi, $E = \{(-11z, -4z, z)/z \in \mathbb{R}\}$, puis $E = \{z(-11, -4, 1)/z \in \mathbb{R}\}$.

On a donc $E = \text{Vect}\big((-11, -4, 1)\big)$. Or $(-11, -4, 1)$ est un vecteur non nul donc forme une famille libre, donc une base de $E$. $\square$

8. Notons $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/x - 3y - z = 0 \text{ et} 2x - 5y + 2z = 0 \text{ et } 3x - 7y + 6z = 0\}$.

   On a donc $(x, y, z) \in E \iff \begin{cases} x - 3y - z & = & 0 \\ 2x - 5y + 2z & = & 0 \\ 3x - 7y + 6z & = & 0 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = & 0 \\ y + 4z = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 2y + 9z = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x - 3y - z = & 0 \\ y + 4z = & 0 \\ z = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = & 0 \\ y = & 0 \\ z = & 0 \end{cases}$$

   Ainsi, $E = \{(0, 0, 0)\}$. Il s'agit du sous espace vectoriel réduit au vecteur nul, il n'a pas de base. $\square$

**Exercice 3.** 1. La famille est forcément liée puisqu'elle contient 3 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2 et $2 < 3$.

   Si on prend par exemple les deux premiers vecteurs, on remarque que, si $\lambda, \mu$ sont deux réels tels que

$$\lambda(1, 0) + \mu(1, 1) = (0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ \mu = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda = & 0 \\ \mu = & 0 \end{cases} \text{ Donc la famille est libre.}$$

   Ainsi, on a extrait une famille libre de deux éléments dans un espace vectoriel de dimension 2, donc elle est engendre $\mathbb{R}^2$ tout entier, comme $\mathcal{F}_1$. $\square$

2. La famille est forcément liée puisqu'elle contient 4 vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3 et $3 < 4$.

   Si on enlève par exemple le vecteur le plus compliqué, on remarque que, si $\lambda, \mu, \nu$ sont trois réels tels que

$$\lambda(1, 2, 3) + \mu(3, 4, 6) + \nu(1, 1, 1) = (0, 0, 0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu + \nu = & 0 \\ 2\lambda + 4\mu + \nu = & 0 \\ 3\lambda + 6\mu + \nu = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda + 3\mu + \nu = & 0 \\ \lambda + \mu = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2\lambda + 3\mu = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda+3\mu+\nu = & 0 \\ \lambda+\mu = & 0 \\ \mu = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$ donc la famille est libre.

Ainsi, on a extrait une famille libre de trois éléments dans un espace vectoriel de dimension 3, donc elle est engendre $\mathbb{R}^3$ tout entier, comme $\mathcal{F}_2$. □

3. Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois complexes tels que

$$\lambda(1,i,0)+\mu(0,i,1)+\nu(0,i,0) = (0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda = & 0 \\ i\lambda+i\mu+i\nu = & 0 \\ \mu = & 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$ donc la famille $\mathcal{F}_3$ est libre. □

4. Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois complexes tels que

$$\lambda(0,1,i,0)+\mu(0,i,0,1)+\nu(0,i,0,0) = (0,0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} 0 = & 0 \\ \lambda+i\mu+i\nu = & 0 \\ i\lambda = & 0 \\ \mu = & 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$ donc la famille $\mathcal{F}_4$ est libre. □

5. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre réels tels que

$$\lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(0,1,0,1)+\lambda_3(1,1,1,0)+\lambda_4(0,1,1,2) = (0,0,0,0) \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = & 0 \\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4 = & 0 \\ \lambda_2+2\lambda_4 = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 = & 0 \\ \lambda_4 = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ \lambda_2+2\lambda_4 = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 = & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ \lambda_4 = & 0 \\ \lambda_2 = & 0 \quad L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1+\lambda_3 = & 0 \\ \lambda_3 = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ \lambda_4 = & 0 \\ \lambda_2 = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \lambda_3 = & 0 \\ \lambda_4 = & 0 \\ \lambda_2 = & 0 \end{cases}$$

$\Longrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ donc la famille $\mathcal{F}_5$ est libre. □

6. On remarque immédiatement que $(2,1,1) = (1,0,1) + (1,1,0)$ donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_1) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(1,1,0)\big)$.

Or ces deux derniers vecteurs ne sont pas colinéaires donc forment une famille libre.

Ainsi, la famille $\big((1,0,1),(1,1,0)\big)$ est libre et engendre le même sous-espace vectoriel que $\mathcal{F}_6$. Non, on peut enlever le premier (ou l'un des autres). □

7. La famille contient 4 vecteurs dans un espace de dimension 3 donc elle est liée.

   On pourrait faire comme précédemment, enlever un vecteur et voir si ça vient. Mais imaginons que nous n'ayons aucune idée de comment démarrer.

   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre réels tels que

   $\lambda_1(2,-3,-1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(-8,6,-2) + \lambda_4(-1,1,0) = (0,0,0)$

   $$\iff \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - 8\lambda_3 - \lambda_4 = & 0 \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & 0 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & 0 \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = & 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & 0 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & 0 \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = & 0 \\ 0 = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} \lambda_2 = & \lambda_1 + 2\lambda_3 \\ \lambda_4 = & 3\lambda_1 - 6\lambda_3 \end{cases}$$

   Ainsi, on remarque que si on enlève le premier et le troisième vecteur, on a une famille libre. Par ailleurs, on peut exprimer le 1er vecteur en fonction du second et du quatrième (il suffit de faire $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_3 = 0$) et le troisième en fonction du second et du quatrième (il suffit de faire $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_3 = 1$).

   Ainsi, la famille $\big((1,0,1),(-1,1,0)\big)$ est libre et engendre le même espace vectoriel que $\mathcal{F}_7$. $\square$

**Exercice 4.** 1. On a vu dans l'exercice précédent que la sous-famille $\big((1,0),(1,1)\big)$ était libre et engendrait $\mathbb{R}^2$ tout entier. Ainsi, $\mathcal{F}_1$ est génératrice et $\big((1,0),(1,1)\big)$ en est une base extraite. $\square$

2. On remarque que les vecteurs $(1,1)$ et $(2,1)$ sont libres (ils ne sont pas colinéaires) et sont dans $\mathbb{R}^2$ de dimension 2. Ainsi, $\big((1,1),(2,1)\big)$ est une base de $\mathbb{R}^2$ et donc $\mathcal{F}_2$ était bien génératrice. Oui. On enlève celui qu'on veut. $\square$

3. Vu qu'il y a deux vecteurs dans cette famille, que nous sommes dans un espace vectoriel de dimension 2, elle sera génératrice si et seulement si c'est une base donc si et seulement si elle est libre (toujours parce qu'elle a deux vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 2).

   Soient $\lambda, \mu$ deux complexes tels que $\lambda(1,i) + \mu(i,1) = (0,0)$.

   $$\implies \begin{cases} \lambda + i\mu = & 0 \\ i\lambda\mu = & 0 \end{cases}$$

   $$\implies \begin{cases} \lambda + i\mu = & 0 \\ 2\mu = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - iL_1 \end{cases}$$

   Et donc $\lambda = \mu = 0$.

   La famille $\mathcal{F}_3$ est libre, est de cardinal 2 dans un espace vectoriel de dimension 2, donc elle est génératrice et c'est une base. $\square$

4. Vu qu'il y a trois vecteurs dans cette famille, que nous sommes dans un espace vectoriel de dimension 3, elle sera génératrice si et seulement si c'est une base donc si et seulement si elle est libre (toujours parce qu'elle a trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3).

Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois réels tels que $\lambda(1,2,-3)+\mu(2,2,0)+\nu(1,0,-3)=(0,0,0)$.

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda+2\mu+\nu= & 0 \\ 2\lambda+2\mu= & 0 \\ -3\lambda-3\nu= & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rll} \lambda+2\mu+\nu= & 0 & \\ \lambda+\mu= & 0 & L_2 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_2 \\ \lambda+\nu= & 0 & L_3 \leftarrow -\dfrac{1}{3}L_3 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rll} \mu+\nu= & 0 & L_1 \leftarrow L_1-L_2 \\ \lambda+\mu= & 0 & \\ -\mu+\nu= & 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rll} \mu+\nu= & 0 & \\ \lambda+\mu= & 0 & \\ 2\nu= & 0 & L_3 \leftarrow L_3+L_1 \end{array}\right.$$

Et donc $\lambda=\mu=\nu=0$.

La famille $\mathcal{F}_4$ est libre, est de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, donc elle est génératrice et c'est une base. □

5. Elle n'a que trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4, donc elle ne peut pas être génératrice. □

6. Vu qu'il y a quatre vecteurs dans cette famille et que nous sommes dans un espace vectoriel de dimension 4, elle sera génératrice si et seulement si c'est une base donc si et seulement si elle est libre (parce qu'elle a quatre vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 4).

   Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatres réels tels que $\lambda_1(1,0,1,0)+\lambda_2(0,1,0,1)+\lambda_3(1,1,1,0)+\lambda_4(0,0,1,2)=(0,0,0,0)$.

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rl} \lambda_1+\lambda_3= & 0 \\ \lambda_2+\lambda_3= & 0 \\ \lambda_1+\lambda_3+\lambda_4= & 0 \\ \lambda_2+2\lambda_4= & 0 \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rll} \lambda_1+\lambda_3= & 0 & \\ \lambda_2+\lambda_3= & 0 & \\ \lambda_4= & 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ \lambda_2+2\lambda_4= & 0 & \end{array}\right.$$

$$\Longrightarrow \left\{\begin{array}{rll} \lambda_1= & 0 & \\ \lambda_3= & 0 & \\ \lambda_4= & 0 & L_3 \leftarrow L_3-L_1 \\ \lambda_2= & 0 & \end{array}\right. \quad \text{Et donc } \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0.$$

   La famille $\mathcal{F}_6$ est libre, est de cardinal 4 dans un espace vectoriel de dimension 4, donc elle est génératrice et c'est une base. □

7. Vu qu'il y a trois vecteurs dans cette famille, que nous sommes dans un espace vectoriel de dimension 3, elle sera génératrice si et seulement si c'est une base donc si et seulement si elle est libre (toujours parce qu'elle a trois vecteurs dans un espace vectoriel de dimension 3).

   Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois réels tels que $\lambda(0,1,1)+\mu(1,0,1)+\nu(1,1,0)=(0,0,0)$.

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mu+\nu = & 0 \\ \lambda+\mu = & 0 \\ \lambda+\nu = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mu+\nu = & 0 \\ \lambda-\nu = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ \lambda+\nu = & 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \mu+\nu = & 0 \\ \lambda-\nu = & 0 \\ 2\lambda = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \nu = & 0 \\ \mu = & 0 \\ \lambda = & 0 L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

Et donc $\lambda = \mu = \nu = 0$.

La famille $\mathcal{F}_7$ est libre, est de cardinal 3 dans un espace vectoriel de dimension 3, donc elle est génératrice et c'est une base. □

8. On a $(2,1,1) = (1,0,1) + (1,1,0)$, ainsi, $\mathrm{Vect}(\mathcal{F}_8) = \mathrm{Vect}\big((1,0,1),(1,1,0)\big)$.

   Or cette dernière famille n'est pas génératrice (seulement deux vecteurs), donc $\mathcal{F}_8$ non plus. □

9. En imaginant que nous n'avons pas déjà vu cette famille dans l'exercice précédent (où nous avions trouvé une famille qui engendrait le même espace vectoriel et qui n'était pas génératrice puisqu'elle n'avait que deux vecteurs).

   Soient $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, et $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ quatre réels tels que

   $\lambda_1(2,-3,-1) + \lambda_2(1,0,1) + \lambda_3(-8,6,-2) + \lambda_4(-1,1,0) = (a,b,c)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 - 8\lambda_3 - \lambda_4 = & a \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = & b \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & c \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & a+b \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = & b \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & b \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = & a+b \\ -3\lambda_1 + 6\lambda_3 + \lambda_4 = & b \\ 0 = & -a-b+c \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

   Ainsi, si $-a-b+c \neq 0$, on ne peut pas l'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}_9$, comme par exemple le vecteur $(1,0,0)$.

   Donc $\mathcal{F}_9$ n'est pas génératrice. □

**Exercice 5.** 1. Il suffit de remarquer qu'il s'agit d'une famille de **deux** vecteurs qui forment une famille libre car ils ne sont pas colinéaires. Comme il s'agit d'une famille libre de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ qui est un espace vectoriel de dimension 2, cette famille est une base de $\mathbb{R}^2$. □

2. On cherche $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x = x_1 u + x_2 v$. C'est équivalent à

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = & 5 \\ -x_1 + 2x_2 = & -2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3x_1 + x_2 = & 5 \\ -7x_1 = & -12 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_2 = & 5 - \dfrac{36}{7} = -\dfrac{1}{7} \\ x_1 = & \dfrac{12}{7} \end{cases}$$

Ainsi, on a $x = \dfrac{12}{7}u - \dfrac{1}{7}v$, ainsi ses coordonnées sont $\left(\dfrac{12}{7}, -\dfrac{1}{7}\right)$. $\square$

**Exercice 6.** 1. Le plus simple est de remarquer que les deux derniers vecteurs forment une famille libre (ils sont non colinéaires), donc $\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est de dimension au moins 2. Comme on est dans $\mathbb{R}^2$, $\dim(\mathrm{Vect}(\mathcal{F})) \leqslant 2$.

Ainsi $\mathcal{F}$ est de rang 2 donc génératrice puisque c'est une famille de $\mathbb{R}^2$ qui est de dimension 2. $\square$

2. Oui, on vient d'expliquer ci-dessus que cette famille est justement une base de $\mathbb{R}^2$. $\square$

3. Oui, on vient de le dire... $\square$

**Exercice 7.** 1. Non, les bases de $\mathbb{R}^2$ n'ont que deux vecteurs. $\square$

2. Il suffit d'en prendre deux non colinéaires pour avoir ce que l'on désire, puisque une famille libre de $\mathbb{R}^2$ en formera une base car $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$. $\square$

3. Ça dépend de la base choisie. Si par exemple on a pris $(u, w)$, on cherche $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x = x_1u + x_2w$. C'est équivalent au système :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 5 \\ 5x_1 + x_2 = & -2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = & 5 \\ -13x_3 = & -29 \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - 5L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 = & \dfrac{1}{2}\left(5 - 3\dfrac{29}{13}\right) = \dfrac{65 - 87}{2 \times 13} = -\frac{11}{13} \\ x_2 = & \dfrac{29}{13} \end{cases}$$

Ainsi, on a $x = -\dfrac{11}{13}u + \dfrac{29}{13}v$. Les coordonnées de $x$ dans la base $(u, w)$ sont donc $\left(-\dfrac{11}{13}, \dfrac{29}{13}\right)$. $\square$

**Exercice 8.** 1. Non, elle n'a que deux vecteurs alors que nous sommes dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3. $\square$

2. Remarquons que $(u, v)$ est une famille libre puisque $u$ et $v$ ne sont pas colinéaires. Elle est donc une base de l'espace vectoriel qu'elle engendre et est de rang 2. $\square$

3. On cherche $x_1$ et $x_2$ deux réels tels que $x = x_1u + x_2v$. C'est équivalent au système :

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 = & 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = & 4 \\ 3x_1 + 1x_2 = & 7 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x_1 + 3x_2 = & 1 \\ -4x_2 = & 2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -8x_2 = & 4 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4x_1 = & 10 \quad L_1 \leftarrow 4L_1 + 3L_2 \\ -4x_2 = & 2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = & \dfrac{5}{2} \\ x_2 = & -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on a $x = \dfrac{5}{2}u - \dfrac{1}{2}v$. Ainsi, $x \in \text{Vect}(\mathcal{F})$ et les coordonnées de $x$ dans la base $(u, v)$ de $\mathcal{F}$ sont donc $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$. $\square$

4. On cherche $y_1$ et $y_2$ deux réels tels que $x = y_1u + y_2v$. C'est équivalent au système :

$$\begin{cases} y_1 + 3y_2 = & -1 \\ 2y_1 + 2y_2 = & 6 \\ 3y_1 + 1y_2 = & 9 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y_1 + 3y_2 = & -1 & \\ -4y_2 = & 8 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ -8y_2 = & 12 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 4y_1 = & 10 & L_1 \leftarrow 4L_1 + 3L_2 \\ -4y_2 = & 2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 0 = & -8 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{cases}$$

Le système n'admet pas de solutions. Ainsi, $y$ n'est pas dans $\text{Vect}(u, v)$. $\square$

**Exercice 9.** 1. Nous sommes dans un espace vectoriel de dimension 2 et que la famille contient 3 vecteurs, elle ne peut donc pas être libre. $\square$

2. Oui, elle est constituée d'un seul vecteur non nul. $\square$

3. Oui, peu importe le vecteur choisi, puisque qu'aucun de ces vecteurs n'est colinéaire à $(13, 1)$, donc à eux deux, cela formera une famille libre. $\square$

4. On a une famille libre de deux vecteurs, donc elle engendre un sous-espace vectoriel de dimension 2, ainsi $rg(\mathcal{G}_1) = 2$. $\square$

5. Oui car il s'agit d'une famille libre de deux vecteurs et on est dans un espace vectoriel de dimension 2. $\square$

**Exercice 10.** 1. Montrons que cette famille est libre. Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois complexes tels que

$$\lambda(1, i, -1) + \mu(1, 0, -i) + \nu(0, i, i) = (0, 0, 0).$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ i\lambda + i\nu = & 0 \\ -\lambda - i\mu + i\nu = & 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = & 0 & \\ i\lambda + i\nu = & 0 & \\ (-1 + i - i)\lambda = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 + iL_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \mu = & 0 \\ \nu = & 0 \\ \lambda = & 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\lambda = \mu = \nu = 0$. La famille est donc libre. Comme elle est constituée par 3 vecteurs dans un espace vectoriel $\mathbb{C}^3$ de dimension 3, il s'agit d'une base. $\square$

2. Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois complexes tels que

$$\lambda(1, i, -1) + \mu(1, 0, -i) + \nu(0, i, i) = (0, 0, -1).$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ i\lambda + i\nu = & 0 \\ -\lambda - i\mu + i\nu = & -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda + \mu = & 0 \\ i\lambda + i\nu = & 0 \\ (-1 + i - i)\lambda = & -1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + iL_1 - L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \mu = & -1 \\ \nu = & -1 \\ \lambda = & 1 \end{cases}$$

Ainsi, $(0, 0, -1) = (1, i, -1) - (1, 0, -i) - (0, i, i)$. Les coordonnées de $x$ dans cette base sont $(1, -1, -1)$. □

**Exercice 11.** 1. Notons $F = \text{Vect}\big((1, 1, 1), (i, 0, 0), (1 + i, 1, 1), (i, i, i)\big)$.

On a

$$\begin{aligned} F = \;& \text{Vect}\big((1, 1, 1), (i, 0, 0), (1 + i, 1, 1), (i, i, i)\big) \\ = \;& \text{Vect}\big((1, 1, 1), (i, 0, 0), (1 + i, 1, 1) - (i, 0, 0), (i, i, i) - i(1, 1, 1)\big) \\ = \;& \text{Vect}\big((1, 1, 1), (i, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 0)\big) \\ = \;& \text{Vect}\big((1, 1, 1), i(1, 0, 0)\big) \\ = \;& \text{Vect}\big((1, 1, 1), (1, 0, 0)\big) \\ = \;& \text{Vect}\big((1, 1, 1) - (1, 0, 0), (1, 0, 0)\big) \\ = \;& \text{Vect}\big((0, 1, 1), (1, 0, 0)\big) \end{aligned}$$

Ainsi, il est clair que $F$ est engendré par deux vecteurs non colinéaires qui forment donc une famille libre. On a donc $\dim(F) = 2$, autrement dit la famille considérée est de rang 2. □

2. C'est déjà fait si vous avez répondu à la question précédente efficacement. □

**Exercice 12.** 1. a. Remarquons que $\mathbb{K}_2[X] \subset \mathbb{K}[X]$ qui est un sous-espace vectoriel.
De plus $0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathbb{K}_2[X]$.
Enfin, prenons $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}_2[X]$.
On a $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant 22$, donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_2[X]$.
Ainsi, $K_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. □

b. Tous ces vecteurs sont des vecteurs de $\mathbb{K}_2[X]$.
Si $P \in \mathbb{K}_2[X]$, il existe $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $P = a+bX+cX^2$. Ainsi, $\text{Vect}(1, X, X^2) = \mathbb{K}_2[X]$. □

c. Soient $a, b, c \in \mathbb{K}$ tels que $a+bX+cX^2 = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Par unicité de l'écriture développée réduite, on a $a = b = c = 0$, donc la famille $(1, X, X^2)$ est libre. □

d. La famille $(1, X, X^2)$ est libre et génératrice de $\mathbb{K}_2[X]$, donc une base de $\mathbb{K}_2[X]$. Ainsi, on a $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3$. □

e. Montrons que cette famille est libre. On note $a, b, c$ trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que

$$\begin{aligned}
3a + b(1-2X) \quad & +c(-2+X-X^2) = 0_{\mathbb{K}[X]} \\
& \iff (3a+b-2c) + (-2b+c)X - cX^2 = 0_{\mathbb{K}[X]} \\
& \iff \begin{cases} 3a & +b & -2c & = 0 \\ & -2b & +c & = 0 \\ & & -c & = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} a & = 0 \\ b & = 0 \\ c & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, il s'agit d'une famille libre, et comme elle contient 3 vecteurs de $\mathbb{K}_2[X]$ et que $\dim(\mathbb{K}_2[X]) = 3$, il s'agit d'une base de $\mathbb{K}_2[X]$. $\square$

f. Il s'agit clairement d'une famille libre puisque elle est constituée de deux vecteurs non colinéaires. Ainsi, $\mathrm{rg}(3, X) = \dim(\mathrm{Vect}(3, X)) = 2$. $\square$

g. On a très clairement $\mathrm{Vect}(3, X) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{3}3, X\right) = \mathrm{Vect}(1, X)$. Ainsi, une base légèrement plus simple de $\mathrm{Vect}(\mathcal{G})$ est $(1, X)$, ainsi $\mathrm{Vect}(\mathcal{G}) = \mathbb{K}_1[X]$. $\square$

h. Remarquons tout de suite que $\mathrm{Vect}(3, X) = \mathbb{K}_1[X]$. Ensuite, remarquons que $\mathrm{Vect}(2, X^2, 1+X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2, 1+X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$. Considérons $P \in \mathrm{Vect}(2, X^2, 1+X^2) \cap \mathrm{Vect}(3, X) = \mathrm{Vect}(1, X^2) \cap \mathbb{K}_1[X]$. Comme $P \in \mathrm{Vect}(1, X^2)$, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ tels que $P = \alpha + \beta X^2$. De plus, comme $P \in \mathbb{K}_1[X]$, il existe $a, b \in \mathbb{K}$ tels que $P = a + bX$.

On a donc $P \in \mathrm{Vect}(2, X^2, 1+X^2) \cap \mathrm{Vect}(3, X)$ si et seulement si

$$\begin{aligned}
\alpha + \beta X^2 = a + bX \quad & \iff \quad (\alpha - a) - bX + \beta X^2 = 0_{\mathbb{K}[X]} \\
& \iff \begin{cases} \alpha - a & = 0 \\ -b & = 0 \\ \beta & = 0 \end{cases} \\
& \iff \begin{cases} a & = \alpha \\ b & = 0 \\ \beta & = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $P = a$ où $a \in \mathbb{K}$.

On a donc $\mathrm{Vect}(2, X^2, 1+X^2) \cap \mathrm{Vect}(3, X) = \mathbb{K}_0[X]$, $(1)$ (la famille constituée par le polynôme constant 1) en est une base. $\square$

2. a. Remarquons que $\mathbb{K}_n[X] \subset \mathbb{K}[X]$ qui est un sous-espace vectoriel.

De plus $0_{\mathbb{K}[X]} \in \mathbb{K}_n[X]$.

Enfin, prenons $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

On a $\deg(\lambda P + \mu Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q)) \leqslant n$, donc $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{K}_n[X]$.

Ainsi, $K_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ donc un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $\square$

b. Essayons de faire un peu plus rapide.

Soit $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que $P = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k X^k$.

Par ailleurs, grâce à l'unicité de l'écriture développée réduite, ce $n+1$-uplet est unique.

Ainsi, $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

c. Comme $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, on a $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$. $\square$

**Exercice 13.** 1. a. Tous ces vecteurs sont des vecteurs de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Si $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, il existe $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

□

b. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{K}$ tels que $a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
Par l'unicité de l'écriture matricielle, on a $a = b = c = d = 0$ donc $\mathcal{B}$ est une famille libre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

□

c. La famille $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
On a alors $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{K})) = 4$. □

2. a. Essayons de faire un peu plus rapide.
Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Il existe $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ tels que

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{1,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Grâce à l'unicité de l'écriture matricielle, ces coefficients sont uniques.
Ainsi, $(E_{k,\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant \ell\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ □

b. Comme $(E_{k,\ell})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant \ell\leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

□

**Exercice 14.** Soients $\lambda, \mu, \nu$ trois réels tels que $\lambda(1, k, 2) + \mu(-1, 8, k) + \nu(1, 2, 1) = (0, 0, 0)$. C'est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda - \mu + \nu = & 0 \\ k\lambda + 8\mu + 2\nu = & 0 \\ 2\lambda + k\mu + \nu = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda - \mu + \nu = & 0 \\ (k-2)\lambda + 10\mu = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \lambda + (k+1)\mu = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda - \mu + \nu = & 0 \\ (10 - (k-2)(k+1))\mu = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - (k-2)L_3 \\ \lambda + (k+1)\mu = & 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \nu + \lambda - \mu = & 0 \\ \lambda + (k+1)\mu = & 0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ (-k^2 + k + 12)\mu = & 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné. Si $-k^2 + k + 12 \neq 0$, il implique $\lambda = \mu = \nu = 0$ donc la famille est libre.
Si $-k^2 + k + 12 = 0$, il a une infinité de solution donc la famille n'est pas libre.

Résolvons $-k^2+k+12=0$. Le discriminant est $\Delta = 1^2 - 4\times(-1)\times 12 = 49$.
Ainsi, on a deux racines $\dfrac{-1-7}{-2} = 4$ et $\dfrac{-1+7}{-2} = -3$.
La famille n'est pas libre si et seulement si $k$ est égal à 4 ou à $-3$. $\square$

**Exercice 15.** On note $U \in \mathrm{Vect}(P,Q)\cap\mathrm{Vect}(R,S)$.
Or $U \in \mathrm{Vect}(P,Q) \iff \exists(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ tel que $U = \alpha P + \beta Q$.
De même $U \in \mathrm{Vect}(R,S) \iff \exists(\gamma,\delta)\in\mathbb{K}^2$ tel que $U = \gamma R + \delta S$.
On a donc $U \in \mathrm{Vect}(P,Q)\cap\mathrm{Vect}(R,S) \iff \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\in\mathbb{K}^4$ tel que $\alpha P+\beta Q = \gamma R+\delta S$.
Grâce à l'unicité de l'écriture développée réduire des polynômes, cela est équivalent au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rl} \alpha+3\beta = & \gamma+2\delta \\ 2\alpha-\beta = & 3\gamma-2\delta \\ -\alpha+2\beta = & -\gamma+3\delta \end{array}\right. \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_1}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} \alpha+3\beta = & \gamma+2\delta \\ -7\beta = & \gamma-6\delta \\ 5\beta = & +5\delta \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rl} \alpha+3\beta-\gamma = & 2\delta \\ -7\beta-\gamma = & -6\delta \\ \beta = & \delta \end{array}\right.$$

$$\underset{\substack{L_1\leftarrow L_1-3L_3\\ L_2\leftarrow L_2+7L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} \alpha-\gamma = & -\delta \\ -\gamma = & \delta \\ \beta = & \delta \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} \alpha = & -2\delta \\ -\gamma = & \delta \\ \beta = & \delta \end{array}\right. \underset{L_1\leftarrow L_1-L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} \alpha = & -2\delta \\ \gamma = & -\delta \\ \beta = & \delta \end{array}\right.$$

Ainsi, $U \in \mathrm{Vect}(P,Q)\cap\mathrm{Vect}(R,S) \iff \exists\delta$ tel que $U = -2\delta P + \delta Q = \delta(-2P+Q)$ et $U = -\delta R + \delta S = \delta(-R+S)$.
Remarquons en effet que $-2P+Q = -R+S = 1-5X+4X^2$.
Ainsi, $\mathrm{Vect}(P,Q)\cap\mathrm{Vect}(R,S) = \mathrm{Vect}(1-5X+4X^2)$.
$\square$

**Exercice 16.** 1. $E$ est un sous-espace vectoriel engendré par deux matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, donc c'est bien un sous-espace vectoriel. $\square$

2. $E$ est engendré par une famille de deux vecteurs non colinéaires, c'est-à-dire une famille libre. Ainsi, elle forme une base de $E$ et $\dim(E) = 2$.

   Prenons $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$ tel que $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Cette égalité est équivalente au système :

$$\left\{\begin{array}{rl} x = & \lambda-\mu \\ y = & -2\lambda+\mu \\ z = & -\lambda+\mu \\ t = & \mu \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_4\\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_4}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x+t = & \lambda \\ y-t = & -2\lambda \\ z-t = & -\lambda \\ t = & \mu \end{array}\right. \underset{\substack{L_1\leftarrow L_1+L_3\\ L_2\leftarrow L_2-2L_3}}{\iff} \left\{\begin{array}{rl} x+z = & 0 \\ y-2z+t = & 0 \\ z-t = & -\lambda \\ t = & \mu \end{array}\right.$$

   Ainsi, $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \iff \left\{\begin{array}{rl} x+z = & 0 \\ y-2z+t = & 0 \end{array}\right.$

   On a donc $E = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}) / x+z=0 \text{ et } y-2z+t=0\right\}$.$\square$

3. On a $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in F \iff y = -2z+t$. Donc $F = \left\{\begin{pmatrix} x & -2z+t \\ z & t \end{pmatrix} / (x,z,t)\in\mathbb{K}^3\right\}$.

   Ou encore $F = \left\{x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} / (x,z,t)\in\mathbb{K}^3\right\}$.

   On a $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

   Ainsi, $F$ est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.

   Cette famille qui engendre $F$ est-elle libre ?

Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois réels tels que $\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = (0,0,0,0)$.

L'égalité est équivalente à $\begin{pmatrix} \lambda & -2\mu + \nu \\ \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

ce qui implique $\lambda = \mu = \nu = 0$.

La famille est libre, elle engendre $F$, donc c'est une base de $F$ et $\dim(F) = 3$.

$\square$

4. Soit $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. D'après ce qui précède, on a $\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in E \cap F \iff \begin{cases} x + z = & 0 \\ y - 2z + t = & 0 \\ y + 2z - t = & 0 \end{cases}$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{\iff} \begin{cases} x + z = & 0 \\ y - 2z + t = & 0 \\ y = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = & -z \\ t = & 2z \\ y = & 0 \end{cases}$$

Ainsi, $G = \left\{ \begin{pmatrix} -z & 0 \\ z & 2z \end{pmatrix} / z \in \mathbb{K} \right\} = \mathrm{Vect}\left( \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right)$.

$G$ est engendré par une famille d'un seul vecteur non nul, donc elle forme une base de $G$ et $\dim(G) = 1$.

$\square$

**Exercice 17.** Remarquons que $\mathrm{Vect}(u, v)$ et $\mathrm{Vect}(s, t)$ sont deux sous-espaces vectoriels engendrés par des familles de deux vecteurs non colinéaires (donc des familles de deux vecteurs libres). Ainsi, on a $\dim(\mathrm{Vect}(u, v)) = \dim(\mathrm{Vect}(s, t))$.
Pour montrer leur égalité, il ne reste plus qu'à montrer que l'un est inclus dans l'autre. Pour ce faire, nous allons montrer qu'une famille génératrice de l'un est constituée de vecteurs de l'autre.
Montrons qu'il existe $\lambda, \mu$ deux réels tels que $\lambda s + \mu t = u$.
C'est équivalent au système

$$\begin{cases} -\lambda - \mu = & -4 \\ 2\lambda + 6\mu = & 4 \\ 2\lambda + 7\mu = & 3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda - \mu = & -4 \\ 4\mu = & -4 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 5\mu = & -5 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda - \mu = & -4 \\ 4\mu = & -4 \\ 0 = & 0 \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné et admet des solutions, ainsi, $u \in \mathrm{Vect}(s, t)$. Remarquons qu'on n'a même pas besoin de récupérer les valeurs de $\lambda$ et $\mu$ pour assurer l'appartenance de $u$ à $\mathrm{Vect}(s, t)$.
De la même façon, montrons qu'il existe $\lambda, \mu$ deux réels tels que $\lambda s + \mu t = v$.
C'est équivalent au système

$$\begin{cases} -\lambda - \mu = & -3 \\ 2\lambda + 6\mu = & 2 \\ 2\lambda + 7\mu = & 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda - \mu = & -3 \\ 4\mu = & -4 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ 5\mu = & -5 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda - \mu = & -3 \\ 4\mu = & -4 \\ 0 = & 0 \quad L_3 \leftarrow 4L_3 - 5L_2 \end{cases}$$

Le système est échelonné et admet des solutions, ainsi, $v \in \text{Vect}(s,t)$.
Comme $u$ et $v$ sont des vecteurs de $\text{Vect}(s,t)$, on a $\text{Vect}(u,v) \subset \text{Vect}(s,t)$.
Puisque ces deux espaces vectoriels ont la même dimension, ils sont égaux. On a bien

$$\text{Vect}(u,v) = \text{Vect}(s,t).$$

On aurait pu faire la même chose pour montrer l'inclusion réciproque si on avait pas pensé à regarder les dimensions. Ou encore, en finissant les calculs on montre que $u = 5s - t$ et $v = 4s - t$ ce qui peut permettre très rapidement d'exprimer $s$ et $t$ en fonction de $u$ et $v$, mais c'est les dimensions le plus rapide. □

**Exercice 18.** Il y a beaucoup de façons de voir les choses. On pourrait commencer par déterminer des équations qui caractérisent chacun des deux puis résoudre un grand système. Au lieu de ça, on va y aller directement.
On note $e \in \text{Vect}(u,v) \cap \text{Vect}(s,t)$.
Or $e \in \text{Vect}(u,v) \iff \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $e = \alpha u + \beta v$.
De même $e \in \text{Vect}(s,t) \iff \exists(\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $e = \gamma s + \delta t$.
On a donc $e \in \text{Vect}(u,v) \cap \text{Vect}(s,t) \iff \exists(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta = & \gamma + 2\delta \\ 2\alpha - \beta = & 3\gamma - 2\delta \\ -\alpha + 2\beta = & -\gamma + 3\delta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 3\beta = & \gamma + 2\delta \\ -7\beta = & \gamma - 6\delta \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 5\beta = & +5\delta \quad L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha + 3\beta - \gamma = & 2\delta \\ -7\beta - \gamma = & -6\delta \\ \beta = & \delta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha - \gamma = & -\delta \quad L_1 \leftarrow L_1 - 3L_3 \\ -\gamma = & \delta \quad L_2 \leftarrow L_2 + 7L_3 \\ \beta = & \delta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = & -2\delta \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ -\gamma = & \delta \\ \beta = & \delta \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = & -2\delta \quad L_1 \leftarrow L_1 - L_2 \\ \gamma = & -\delta \\ \beta = & \delta \end{cases}$$

Ainsi, $e \in \text{Vect}(u,v) \cap \text{Vect}(s,t) \iff \exists\delta$ tel que $e = -2\delta u + \delta v = \delta(-2u+v)$ et $e = -\delta s + \delta t = \delta(-s+t)$.
Remarquons que $-2u + v = (1,-5,4) = -s + t$.
Ainsi, $\text{Vect}(u,v) \cap \text{Vect}(s,t) = \text{Vect}\big((1,-5,4)\big)$.
Le vecteur $(1,-5,4)$ étant non nul, il forme une famille libre à lui tout seul qui engendre $\text{Vect}(u,v) \cap \text{Vect}(s,t)$.
$\big((1,-5,4)\big)$ est donc une base de $\text{Vect}(u,v) \cap \text{Vect}(s,t)$. □

**Exercice 19.** 1. Pour $E$, c'est évident, il est engendré par deux vecteurs de $\mathbb{R}^4$.

Pour $F$, révisons un peu.

(i) Remarquons que $F \subset \mathbb{R}^4$ et $\mathbb{R}^4$ est un espace vectoriel.

(ii) Comme $0 = -2 \times 0 + 0$ donc on a $(0,0,0,0) \in F$.

(iii) Prenons $(x,y,z,t)$ et $(x',y',z',t')$ deux éléments de $F$ et $\lambda,\mu$ deux réels. Montrons que $\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t')\in F$.

On a

$$\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t')=(\lambda x+\mu x',\lambda y+\mu y',\lambda z+\mu z',\lambda t+\mu t').$$

Puis on a $(\lambda y+\mu y')+2(\lambda z+\mu z')-(\lambda t+\mu t')=\lambda(y+2z-t)+\mu(y'+2z'-t')$.
Or $(x,y,z,t)$ et $(x',y',z',t')$ deux éléments de $F$ donc $y+2z-t=0$ et $y'+2z'-t'=0$.
Donc $(\lambda y+\mu y')+2(\lambda z+\mu z')-(\lambda t+\mu t')=0$, ou encore $(\lambda y+\mu y')=-2(\lambda z+\mu z')+(\lambda t+\mu t')$.
On a donc $\lambda(x,y,z,t)+\mu(x',y',z',t')\in F$.

Ces trois points permettent d'assurer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. $\square$

2. $E$ est engendré par une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc une famille libre. Ainsi, elle forme une base de $E$ et $E$ est de dimension 2.

   On a $(x,y,z,t)\in E \iff \exists(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(-1,2,1,0)+\mu(-1,2,0,1)=(x,y,z,t).$$

   Cette égalité est équivalente au système

$$\begin{cases} -\lambda-\mu = & x\\ 2\lambda+2\mu = & y\\ \lambda = & z\\ \mu = & t\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -\lambda-\mu = & x\\ 0 = & 2x+y \quad L_2\leftarrow L_2+2L_1\\ \lambda = & z\\ \mu = & t\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 0 = & x+z+t \quad L_1\leftarrow L_1+L_3+L_4\\ 0 = & 2x+y\\ \lambda = & z\\ \mu = & t\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda = & z\\ \mu = & t\\ 0 = & x+z+t\\ 0 = & 2x+y\end{cases}$$

   Ainsi, $\lambda$ et $\mu$ existent si et seulement si $x+z+t=0$ et $2x+y=0$. Les éléments de $E$ sont ceux qui vérifient : $\begin{cases} 2x+y & =0\\ x+z+t & =0.\end{cases}$

   On peut donc écrire $E=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/2x+y=0 \text{ et } x+z+t=0\}$ $\square$

3. On a $(x,y,z,t)\in F\iff y=-2z+t$. Donc $F=\{(x,-2z+t,z,t)/(x,z,t)\in\mathbb{R}^3\}$.

   Ou encore $F=\{x(1,0,0,0)+z(0,-2,1,0)+t(0,1,0,1)/(x,z,t)\in\mathbb{R}^3\}$.

   On a $F=\mathrm{Vect}\big((1,0,0,0),(0,-2,1,0),(0,1,0,1)\big)$.

   Cette famille qui engendre $F$ est-elle libre ? Soient $\lambda,\mu,\nu$ trois réels tels que

$$\lambda(1,0,0,0)+\mu(0,-2,1,0)+\nu(0,1,0,1)=(0,0,0,0).$$

$$\iff (\lambda, -2\mu+\nu, \mu, \nu) = (0,0,0,0)$$

ce qui implique $\lambda = \mu = \nu = 0$.

La famille est libre, elle engendre $F$, donc c'est une base de $F$ qui est ainsi de dimension 3. $\square$

4. On a l'équivalence $(x,y,z,t) \in E \cap F \iff \begin{cases} 2x+y = & 0 \\ x+z+t = & 0 \\ y+2z-t = & 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x+y = & 0 \\ x+z+t = & 0 \\ 2x-2z+t = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_1 - L_3 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} 2x+y = & 0 \\ x-3z = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_3 - L_2 \\ 2x-2z+t = & 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y = & -2x \\ z = & \dfrac{1}{3}x \\ t = & -\frac{4}{3}x \end{cases}$

Ainsi, on $G = \left\{ x\left(1, -2, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right) / x \in \mathbb{R} \right\}$.

Ainsi, $G = \operatorname{Vect}\left(\left(1, -2, \dfrac{1}{3}, -\dfrac{4}{3}\right)\right)$.

Soit $G = \operatorname{Vect}((3,-6,1,-4))$.

Ainsi, $G$ est engendré par un unique vecteur non nul, donc $((3,-6,1,-4))$ est une base de $G$ et $\dim(G) = 1$. $\square$

**Exercice 20.** 1. On a

$$\begin{aligned} E = &\ \operatorname{Vect}((1,-1,3,-3) - (1,-1,1,-1), (2,-2,4,-4) - 2(1,-1,1,-1), \\ &\ (3,-3,7,-7) - 3(1,-1,1,-1), (1,-1,1,-1)) \\ E = &\ \operatorname{Vect}((0,0,2,-2), (0,0,2,-2), (0,0,4,-4), (1,-1,1,-1)) \\ E = &\ \operatorname{Vect}((0,0,1,-1), (0,0,1,-1), (0,0,1,-1), (1,-1,1,-1)) \\ E = &\ \operatorname{Vect}((0,0,1,-1), (1,-1,1,-1) - (0,0,1,-1)) \\ E = &\ \operatorname{Vect}((0,0,1,-1), (1,-1,0,0)) \\ E = &\ \operatorname{Vect}((1,-1,0,0), (0,0,1,-1)) \end{aligned}$$

On a $E = \operatorname{Vect}((1,-1,0,0), (0,0,1,-1))$. Comme les vecteurs ne sont pas colinéaires, $((1,-1,0,0), (0,0,1,-1))$ est libre donc est une base de $E$. On a donc $\dim(E) = 2$. $\square$

2. On a $(x,y,z,t) \in E \iff \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\lambda(1,-1,0,0) + \mu(0,0,1,-1) = (x,y,z,t).$$

Cette égalité est équivalente au système

$\begin{cases} \lambda = & x \\ -\lambda = & y \\ \mu = & z \\ -\mu = & t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} \lambda = & x \\ 0 = & x+y \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ \mu = & z \\ 0 = & z+t \quad L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \end{cases}$

Ainsi, $\lambda$ et $\mu$ existent si et seulement si $x+y=0$ et $z+t=0$. Les éléments de $E$ sont ceux qui vérifient : $\begin{cases} x+y &= 0 \\ z+t &= 0. \end{cases}$

On peut écrire $E = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y=0 \text{ et } z+t=0\}$. $\square$

3. Plusieurs façons de faire. On peut chercher à trouver un système d'équation décrivant $F$ puis vérifier que les vecteurs qui engendrent $E$ sont dans $F$. On peut aussi directement essayer d'exprimer les vecteurs qui engendrent $E$ en fonction de ceux qui engendrent $F$.

   Mais commençons par simplifier l'écriture de $F$. On a

$$\begin{aligned} F = & \operatorname{Vect}\big((1,0,1,-1)-(1,0,0,0)+(0,0,-1,1),(0,1,2,-2)+2(0,0,-1,1),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\big) \\ = & \operatorname{Vect}\big((0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,-1,1)\big) \\ = & \operatorname{Vect}\big((0,1,0,0),(1,0,0,0),(0,0,1,-1)\big). \end{aligned}$$

   Or $E = \operatorname{Vect}\big((1,-1,0,0),(0,0,1,-1)\big)$. On a bien $(1,-1,0,0) = -(0,1,0,0)+(1,0,0,0)+0(0,0,1,-1)$ et $(0,0,1,-1) = 0(0,1,0,0)+0(1,0,0,0)+(0,0,1,-1)$.

   Ainsi, les vecteurs qui engendrent $E$ sont des vecteurs de $F$, donc $E \subset F$. $\square$

**Exercice 21.** 1. On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{K})}$. $\square$

2. On a $E = \{aI_4 + bN + cN^2 + dN^3 / (a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4\}$. Autrement dit, $E = \operatorname{Vect}(I_4, N, N^2, N^3)$.

   De plus, la famille $(I_4, N, N^2, N^3)$ est libre. En effet, considérons $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tels que $aI_4 + bN + cN^2 + dN^3 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{K})}$ donne directement $a=b=c=d=0$.

   Ainsi, $(I_4, N, N^2, N^3)$ est une base de $E$ et on a $\dim(E) = 4$. $\square$

3. On a $I_4 = I_4 + 0N + 0N^2 + 0N^3$, $M_1 = I_4 + 2N + 3N^2 + 4N^3$, $M_2 = 2I_4 - N + N^2 + 0N^3$ et enfin $M_3 = 0I_4 + N + 4N^2 + 4N^3$.

   Ainsi, la matrice représentative de la famille $(I_4, M_1, M_2, M_3 3)$ dans la base $(I_4, N, N^2, N^3)$ est $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

   On a alors $\operatorname{rg}(A) \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_2}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \underset{L_4 \leftarrow 5L_4 - 4L_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   Il suffit d'une dernière opération pour obtenir $\operatorname{rg}(A) \underset{C_2 \leftrightarrow C_3}{=} \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3$. $\square$

4. Prenons $A \in E$, donc il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tel que $A = aI_4 + bN + cN^2 + dN^3$ et $B \in E$, donc il existe $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$ tel que $B = a'I_4 + b'N + c'N^2 + d'N^3$.

   On a $AB = (aI_4 + bN + cN^2 + dN^3)(a'I_4 + b'N + c'N^2 + d'N^3) = aa'I_4 + (ab' + a'b)N + (ac' + bb' + a'c)N^2 + (ad' + bc' + b'c + a'd)N^3$ car les autres produits sont nuls puisque $N^4 = 0_{\mathcal{M}_4(\mathbb{K})}$.

   On a donc bien $AB \in E$.

   $\square$

5. Avec les mêmes notations que la question précédente, on a déjà vu que $AB = abI_4 + (ab' + a'b)N + (ac' + bb' + a'c)N^2 + (ad' + bc' + b'c + a'd)N^3$.

   De la même façon, il suffit de calculer $BA = (a'I_4 + b'N + c'N^2 + d'N^3)(aI_4 + bN + cN^2 + dN^3) = a'aI_4 + (a'b + ab')N + (a'c + b'b + ac')N^2 + (a'd + b'c + bc' + ad')N^3 = AB$.

   On a donc $AB = BA$. Ainsi, toute matrice $B \in E$ est une matrice de $F$ qui est un sous-ensemble de $E$, donc $E = F$.

   $\square$

**Exercice 22.** 1. Remarquons que $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis que $0_{\mathcal{M}_n}(\mathbb{K}) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. Ensuite, prenons $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $M, N$ deux éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. On a $(\lambda M + \mu N)^\top = \lambda M^\top + \mu N^\top$. Comme $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, on a $M^\top = M$ et pour la même raison $N^\top = N$. Ainsi, $(\lambda M + \mu N)^\top = \lambda M + \mu N$. On a donc $\lambda M + \mu N \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. $\square$

2. Remarquons que $E_{k,\ell}^\top = E_{\ell,k}$. Ainsi, $S_{k,\ell}^\top = E_{k,\ell}^\top + E_{\ell,k}^\top = S_{k,\ell}$, donc $S_{k,\ell} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

   Enfin, remarquons que $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{S}_n(K)$, si et seulement si on a, pour tout $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$, $m_{k,\ell} = m_{\ell,k}$. Ainsi, on peut remarquer que $M = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k+1}^{n} m_{k,\ell} S_{k,\ell} + \sum_{k=1}^{n} \frac{m_{k,k}}{2} S_{k,k}$ où $S_{k,k} = 2E_{k,k}$.

   La famille $(S_{k,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n}$ est donc génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

   De plus, elle est libre car si on a $(\lambda_{k,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n}$ tels que $\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=k}^{n} \lambda_{k,\ell} S_{k,\ell}$, il vient immédiatement $\lambda_{k,\ell} = 0$ pour tout $(k, \ell) \in [\![1, n, ]\!]$ avec $k \leqslant \ell$.

   Ainsi, la famille $(S_{k,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$. $\square$

3. Il ne reste qu'à dénombrer les éléments de $(S_{k,\ell})_{1 \leqslant k \leqslant \ell \leqslant n}$, donc le nombre de couples $(k, \ell)$ de $[\![1, n]\!]^2$ tels que $k \leqslant \ell$. Il y a $n^2$ couples de $[\![1, n]\!]^2$, il y a $n^2 - n$ couples de $[\![1, n]\!]^2$ tels que $k \neq \ell$.

   Il y a donc $\frac{n^2 - n}{2}$ couples de $[\![1, n]\!]^2$ tels que $k < \ell$. Il ne reste qu'à ajouter les $n$ couples de la forme $(k, k)$ où $k \in [\![1, n]\!]$ et on en déduit que $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n^2 - n}{2} + n = \frac{n(n+1)}{2}$. $\square$

**Exercice 23.** 1. La famille $(L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ est une famille de $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{K}_n[X]$ et $\dim(K_n[X]) = n + 1$. Ainsi, $(L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ si et seulement si $(L_j)_{j \in [\![0,n]\!]}$ est libre.

   Considérons $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j = 0_{\mathbb{K}[X]}$. Considérons $i \in [\![0, n]\!]$, on a en particulier, $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = 0$.

   Notons, pour $j \in [\![1, n]\!]$, $\Lambda_j = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (a_j - a_k)$ et ainsi, on a $L_j = \frac{1}{\Lambda_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (X - a_k)$. Ainsi, on a $L_j$ Remarquons que,si $i \neq j$, $L_j(a_i) = \frac{1}{\Lambda_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (a_i - a_k) = 0$ (puisque dans le produit du numérateur, $k$ prend une fois la valeur $i$), et $L_j(a_j) = \frac{1}{\Lambda_j} \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^{n} (a_j - a_k) = \frac{\Lambda_j}{\Lambda_j} = 1$.

Grâce à cette considération, on a $\sum_{j=0}^{n} \lambda_j L_j(a_i) = \lambda_i$, donc $\lambda_i = 0$.

Ainsi, la famille $(L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est libre, par suite c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. $\square$

2. Considérons $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Comme $(L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$, il existe un unique $(p_0, p_1, \ldots, p_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{j=0}^{n} p_j L_j$.

   Considérons $i \in [\![0,n]\!]$ et calculons $P(a_i) = \sum_{j=0}^{n} p_j L_j(a_i)$. En utilisant la même remarque que ci-dessus, on a $P(a_i) = p_i$.

   Ainsi, les coordonnées de $P$ dans la base $(L_j)_{j\in[\![0,n]\!]}$ sont $(P(a_0), P(a_1), \ldots, P(a_n))$.

   $\square$

3. Soit $k \in [\![1,p]\!]$. On a $P_k$ qui a pour coordonnées $(P_k(a_0), P_k(a_1), \ldots, P_k(a_n))$.

   Ainsi, la matrice représentative de la famille $(P_1, \ldots, P_p)$ est la matrice

$$\begin{pmatrix} P_1(a_0) & P_2(a_0) & \ldots & P_k(a_0) \\ P_1(a_1) & P_2(a_1) & \ldots & P_p(a_1) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ P_1(a_n) & P_2(a_n) & \ldots & P_p(a_n) \end{pmatrix} = (P_j(a_{i-1}j))_{\substack{1\leqslant i\leqslant n+1 \\ 1\leqslant j\leqslant p}}.$$

$\square$

**Exercice 24.** 1. On a $E = \{(by+cz, y, z)/(y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\big((b,1,0),(c,0,1)\big)$. Ainsi, $E \subset \mathbb{R}^3$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par deux vecteurs non-colinéaires donc formant une famille libre. Ainsi, $\dim(E) = 2$. $\square$

2. De la même façon, $F$ et $G$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

   Ainsi, $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à 2 (il est inclus dans $F$ de dimension 2).

   Si $E \subset F\cap G$, alors, on a $\dim(E) \leqslant \dim(F\cap G)$. Comme $\dim(E) = 2$, et $\dim(F\cap G) \leqslant 2$, on a forcément $\dim(E) = \dim(F\cap G)$ et donc $E = F \cap G$.

   Par ailleurs, $F\cap G \subset F$ et $\dim(F\cap G) = \dim F$, donc $F \cap G = F$. De la même façon $F \cap G = G$.

   Ainsi, on a bien $E = F = G$. $\square$

3. On a $(x,y,z) \in E\cap F\cap G \iff \left\{\begin{array}{rl} x-by-cz = & 0 \\ ax-y+cz = & 0 \\ ax+by-z = & 0 \end{array}\right.$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x-by-cz = & 0 & \\ (ab-1)y+(ac+c)z = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - aL_1 \\ (ab+b)y+(ac-1)z = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - aL_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x-by-cz = & 0 & \\ (ab-1)y+c(a+1)z = & 0 & \\ (b+1)y-(c+1)z = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Si $b \neq -1$, le système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{rll} x-by-cz = & 0 & \\ (c(a+1)(b+1)+(ab-1)(c+1))z = & 0 & L_2 \leftarrow (b+1)L_2 - (ab-1)L_3 \\ (b+1)y-(c+1)z = & 0 & \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x-by-cz= & 0 \\ (b+1)y-(c+1)z= & 0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ (abc+ac+bc+c+abc+ab-c-1)z= & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x-by-cz= & 0 \\ (b+1)y-(c+1)z= & 0 \\ (2abc+ac+bc+ab-1)z= & 0 \end{array}\right.$$

Si $2abc+ab+bc+ca \neq 1$, le système a une unique solution $(0,0,0)$ donc $E \cap F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

Si $b=-1$, alors le système était $\left\{\begin{array}{rl} x+y-cz= & 0 \\ (-a-1)y+c(a+1)z= & 0 \\ -(c+1)z= & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3-L_2 \end{array}\right.$

Mais la condition devient

$$-2ac-a-c+ca \neq 1 \iff -a(c+1)-c-1 \neq 0 \iff -a(c+1)-(c+1) \neq 0 \iff -(a+1)(c+1) \neq 0.$$

Ainsi, dans ce cas, la condition se transforme en $a \neq -1$ et $c \neq -1$. Elle nous donne un système échelonné et là encore, une solution unique. Et ainsi, $E \cap F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

Dans tous les cas, on a $2abc+ab+bc+ca \neq 1 \implies E \cap F \cap G = \{(0,0,0)\}$.

Il y avait plus élégant (et possibilité d'éviter la discussion) à l'aide d'une remarque que nous ne verrons que plus tard. □

# 16 Dérivation

**Exercice 1.** 1. Remarquons que $f$ est la composition de ln qui est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*)$ et de $x \mapsto x+1$ qui est $\mathbb{C}^\infty(]-1,+\infty[)$ et strictement positive. Ainsi, $f$ est $\mathbb{C}^\infty(]-1,+\infty[)$.

Après quelques tentatives, on suppose que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in ]-1+\infty[, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Notons donc, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}(n)$ : « $\forall x \in ]-1+\infty[, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$. ».

En dérivant $f$, on trouve $\forall x \in ]-1,+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$, donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $\forall x \in ]-1+\infty[, f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, donc en dérivant,

$$\forall x \in ]-1+\infty[, f^{(n+1)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!(-n)}{(1+x)^{n+1}} = \frac{(-1)^n(n!)}{(1+x)^{n+1}}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a démontré par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x \in ]-1+\infty[, f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

□

2. On remarque que $f$ est bien $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ par somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

On conjecture que, pour $k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f^{(4k+4)}(x) = \cos(x)$.

En dérivant 4 fois, on montre que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $k \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vraie.

On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(4k+4)}(x) = \cos(x)$. En dérivant 4 fois, on trouve que $f^{(4k+8)}(x) = f^{(4(k+1)+4)}(x) = \cos(x)$.

Ainsi, $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

On a donc $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(4k+4)}(x) = \cos(x)$.

En dérivant une, deux ou trois fois, on récupère que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(4k+1)}(x) = -\sin(x)$, $f^{(4k+2)}(x) = -\cos(x)$, $f^{(4k+3)}(x) = \sin(x)$ et $f^{(4k+4)}(x) = \cos(x)$ (au passage, les trois premières sont vraies pour $k = 0$ ce qu'on montre en partant de la fonction). $\square$

**Exercice 2.** 1. $f$ est un polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5x^4 - 5 = 5(x^4 - 1) = 5(x^2+1)(x^2-1)$.

Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 5(x^2+1)(x-1)(x+1)$. Ainsi, on a

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $6$ | $\searrow$ | $-2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Sur $]-\infty, -1[$, $f$ est continue, strictement croissante avec $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $f(-1) > 0$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une unique racine.

Sur $]-1, 1[$, $f$ est continue, strictement décroissante avec $f(-1) > 0$ et $f(1) < 0$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une unique racine.

Enfin sur $]1, +\infty[$, $f$ est strictement croissante avec $f(1) < 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ donc $f$ s'annule une unique fois.

Elle ne s'annule ni en $-1$ ni en $1$.

Ainsi $f$ a exactement trois racines. $\square$

2. Remarquons que $g$ est un polynôme donc $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (dérivable suffira).

Ainsi, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 48x^3 - 42x^2 - 6x = 6x(8x^2 - 7x - 1)$. On remarque que 1 est racine évidente de $8x^2 - 7x - 1$, ainsi, comme le produit des racines vaut $-\dfrac{1}{8}$, l'autre racine est $-\dfrac{1}{8}$.

Ainsi, on a $g'(x) = 6x(8x+1)(x-1)$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{8}$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $8x-1$ | | $-$ | $0$ | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x$ | | $-$ | | $+$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-1$ | | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g'(x)$ | | $-$ | | $+$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $g$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $g\left(-\frac{1}{8}\right)$ | $\nearrow$ | $-4$ | $\searrow$ | $-9$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Sur $\left]-\infty,-\dfrac{1}{8}\right]$, $g$ est continue, strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = +\infty$ et $g\left(-\dfrac{1}{8}\right) \leqslant -4$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une unique racine.

Sur $\left[-\dfrac{1}{8},1\right]$, $g$ est strictement négative.

Enfin sur $[1,+\infty[$, $g$ est continue, strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ et $g(1) \leqslant -4$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une unique racine.

Ainsi, on a bien $g$ qui s'annule exactement deux fois. $\square$

3. $h$ est la combinaison linéaire de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ (la première étant un produit de telles fonctions), donc est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

   On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x + (x-1)e^x - e = xe^x - e$. Puis, on a $h''(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$. On voit que $h''(x)$ est du signe de $x+1$.

   De plus, on a $\lim\limits_{x\to-\infty} h'(x) = -e$ par croissances comparées et $\lim\limits_{x\to+\infty} h'(x) = +\infty$ (mais c'est moins indispensable) :

   Enfin, $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$ en factorisant par $xe^x$ alors qu'il faut tout développer pour avoir $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$.

   Ainsi, on peut en déduire le tableau de variations suivant

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $h'$ | $-e$ | $\searrow$ | $-e^{-1}-e$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |
| $h'(x)$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $h$ | $+\infty$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | $-e+1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Ainsi, sur $]-\infty,1]$, $h$ est continue, strictement décroissante avec $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = +\infty$ et $h(1) < 0$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une unique racine.

Puis sur $[1,+\infty[$, $h$ est continue, strictement croissante avec $h(1) < 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = +\infty$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, elle admet une unique racine.

Ainsi, en conclusion, $h$ s'annule exactement 2 fois. □

**Exercice 3.** 1. On peut remarquer que la fonction sh est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est combinaison linéaire de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ qui le sont.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{sh}'(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x) > 0$.

sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\mathrm{sh}(0) = 0$, donc $\mathrm{sh}(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{R}_-$ et $\mathrm{sh}(x) > 0$ pour $x \in R_+$. En résumé :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{ch}(x)$ | | | $+$ | | |
| sh | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

□

2. On peut remarquer que la fonction ch est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car elle est combinaison linéaire de $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ qui le sont.

   Par ailleurs, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{ch}'(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$.

   La dérivée de ch est sh, donc d'après la question précédente ch est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

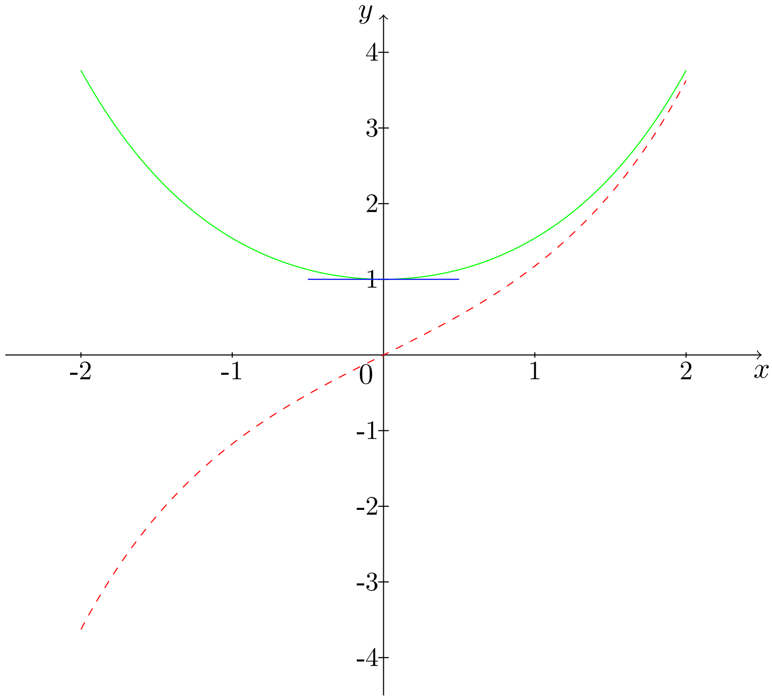
   On a

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\operatorname{sh}(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| ch | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

□

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x) = e^{-x} > 0$ donc la courbe de ch est toujours au-dessus de celle de sh.

   En pointillés, la courbe représentative de sh, en trait plein, celle de ch avec sa tangente horizontale




□

4. Sur $\mathbb{R}^*$, $f$ est le quotient de deux fonctions continues et dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas.

   En 0, on a, pour $h \neq 0$, $f(h) = \dfrac{\operatorname{sh}(h) - \operatorname{sh}(0)}{h}$, donc $f$ est le taux d'accroissement de sh en 0. Ainsi, comme on sait que $\operatorname{sh}'(0) = 1$, on a $\lim\limits_{h \to 0} f(h) = 1 = f(0)$. $f$ est donc bien continue en 0.

   On a, pour tout $x \neq 0$,
$$f'(x) = \frac{x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)}{x^2};$$

   Etudions le signe du numérateur en posant $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = x\operatorname{ch}(x) - \operatorname{sh}(x)$.

   On a $g$ est la combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ (la première étant un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$), et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$g'(x) = \operatorname{ch}(x) + x\operatorname{sh}(x) - \operatorname{ch}(x) = x\operatorname{sh}(x).$$

Or comme $x$ et $\text{sh}(x)$ sont de même signe, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) \geqslant 0$, donc $g$ est croissante.

De plus, $g(0) = 0$, donc $g$ est négative sur $\mathbb{R}_-$ et positive sur $\mathbb{R}_+$. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.

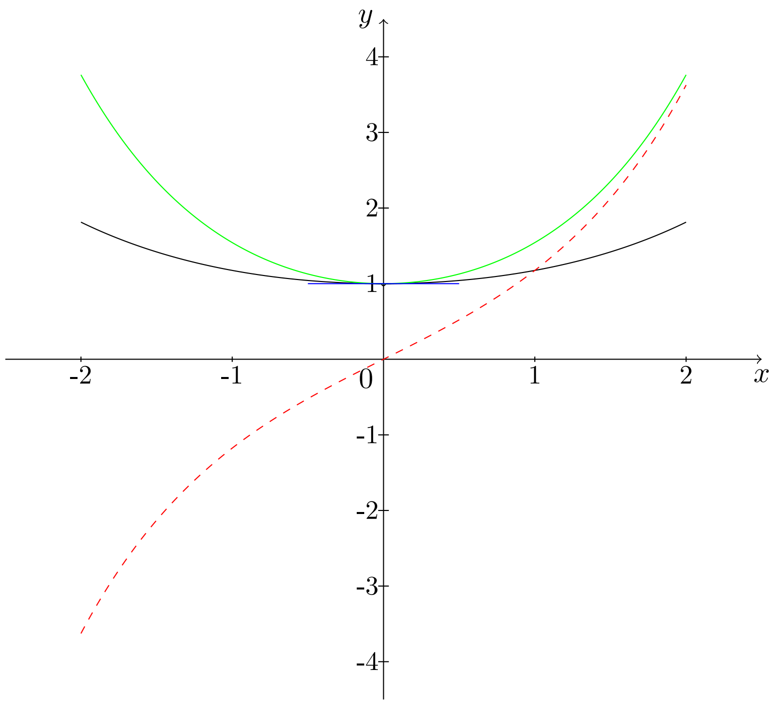
Par ailleurs, on a pour $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{e^x}{2x}(1 - e^{-2x})$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $f(x) = \dfrac{-e^{-x}}{2x}(1 - e^{2x})$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, ces deux limites obtenues par croissances comparées.

On peut en déduire le tableau de variation suivant :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

$\square$

5. On aurait pu chercher l'éventuelle tangente horizontale en 0, ou la position relative par rapport aux courbes précédentes.




$\square$

**Exercice 4.** Prenons $x \in I$ et $h \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + h \in I$.
On a
$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant K\,|h|^{\alpha}.$$
Autrement dit, comme $\alpha > 1$, on a
$$\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leqslant K\,|h|^{\alpha-1}.$$

Or, comme $\alpha - 1 > 0$, on a $\lim\limits_{h \to 0} |h|^{\alpha - 1} = 0$. Par encadrement, on a donc

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 0.$$

Cela revient à dire que, pour tout $x \in I$, $f$ est dérivable en $x$ et $f'(x) = 0$. Autrement dit, $f$ est constante sur $I$. $\square$

**Exercice 5.** 1. La fonction $x \longmapsto e^{2x} - 1$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, mais positive seulement sur $\mathbb{R}_+$ (strictement sur $\mathbb{R}_+^*$).

Ainsi, par composition avec la fonction racine qui est continue sur $\mathbb{R}_+$, $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. Cependant, comme la fonction racine n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$, $f$ n'est dérivable que sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f'(x) = \frac{2e^{2x}}{2\sqrt{e^{2x} - 1}} = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}}.$$

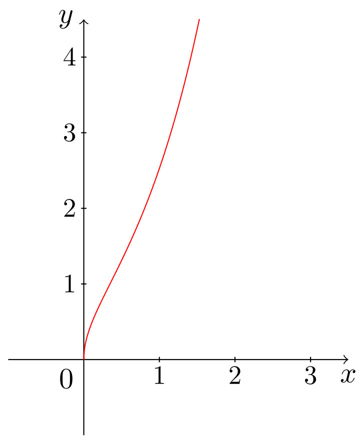
Ainsi, $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par composition, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc $\lim x \to +\infty f(x) = +\infty$.

Ainsi, on peut établir le tableau de variation suivant :

| $x$ | $0$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | |
| $f$ | $0$ $\nearrow$ | $+\infty$ |

Et l'allure est donnée par :




$\square$

2. $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$, strictement croissante avec $f(0) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, ainsi $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même. $\square$

3. Sur $\mathbb{R}_+^*$ $f$ est bijective et sa dérivée ne s'annule pas, donc on peut utiliser la formule de dérivation des fonctions réciproques et on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)} = \frac{\sqrt{e^{2f^{-1}(x)} - 1}}{e^{2f^{-1}(x)}}.$$

Or $\sqrt{e^{2f^{-1}(x)} - 1} = f(f^{-1}(x)) = x$ et $e^{2f^{-1}(x)} = (f(f^{-1}(x)))^2 + 1 = x^2 + 1$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $(f^{-1})'(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. □

4. Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Cherchons $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(x) = y$. C'est équivalent à

$$\begin{aligned} \sqrt{e^{2x} - 1} = y &\iff e^{2x} - 1 = y^2 \text{ car tout est positif} \\ &\iff e^{2x} = y^2 + 1 \\ &\iff 2x = \ln(y^2+1) \text{ car tout est strictement posifit} \\ &\iff x = \frac{\ln(y^2+1)}{2} \end{aligned}$$

$f^{-1}$ est définie que sur $\mathbb{R}_+$ par $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

On remarque qu'il s'agit d'une fonction dérivable (car composition d'un polynôme strictement positif avec ln qui est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$), et on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

□

**Exercice 6.** 1. Comme $x \longmapsto x^2 + 4$ est un polynôme, cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et en plus elle est strictement positive. Donc sa composition avec la fonction racine (dérivable sur $\mathbb{R}_+$) est dérivable sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par combinaison linéaire avec un autre polynôme, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} = 1 + \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Or $0 \leqslant x^2 < x^2+4$ donc en appliquant la fonction racine qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, on a

$$|x| < \sqrt{x^2+4} \iff \frac{|x|}{\sqrt{x^2+4}} < 1.$$

On a donc $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}} > -1$ donc $f'(x) > 0$.

Ainsi, $f'$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, sans difficulté, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Enfin, pour $x < 0$, on a $f(x) = x\left(1 + \dfrac{2}{x} - \sqrt{1 + \dfrac{4}{x^2}}\right)$.

Or comme, en 0, on a $\sqrt{1+h} = 1 + \dfrac{1}{2}h + o(h)$, on a pour $x \to -\infty$ (car $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x \to -\infty]{} 0$),

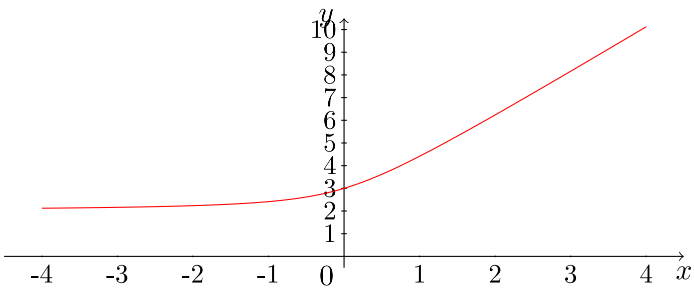
$$f(x) = x\left(1 + \frac{2}{x} - 1 - \frac{2}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) = 2 + o(1).$$

Ainsi, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 2$.

On peut enfin dresser le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | |
| $f$ | $2$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

Et l'allure est donnée par :




$\square$

2. On a $f$ continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante, avec $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, donc $f$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ dans $]2, +\infty[$. $\square$

3. Remarquons que $f$ est une bijection dérivable dont la dérivée ne s'annule pas, ainsi sa réciproque est dérivable sur $]2, +\infty[$ et on a, $\forall x \in ]2, +\infty[$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}.$$

Essayons d'exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$. On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Mais comme $x + \sqrt{x^2+4} = f(x) - 2$, on a

$$f'(x) = \frac{f(x)-2}{\sqrt{x^2+4}}.$$

Or, il semblerait que, pour $x \in \mathbb{R}$, on ait

$$\begin{aligned} \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}} &= \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{2(x-\sqrt{x^2+4})}{x^2-x^2-4} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} - \frac{x-\sqrt{x^2+4}}{2} \\ &= \sqrt{x^2+4}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{f(x)-2}{\frac{x+\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}}.$$

Mais comme $x+\sqrt{x^2+4}=f(x)-2$, on a

$$f'(x)=\frac{f(x)-2}{\frac{f(x)-2}{2}+\frac{2}{f(x)-2}}.$$

Ou encore

$$f'(x)=\frac{2(f(x)-2)^2}{(f(x)-2)^2+4}.$$

Ainsi,

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\frac{(x-2)^2+4}{2(x-2)^2}.$$

Ce qu'on peut agréablement simplifier en

$$(f^{-1})'(x)=\frac{x^2-4x+8}{2(x-2)^2}.$$

□

4. Soit $y\in]2,+\infty[$. Cherchons $x\in\mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned}
f(x)=y &\iff x+2+\sqrt{x^2+4}=y\\
&\iff \sqrt{x^2+4}=(y-x-2)\\
&\implies x^2+4=y^2+x^2+4-2xy-4y+4x\\
&\implies 0=y^2-2xy-4y+4x\\
&\implies 2x(y-2)=y^2-4y\\
&\implies x=\frac{y(y-4)}{2(y-2)}
\end{aligned}$$

Ainsi, comme nous sommes assurés de l'existence de cet antécédent et qu'il ne peut avoir qu'une valeur, on a bien $f^{-1}$ définie sur $]2,+\infty[$, par $\forall x\in]2,+\infty[$, $f^{-1}(x)=\dfrac{x(x-4)}{2(x-2)}$.

$f^{-1}$ est bien dérivable sur $]2,+\infty[$ (quotient de polynômes dont le dénominateur ne s'annule pas), et on a $\forall x\in]2,+\infty[$,

$$(f^{-1})'(x)=\frac{1}{2}\frac{(2x-4)(x-2)-x(x-4)}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+8}{2(x-2)^2}.$$

□

**Exercice 7.** Soit $c\in]a,b[$. Formons le taux d'accroissement en $c$.
Pour $h\in\mathbb{R}$ tel que $c+h\in]a,b[$, on a

$$\frac{|f(c+h)|-|f(c)|}{h}.$$

Si $f(c)>0$, on peut prendre $h$ assez petit tel que $f(c+h)$ soit positif. Ainsi,

$$\frac{|f(c+h)|-|f(c)|}{h}=\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\xrightarrow[h\to0]{}f'(c).$$

Si $f(c)<0$, on peut prendre $h$ assez petit tel que $f(c+h)$ soit négatif. Ainsi,

$$\frac{|f(c+h)|-|c|}{h}=\frac{-f(c+h)+f(c)}{h}=-\frac{f(c+h)-f(c)}{h}\xrightarrow[h\to0]{}-f'(c).$$

Si $f(c) = 0$, alors si
$$\frac{|f(c+h)| - |f(c)|}{h} = \frac{f(c+h)}{h}.$$
Si en plus $f'(c) = 0$, alors $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(c+h)}{h} = 0$ donc
$$\lim_{h\to 0} \frac{|f(c+h)| - |f(c)|}{h} = 0.$$

Si $f'(c) > 0$, alors puisque $\dfrac{f(c+h)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(c) \neq 0$, pour $h > 0$ assez petit, $f(c+h) > 0$ est du signe de $f'(c)$ donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{|f(c+h)|}{h} = f'(c)$ et pour $h < 0$ assez petit, c'est l'opposé, donc $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \dfrac{|f(c+h)|}{h} = -f'(c)$
Le taux d'accroissement n'admet pas de limite en 0. C'est la même chose (en changeant les signes) si $f'(c) < 0$.
Ainsi, on peut dire que si $f$ est dérivable, alors $|f|$ sera aussi dérivable lorsque $f$ ne s'annule pas ou lorsque sa dérivée est nulle. $\square$

**Exercice 8.** Notons $a_1, a_2, \ldots, a_n$, avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ les $n$ points où $f$ s'annule.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f$ est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$, et $f(a_i) = f(a_{i+1})$.
Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in ]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f'(c_i) = 0$.
Ainsi, on a $c_1 < c_2 < \ldots < c_{n-1}$ et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $f'(c_i) = 0$. Ainsi $f'$ s'annule bien $n-1$ fois.
Ensuite on considère une fonction $p$ fois dérivable qu'il s'annule $p$ fois. Montrons par récurrence que, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $f^{(k)}$ s'annule $p-k$ fois.
Notons $\mathcal{P}(k)$ : « $f^{(k)}$ s'annule $p-k$ fois ».
L'hypothèse nous assure la validité de $\mathcal{P}(0)$.
Soit $k \in [\![0, n-2]\!]$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(k)$ vrai.
On a $f^{(k)}$ s'annule $p-k$ fois d'après $\mathcal{P}(k)$. En utilisant la première partie de l'exercice appliquée à $f^{(k)}$ on obtient que $f^{(k+1)}$ s'annule $p-k-1 = p-(k+1)$ fois, soit $\mathcal{P}(k+1)$.
Ainsi, pour $k \in [\![0, p-1]\!]$, $f^{(k)}$ s'annule $p-k$ fois.
Enfin pour $k = p-1$, on remarque que $f^{(p-1)}$ s'annule une fois. $\square$

**Exercice 9.** Notons $(a_1, \ldots, a_n)$ les racines de $P$ avec $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Pour $i \in [\![1, n]\!]$, on note $d_i$ l'ordre de multiplicité de la racine $a_i$. Ainsi, on a $\deg(P) = \sum\limits_{k=1}^{n} d_k$ puisque toutes les racines de $P$ sont réelles comptées avec leurs multiplicités.
Pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $P$ est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, dérivable sur $]a_i, a_{i+1}[$, et $P(a_i) = 0 = P(a_{i+1})$.
Ainsi, d'après le théorème de Rolle, il existe $c_i \in ]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(c_i) = 0$.
Par ailleurs, pour $i \in [\![1, n]\!]$ tous les $a_i$ sont racines de $P'$ d'ordre $d_i - 1$.
Ainsi, on a déjà l'existence de $(n-1) + \sum\limits_{k=1}^{n} (d_i - 1)$ racines comptées avec leur ordre de multiplicité.
Cela fait en fait
$$(n-1) + \sum_{k=1}^{n} (d_i - 1) = n - 1 + \sum_{k=1}^{n} d_i - n = -1 + \deg(P) = \deg(P').$$
Ainsi, $P'$ n'a pas d'autres racines, elles sont toutes réelles. $\square$

**Exercice 10.** Remarquons que, si pour tout $x \in ]a, +\infty[$, $f(x) = f(a)$ alors $f$ est constante donc n'importe quel pour $c \in ]a, +\infty[$ convient.
Sinon, il existe $x_0 \in ]a, +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$. Supposons que $f(x_0) > f(a)$ (dans le cas contraire on appliquera tout ce que nous allons faire à $-f$ pour conclure).
Notons $k = \dfrac{f(x_0) + f(a)}{2}$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $f$ sur $]a, x_0[$, comme $k \in ]f(a), f(x_0)[$, il existe $b \in ]a, x_0[$ tel que $f(b) = k$.
De même, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à la fonction continue $f$ sur $]x_0, +\infty[$, comme $k \in ]f(x_0), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[$, il existe $b' \in ]x_0, +\infty[$ tel que $f(b') = k$.
On a $f$ continue sur $[b, b']$, dérivable sur $]b, b'[$, avec $f(b) = f(b')$, il existe $c \in ]b, b'[$ tel que $f'(c) = 0$. $\square$

**Exercice 11** (Théorème de Darboux)**.** On supposera $f'(a) < f'(b)$ (sinon, on appliquera la suite à $h = -f$).
Comme suggéré, on pose $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x) - kx$.
$g$ est continue sur $[a, b]$ donc atteint son minimum en un point $c \in [a, b]$.
Si $c \in ]a, b[$, comme $g$ est dérivable sur $]a, b[$, on a $g'(c) = 0$, soit $f'(c) = k$.
Le problème est si $c = a$ ou $c = b$.
On a, $g'(a) = f'(a) - k < 0$ donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \dfrac{g(a + h) - g(a)}{h} = g'(a) < 0$. Donc, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $h < \eta$, $g(a + h) - g(a) < 0$ (sinon, $g'(a) \geqslant 0$). Ainsi, $g$ ne peut pas être minimale en $a$.
De la même façon, On a, $g'(b) = f'(b) - k > 0$ donc $\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \dfrac{g(b + h) - g(b)}{h} = g'(b) > 0$.
Donc, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $|h| < \eta$, $g(b + h) - g(b) < 0$ (sinon, $g'(b) \leqslant 0$). Ainsi, $g$ ne peut pas être minimale en $b$.
Donc le minimum de $g$ est bien atteint sur $]a, b[$, ce qui permet de conclure. $\square$

**Exercice 12.** Soit $x \in [0, 2] \setminus \{0, 1, 2\rrbracket$ (si $x \in \{0, 1, 2\}$ ; on a $f(x) = 0$ donc c'est vrai pour n'importe quel $c$).
On pose alors $\varphi(t) = f(t) - \dfrac{t(t-1)(t-2)}{6}\lambda$ en prenant $\lambda$ tel que $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire $\lambda = \dfrac{6f(x)}{x(x-1)(x-2)}$.
$\varphi$ est $\mathcal{C}^3([0, 2], \mathbb{R})$ en tant que combinaison linéaire de telles fonctions.
On a $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = \varphi(x) = 0$. Supposons $x \in ]0, 1[$ (la démonstration est identique pour $x \in ]1, 2[$).
Sur chaque intervalle $[0, x]$, $[x, 1]$, $[1, 2]$, la fonction $\varphi$ est continue, dérivable sur l'ouvert et $\varphi$ a la même valeur aux bornes, donc en utilisant le théorème de Rolle, il existe $a_1 \in ]0, x[$, $a_2 \in ]x, 1[$, et $a_3 \in ]1, 2[$ tels que $\varphi'(a_1) = \varphi'(a_2) = \varphi'(a_3) = 0$.
On peut là aussi appliquer le théorème de Rolle à $\varphi'$ qui est $\mathcal{C}^2([0, 2])$ sur les intervalles $[a_1, a_2]$ et $[a_2, a_3]$, donc il existe $b_1 \in ]a_1, a_2[$ et $b_2 \in ]a_2, a_3[$ tels que $\varphi''(b_1) = \varphi''(b_2) = 0$.
Et on rapplique une nouvelle fois le théorème de Rolle à $\varphi''$ qui est $\mathcal{C}^1([0, 2])$ donc continue sur $[b_1, b_2]$ et dérivable sur l'ouvert $]b_1, b_2[$. On a donc l'existence d'un $c \in ]b_1, b_2[ \subset [0, 2]$ tel que $\varphi'''(c) = 0$.
Or, $\varphi(t) = f(t) - \dfrac{t^3 - 3t^2 + 2t}{6}\lambda$, donc $\varphi'''(t) = f'''(t) - \lambda$.
Ainsi, on a $\varphi'''(c) = 0$, donc $f'''(t) = \lambda$, soit $f'''(c) = \dfrac{6f(x)}{x(x-1)(x-2)}$ ou encore

$$f(x) = \frac{x(x-1)(x-2)}{6} f'''(c).$$

□

**Exercice 13.** 1. Notons $D = ]-1;+\infty[$. Remarquons que $x \mapsto \ln(1+x)$ est bien dérivable sur $D$ comme composition de deux fonctions dérivables avec $\forall x \in D$, $1+x > 0$. $f$ est alors le quotient de deux fonctions dérivables sur $D$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

On a alors $\forall x \in D$, $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{1+x}x - \ln(1+x)}{x^2}$.

Notons $h$ la fonction définie sur $D$, par $\forall x \in D$, $h(x) = \dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x)$. Comme $\forall x \in D$, $x^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.

Etudions $h$. Sur $D$, $h$ est la combinaison linéaire de deux fonctions dérivables (un quotient de polynôme dont le dénominateur ne s'annule pas et une autre déjà étudiée).

Ainsi, $\forall x \in D$, on a

$$h'(x) = \frac{1+x-x}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1-(1+x)}{(1+x)^2} = \frac{-x}{(1+x)^2}.$$

Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $-x$. On peut donc en déduire le tableau suivant.

| $x$ | $-1$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $-$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

Les limites sont calculées dans les questions suivantes.

□

2. En $-1$ on trouve par quotient de limite que $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = +\infty$.

Pour $x > 0$, on a $f(x) = \dfrac{\ln(x(1+\frac{1}{x})}{x} = \dfrac{\ln(x)}{x} + \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}$.

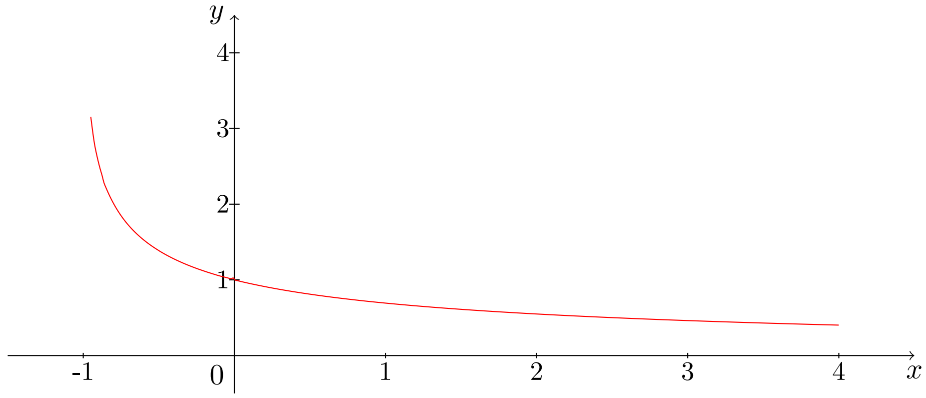
On a par croissances comparées $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Par composition, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{x}) = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} = 0$ par quotient.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

3. On remarque que $f(x) = \dfrac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}$. Ainsi, $f$ est le taux d'accroissement de la fonction ln en 1 donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Ainsi, on peut prolonger $f$ par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. □

4. On a




$\square$

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Cette inégalité est équivalente à $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$. La deuxième partie est déjà démontrée puisqu'on a vu précédemment que $f'(x) \leqslant 0$.

   Considérons donc $f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{h(x)}{x^2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2h(x) + x^2}{2x^2}$.

   Posons $h_1$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h_1(x) = 2h(x) + x^2$. Par combinaison linéaire de fonctions dérivables, $h_1$ est dérivable et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$h_1'(x) = 2h'(x) + 2x = -\frac{2x}{(1+x)^2} + \frac{2x(1+x)^2}{(1+x)^2} = \frac{2x[(1+x)^2 - 1]}{(1+x)^2} = \frac{2x^2(x+2)}{(1+x)^2}.$$

   Il s'agit d'un produit de termes positifs, donc $h_1'$ est positive, donc $h_1$ est croissante. Or $h_1(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $h_1(x) \geqslant 0$.

   Or, sur $\mathbb{R}_+^*$, $f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{h_1(x)}{x^2}$ donc est du signe de $h_1(x) \geqslant 0$.

   Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f'(x) + \dfrac{1}{2} \geqslant 0$, donc $-\dfrac{1}{2} \leqslant f'(x)$.

   Ainsi, on a montré que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f'(x)| \leqslant \dfrac{1}{2}$. $\square$

6. Posons $g$ la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $\forall x \in ]-1, +\infty[$, $g(x) = f(x) - x$.

   $g$ est la somme de deux fonctions strictement décroissante, donc $g$ est strictement décroissante. Par somme de limites, on a $\lim\limits_{x \to -1} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$. Comme en plus $g$ est continue sur $]-1, +\infty[$, on peut appliquer le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires et on a l'existence d'un unique $\alpha \in ]-1, +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$ soit $f(\alpha) = \alpha$.

   Par ailleurs, $g(0) = 1$ et $g(1) = f(1) - 1 < 0$ donc, le théorème des valeurs intermédiaires appliquée à la fonction $g$ continue sur $[0, 1]$ affirme que $g$ s'annule entre 0 et 1 strictement, donc $\alpha \in ]0, 1[$. $\square$

7. On a $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = f(u_{n-1}) \geqslant 0$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. Entre $u_n$ et $\alpha$, $f$ est donc continue (bornes incluses) et dérivables (bornes exclues) donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c$ compris strictement entre $u_n$ et $\alpha$ tel que

$$f(u_n) - f(\alpha) = f'(c)(u_n - \alpha) \iff u_{n+1} - \alpha = f'(c)(u_n - \alpha).$$

En prenant la valeur absolue, on obtient,

$$|u_{n+1} - \alpha| = |f'(c)| \, |u_n - \alpha| \, .$$

Or $c$ est strictement compris entre $u_n$ et $\alpha$, donc $c > 0$ et d'après la question précédente, on a $|f'(c)| \leqslant \dfrac{1}{2}$.

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \, |u_n - \alpha| \, .$$

□

8. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ ».

   Pour $n = 0$, on a bien $|u_0 - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^0}$ car $u_0 = 1$ et $\alpha \in [0, 1]$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \, |u_n - \alpha| \, .$

   Or d'après la propriété de récurrence, on a $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.

   Ainsi, on a
   $$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \, |u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

   Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   Donc pour tout entier naturel $n$, $|u_n - \alpha| \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. □

9. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \alpha| = 0$.

   Ainsi, on a
   $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \alpha.$$

   □

10. Naïvement, on fait

```
import math as m

def f(x):
    if x==0:
        return 1
    else:
        return m.log(1+x)/x

def alpha(eps):
    n=0
    u=1
    while 1/2**n >eps:
        u=f(u)
        n+=1
    return u
```

Attention à bien faire attention au calcul de $f(u)$ : il y a un problème quand $u = 0$.

Ou alors après avoir résolu $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$, on peut remplacer la dernière fonction par

```
def alpha(eps):
    u=0
    for k in range(m.ceil(-m.log(eps)/m.log(2))):
        u=f(u)
    return u
```

$\square$

**Exercice 14.** 1. a. $f$ est définie sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$.
Ensuite, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}+1} = \frac{e^{-x}}{e^{-2x}(e^{2x}+1)} = \frac{e^{x}}{e^{2x}+1} = f(x).$$

Donc $f$ est paire. $\square$

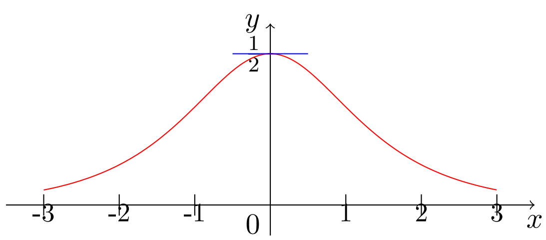
b. $f$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
Ainsi, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}+1) - 2e^{2x}e^x}{(e^{2x}+1)^2}$.
Ainsi,

$$f'(x) = \frac{e^x(e^{2x}+1-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2} = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2}.$$

Ainsi, il est clair que $f'(x)$ est du signe de $1-e^{2x}$.
Par ailleurs, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ donc par parité $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On dresse le tableau de variations :

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f$ | $0$ | $\nearrow$ | $\frac{1}{2}$ | $\searrow$ | $0$ |

Ainsi, on a




$\square$

c. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$, il est clair que ce $\ell$ s'il existe, est tel que $0 \leqslant \ell \leqslant \frac{1}{2}$.
Sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, définissons la fonction $g$ par $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $g(x) = f(x) - x$.

Cette fonction est continue (somme de fonctions continues), strictement décroissante (somme de fonctions strictement décroissantes) et $g(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} < 0$.

Ainsi, il existe un unique $\ell \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $g(\ell) = 0$ soit

$$f(\ell) = \ell.$$

□

d. Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{e^x(1-e^{2x})}{(e^{2x}+1)^2} = f(x)\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}.$$

Ainsi,

$$|f'(x)| = |f(x)| \left|\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}\right|.$$

Or, d'après l'inégalité triangulaire, $|1-e^{2x}| \leqslant |1| + |e^{2x}| = 1 + e^{2x}$ et on a $|1+e^{2x}| = 1 + e^{2x}$.

Ainsi, $\left|\frac{1-e^{2x}}{e^{2x}+1}\right| \leqslant 1$.

Ce qui donne,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant |f(x)| = f(x).$$

Or vu l'étude des variations, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \leqslant \frac{1}{2}$. □

2. a. Notons $\mathcal{P}(n)$ : « $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ».

D'après l'énoncé, $u_0 = 0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Or $u_{n+1} = f(u_n)$, mais on a vu que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Ainsi, $u_{n+1} \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. □

b. Soit $n \in \mathbb{N}$. Entre $u_n$ et $\ell$, $f$ est donc continue (bornes incluses) et dérivables (bornes exclues) donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c$ compris strictement entre $u_n$ et $\ell$ tel que

$$f(u_n) - f(\ell) = f'(c)(u_n - \ell \iff u_{n+1} - \ell = f'(c)(u_n - \ell).$$

En prenant la valeur absolue, on obtient,

$$|u_{n+1} - \ell| = |f'(c)| \, |u_n - \ell| \, .$$

Or on a vu que, peu importe la valeur de $c$, $|f'(c)| \leqslant \frac{1}{2}$.

Ainsi, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell| \, .$$

□

c. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$ ».

Pour $n = 0$, on a bien $|u_0 - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^1}$ car $u_0 = 0$ et $\ell \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.
Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a $|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell|$ .
Or d'après la propriété de récurrence, on a $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$.
Ainsi, on a

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2} |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+2}}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Donc pour tout entier naturel $n$, $|u_n - \ell| \leqslant \dfrac{1}{2^{n+1}}$. □

d. On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2^{n+1}} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} |u_n - \ell| = 0$.
Ainsi, on a

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell.$$

□

e. Naïvement, on fait

```
import math as m

def limite(eps):
    n=0
    u=0
    while 1/2**(n+1) >eps:
        u=m.exp(u)/(exp(2*u)+1)
        n+=1
    return u
```

Attention à bien faire attention au calcul de $f(u)$ : il y a un problème quand $u = 0$.
Ou alors après avoir résolu $\dfrac{1}{2(n+1)} \leqslant \varepsilon \iff n \geqslant -\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} - 1$, on peut remplacer la dernière fonction par

```
def limite(eps):
    u=0
    for k in range(m.ceil(-m.log(eps)/m.log(2))-1):
        u=m.exp(u)/(m.exp(2*u)+1)
    return u
```

□

# 17 Variables aléatoires

**Exercice 1.** On a $E(X) = 1 \times 0,1 + 2 \times 0,25 + 3 \times 0,25 + 4 \times 0,15 + 5 \times 0,15 + 6 \times 0,1$, ce qui donne $E(X) = 3,3$.
Ensuite, on calcule : $E(X^2) = 1^2 \times 0,1 + 2^2 \times 0,25 + 3^2 \times 0,25 + 4^2 \times 0,15 + 5^2 \times 0,15 + 6^2 \times 0,1$.
On a donc $E(X^2) = 13,1$.
Puis on trouve, d'après la formule de Koenig-Huygens, $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 13,1 - 10,89 = 2,21$. □

**Exercice 2.** 1. On a évidemment $X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.

On doit a avoir l'existence d'un coefficient de proportionnalité entre le numéro obtenu et la probabilité qu'il apparaisse. Ainsi, $\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1, 4]\!]]$, $P(X = k) = \alpha k$.

Par ailleurs, pour que $X$ soit une variable aléatoire, il faut et il suffit que $\forall k \in [\![1, 4]\!]$, $P(X = k) \geqslant 0$ donc $\alpha \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} P(X = k) = 1$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} P(X = k) = \sum_{k=1}^{4} \alpha k = \alpha \frac{4 \times 5}{2} = 10\alpha$.

Autrement dit, $X$ est bien une variable aléatoire si et seulement si $10\alpha = 1$.

On a donc, $\forall k \in [\![1, 4]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{k}{10}$. □

2. On a
$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{k^2}{10} = \frac{1 + 4 + 9 + 16}{10}$$
et donc $E(X) = 3$. □

3. On a
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(X = k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{k^3}{10} = \frac{1 + 8 + 27 + 64}{10} = 10$$
et donc d'après la formule de Koenig-Huygens
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = 10 - 9.$$
On a donc $V(X) = 1$. □

4. On a, d'après le théorème de transfert, comme $X$ ne s'annule pas,
$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{4} \frac{1}{k}\frac{k}{10} = \frac{4}{10}.$$
Ainsi, $E\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{2}{5}$. □

5. On va aller un peu plus vite. On a toujours évidemment $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$.

$\exists \alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall k \in [\![1, n]\!]]$, $P(X = k) = \alpha k$.

Par ailleurs, pour que $X$ soit une variable aléatoire, il faut et il suffit que $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) \geqslant 0$ donc $\alpha \geqslant 0$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = 1$.

Or $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha k = \alpha \frac{n(n+1)}{2}$.

Autrement dit, $X$ est bien une variable aléatoire si et seulement si $\alpha = \dfrac{2}{n(n+1)}$.

On a donc, $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{2k}{n(n+1)}$.

Ainsi,
$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^2}{n(n+1)} = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6n(n+1)}.$$

On a donc
$$E(X) = \frac{2n+1}{3}.$$
Puis
$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k^3}{n(n+1)} = \frac{2n^2(n+1)^2}{4n(n+1)}$$
ainsi
$$E(X^2) = \frac{n(n+1)}{2}.$$
Puis, d'après la formule de Koenig-Huygens
$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(2n+1)^2}{9}.$$
On a donc
$$V(X) = \frac{9n^2+9n-8n^2-8n-2}{18} = \frac{n^2+n-2}{18} = \frac{(n-1)(n+2)}{18}.$$
Et pour finir, comme $X$ ne s'annule pas, en utilisant le théorème de transfert :
$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} P(X=k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \frac{2k}{n(n+1)}.$$
Ainsi, $E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{2}{(n+1)}$.

□

**Exercice 3.** 1. $X(\Omega) = [\![1,4]\!]$. Notons $N_i$ l'événement « obtenir une boule noire au tirage $i$ ».

On a $(X=1) = \overline{N_1}$, donc $P(X_1 = 1) = P(\overline{N_1}) = \frac{7}{10}$.

Puis on a $(X=2) = N_1 \cap \overline{N_2}$, donc
$$P(X=2) = P(N_1 \cap \overline{N_2}) = P(N_1)P(\overline{N_2}|N_1) = \frac{3}{10}\frac{7}{9} = \frac{7}{30}$$
d'après la formule des probabilités composées car $P(N_1) \neq 0$.

Puis on a $(X=3) = N_1 \cap N_2 \cap \overline{N_3}$, donc
$$P(X=3) = P(N_1 \cap N_2 \cap \overline{N_3}) = P(N_1)P(N_2|N_1)P(\overline{N_3}|N_1 \cap N_2) = \frac{3}{10}\frac{2}{9}\frac{7}{8} = \frac{7}{120}$$
d'après la formule des probabilités composées car $P(N_1 \cap N_2) \neq 0$.

Pour la dernière, on peut soit faire la même chose, soit remarquer que comme $(X = i)_{i \in [\![1,4]\!]}$ est un système complet d'événements, on a
$$P(X=4) = 1 - P(X=1) - P(X=2) - P(X=3).$$

En tout cas, la loi de $X$ est donnée par loi est donnée par :

| Valeur $k$ de $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{7}{10}$ | $\frac{7}{30}$ | $\frac{7}{120}$ | $\frac{1}{120}$ |

□

2. Il est clair que l'on a $F_X(x) = 0$ pour $x < 1$ et $F_X(x) = 1$ pour $x \geqslant 4$.

On a, pour $x \in [1, 2[$, $F_X(x) = P(X = 1) = \dfrac{7}{10}$.

Puis pour $x \in [2, 3[$, $F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = \dfrac{14}{15}$.

Enfin, pour $x \in [3, 4[$, $F_X(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \dfrac{119}{120}$.

Ainsi, on a

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \dfrac{7}{10} & \text{si } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{14}{15} & \text{si } 2 \leqslant x < 3 \\ \dfrac{119}{120} & \text{si } 3 \leqslant x < 4 \\ 1 & \text{si } 4 \leqslant x. \end{cases}$$

□

3. On a

$$E(X) = \sum_{k=1}^{4} kP(X = k) = \frac{7}{10} + 2\frac{7}{30} + 3\frac{7}{120} + 4\frac{1}{120} = \frac{165}{120}$$

donc

$$E(X) = \frac{11}{8}.$$

Puis

$$E(X^2) = \sum_{k=1}^{4} k^2 P(X = k) = \frac{84}{120} + 4\frac{28}{120} + 9\frac{7}{120} + 16\frac{1}{120} = \frac{275}{120} = \frac{55}{24}.$$

puis d'après la formule de Koenig-Huygens,

$$V(X) = \frac{55}{24} - \frac{121}{64} = \frac{440 - 363}{192} = \frac{77}{192}.$$

□

**Exercice 4.** 1. C'est la même technique que l'exercice précédent.

$X(\Omega) = [\![1, 5]\!]$. Notons $B_i$ l'événement « obtenir une boule blanche au tirage $i$ ».

On a $(X = 1) = \overline{B_1}$, donc $P(X_1 = 1) = P(\overline{B_1}) = \dfrac{1}{2}$.

Puis on a $(X = 2) = B_1 \cap \overline{B_2}$, donc

$$P(X = 2) = P(B_1 \cap \overline{B_2}) = P(B_1)P(\overline{B_2}|B_1) = \frac{1}{2}\frac{4}{7} = \frac{2}{7}$$

d'après la formule des probabilités composées car $P(B_1) \neq 0$.

Puis on a $(X = 3) = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}$, donc

$$P(X = 3) = P(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(\overline{B_3}|B_1 \cap B_2) = \frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{4}{6} = \frac{1}{7}$$

d'après la formule des probabilités composées car $P(B_1 \cap B_2) \neq 0$.

On continue et on a $(X = 4) = B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}$, donc

$$P(X = 4) = P(B_1 \cap B_2 \cap B_3 \cap \overline{B_4}) = P(B_1)P(B_2|B_1)P(B_3|B_1 \cap B_2)P(\overline{B_4}|B_1 \cap B_2 \cap B_3),$$

donc
$$P(X=4)=\frac{1}{2}\frac{3}{7}\frac{2}{6}\frac{4}{5}=\frac{2}{35}$$
d'après la formule des probabilités composées car $P(B_1\cap B_2\cap B_3)\neq 0$.

Pour la dernière, on peut soit faire la même chose, soit remarquer que comme $(X=i)_{i\in[\![1,5]\!]}$ est un système complet d'événements, on a
$$P(X=5)=1-P(X=1)-P(X=2)-P(X=3)-P(X=4).$$

Ainsi,
$$P(X=5)=1-\frac{1}{2}-\frac{2}{7}-\frac{1}{7}-\frac{2}{35}=\frac{1}{70}.$$

En tout cas, la loi de $X$ est donnée par loi est donnée par :

| Valeur $k$ de $X$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X=k)$ | $\frac{35}{70}$ | $\frac{20}{70}$ | $\frac{10}{70}$ | $\frac{4}{70}$ | $\frac{1}{70}$ |

On a donc
$$E(X)=\sum_{k=1}^{5}kP(X=k)=\frac{35+2\times 20+3\times 10+4\times 4+5}{70}=\frac{126}{70}=\frac{9}{5}.$$

On a
$$E(X^2)=\sum_{k=1}^{5}k^2P(X=k)=\frac{35+4\times 20+9\times 10+16\times 4+25}{70}=\frac{294}{70}=\frac{21}{5}.$$

On a plus qu'à appliquer la formule de Koenig-Huygens pour obtenir
$$V(X)=E(X^2)-(E(X))^2=\frac{21}{5}-\frac{81}{25}=\frac{24}{25}.$$

□

2. Remarquons que $Y=X-1$ (le nombre de boules blanches est le nombre de boules piochées moins la boule noire qu'on a fini par obtenir), on en déduit donc immédiatement que $Y(\Omega)=[\![0,4]\!]$ et on retrouve la loi dans le tableau suivant :

| Valeur $k$ de $Y$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(Y=k)$ | $\frac{35}{70}$ | $\frac{20}{70}$ | $\frac{10}{70}$ | $\frac{4}{70}$ | $\frac{1}{70}$ |

Par linéarité de l'espérance, on récupère $E(Y)=E(X-1)=E(X)-1=\frac{4}{5}$, puis $V(Y)=V(X-1)=V(X)=\frac{24}{25}$.

□

**Exercice 5.** 1. $X$ suit une loi binomiale de paramètres $(5,\frac{1}{2})$, puisque $X$ compte le nombre de succès à l'épreuve ≪ obtenir une boule blanche en piochant dans l'urne ≫ répétée 5 fois de façon indépendante (il y a remise) et de probabilité de succès $\frac{1}{2}$. Son espérance est donc $E(X)=\frac{5}{2}$ et sa variance $V(X)=\frac{5}{4}$. □

2. Même chose, il suffit d'échanger noir et blanc. □

**Exercice 6.** 1. On remarque que $X(\Omega) = [\![1, 4]\!]$.

On note $B_i$ l'événement « obtenir une boule blanche au tirage $i$ ». Ainsi, on a

$$\begin{aligned}(X=1) = \quad & ((B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) \cup (\overline{B}_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) \\ & \cup(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) \cup (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap B_4 \cap \overline{B}_5) \\ & \cup(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap B_5)).\end{aligned}$$

Par incompatibilité des événements, on a

$$\begin{aligned}P(X=1) = \quad & P(B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) + P(\overline{B}_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) \\ & +P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) + P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap B_4 \cap \overline{B}_5) \\ & +P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap B_5).\end{aligned}$$

Par la formule des probabilités composées, on a

$P(B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) = P(B_1)P(\overline{B_2}|B_1)P(\overline{B}_3|B_1 \cap \overline{B}_2)P(\overline{B}_4|B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3)P(\overline{B}_5|B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4)$.

Ainsi, $P(B_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5) = \frac{4}{8}\frac{4}{7}\frac{3}{6}\frac{2}{5}\frac{1}{4} = \frac{1}{70}$.

On remarque de la même façon que $P(\overline{B}_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5 = \frac{1}{70}$, puis que $P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap B_3 \cap \overline{B}_4 \cap \overline{B}_5 = \frac{1}{70}$, $P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap B_4 \cap \overline{B}_5 = \frac{1}{70}$ et enfin $P(\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4 \cap B_5 = \frac{1}{70}$

Ainsi, $P(X=1) = \frac{5}{70} = \frac{1}{14}$.

Par symétrie en échangeant blanc et noir, on réalise que $P(X=4) = P(X=1)$. De plus, toujours pas symétrie, $P(X=2) = P(X=3)$.

Enfin, il suffit de remarquer que $\sum_{k=1}^{4} P(X=k) = 1$ pour récupérer $P(X=2) = \frac{6}{14}$.

En résumé, on a $P(X=1) = P(X=4) = \frac{1}{14}$ et $P(X=2) = P(X=3) = \frac{3}{7}$.

Sinon, en faisant du dénombrement (pour se préparer à l'exercice 16) on numérote les boules (les blanches de 1 à 4, les noires de 5 à 8), $\Omega$ est l'ensemble des 5-listes sans répétitions de $[\![1, 8]\!]$. Son cardinal est donc $\frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$. Munissons-le de la probabilité uniforme.

L'événement $(X=k)$ consiste à avoir pioché $k$ boules blanches et $5-k$ boules noires. Le nombre de façons de fixer les $k$ boules blanches et $5-k$ boules noires obtenues est $\binom{4}{k}\binom{4}{5-k}$. Il y a 5! façons de les ordonner, ainsi $\mathrm{Card}(X=k) = 5!\binom{4}{k}\binom{4}{5-k}$.

On a donc

$$P(X=k) = \frac{5!\binom{4}{k}\binom{4}{5-k}}{\frac{8!}{3!}} = \frac{5!3!(4!)^2}{k!(4-k)!(5-k)!(k-1)!8!}.$$

En remplaçant $k$ par les valeurs qu'il doit prendre, on récupère $P(X=1) = \frac{1}{14}$, $P(X=2) = \frac{3}{7}$, $P(X=3) = \frac{3}{7}$ et enfin $P(X=4) = \frac{1}{14}$.

Ensuite, on a

$$\begin{aligned}
E(X) = & \sum_{k=1}^{4} kP(X=k) \\
= & 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{6}{14} + 3 \times \frac{6}{14} + 4 \times \frac{1}{14} \\
= & \frac{35}{14} \\
= & \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}
E(X^2) = & \sum_{k=1}^{4} kP(X=k) \\
= & 1^2 \times \frac{1}{14} + 2^2 \times \frac{6}{14} + 3^2 \times \frac{6}{14} + 4^2 \times \frac{1}{14} \\
= & \frac{95}{14}
\end{aligned}$$

Enfin, d'après la formule de Koenig-Huygens, on a

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{95}{14} - \frac{25}{4} = \frac{190-175}{28} = \frac{15}{28}.$$

□

2. Même chose, il suffit d'échanger noir et blanc. □

**Exercice 7.** 1. C'est une uniforme sur $[\![1, 2n]\!]$, donc $E(X_1) = \dfrac{2n+1}{2}$ et $V(X_1) = \dfrac{4n^2-1}{12}$. □

2. On a $X_2(\Omega) = [\![1, 2n]\!]$. Il faut utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événement $(B_k, \overline{B_k})$ où $B_k$ est l'événement : « le premier numéro est strictement inférieur à $k$ » pour calculer chacune des probabilités ci-dessous en remarquant que $B_k$ et $\overline{B_k}$ sont bien non-négligeables.

   Pour $i \geqslant k$,

$$\begin{aligned}
P(X_2 = i) = & P(X_2 = i|B_k)P(B_k) + P(X_2 = i|\overline{B_k})P(\overline{B_k}) \\
= & \frac{1}{2n}\frac{k-1}{2n} + \frac{1}{2n-(k-1)}\frac{2n-(k-1)}{2n} \\
= & \frac{2n+k-1}{4n^2}
\end{aligned}$$

   Le point subtil est : $P(X_2 = i|\overline{B_k}) = \dfrac{1}{2n-(k-1)}$ parce qu'on cherche la probabilité d'avoir pioché la boule numéro $i$ sachant qu'on a pioché une boule dont le numéro est supérieur ou égal à $k$, alors que $P(X_2 = i|B_k) = \dfrac{1}{2n}$ puisqu'on pioche une nouvelle boule.

Pour $i < k$,

$$\begin{aligned}
P(X_2 = i) = &\quad P(X_2 = i|B_k)P(B_k) + P(X_2 = i|\overline{B_k})P(\overline{B_k}) \\
= &\quad \frac{1}{2n}\frac{k-1}{2n} + 0\frac{2n-k+1}{2n} \\
= &\quad \frac{k-1}{4n^2}.
\end{aligned}$$

Il suffit ensuite de calculer l'espérance (qui existe bien puisque les valeurs prises par $X_2$ forment un ensemble fini).

On a

$$\begin{aligned}
E(X_2) = &\quad \sum_{i=1}^{2n} iP(X_2 = i) \\
= &\quad \sum_{i=1}^{k-1} iP(X_2 = i) + \sum_{i=k}^{2n} iP(X_2 = i) \\
= &\quad \sum_{i=1}^{k-1} i\frac{k-1}{4n^2} + \sum_{i=k}^{2n} i\frac{2n+k-1}{4n^2} \\
= &\quad \frac{k-1}{4n^2}\sum_{i=1}^{k-1} i + \frac{2n+k-1}{4n^2}\sum_{i=k}^{2n} i.
\end{aligned}$$

Or $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{(k-1)k}{2}$ et

$$\sum_{i=k}^{2n} i = \sum_{i=1}^{2n} i - \sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(X_2) = &\quad \frac{k-1}{4n^2}\frac{(k-1)k}{2} + \frac{2n+k-1}{4n^2}\left[\frac{2n(2n+1)}{2} - \frac{(k-1)k}{2}\right] \\
= &\quad \frac{k(k-1)^2 + (2n+k-1)\left[2n(2n+1) - k(k-1)\right]}{8n^2} \\
= &\quad \frac{2n(2n+1)(2n+k-1) - 2nk(k-1)}{8n^2} \\
= &\quad \frac{2n(4n^2 + 2nk - 2n + 2n + k - 1 - k^2 + k)}{8n^2} \\
= &\quad \frac{-k^2 + (2n+2)k + 4n^2 - 1}{4n} \\
= &\quad \frac{-(k-n-1)^2 + 5n^2 + 2n}{4n}
\end{aligned}$$

en prenant la forme canonique. Elle est maximale pour $k = n+1$ et on trouve $E(X_2) = \dfrac{5n+2}{4}$. □

**Exercice 8.** 1. Voilà une question relativement simple : $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. □

2. On note $B_i$ l'événement : « on obtient une boule blanche au tirage $i$. » On a vu que $X_1(\Omega) = [\![0, 1]\!]$.

On a $(X_1 = 1) = B_1$ donc $P(X_1 = 1) = P(B_1) = \dfrac{1}{2}$ puis, comme $((X_1 = 0), (X_1 = 1))$ forme un système complet d'événements, $P(X_1 = 0) = 1 - P(X_1 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Pour $X_2$, on a vu que $X_2(\Omega) = [\![0, 2]\!]$. Ainsi, on a $(X_2 = 0) = \overline{B_1} \cap \overline{B_2}$, donc

$$P(X_2 = 0) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}|\overline{B_1}) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}$$

d'après la formule des probabilités composées car $P(\overline{B_1}) \neq 0$.

Puis de la même façon, $(X_2 = 2) = B_1 \cap B_2$, donc

$$P(X_2 = 2) = P(B_1)P(B_2|B_1) = \frac{1}{2}\frac{2}{3}$$

d'après la formule des probabilités composées car $P(B_1) \neq 0$.

Pour terminer, on sait que $(X_2 = i)_{i\in[\![0,2]\!]}$ est un système complet d'événements, donc

$$P(X_2 = 1) = 1 - P(X_2 = 0) - P(X_2 = 2) = \frac{1}{3}.$$

On aurait aussi pu dire que $(X_2 = 1) = (B_1 \cap \overline{B_2}) \cup (\overline{B_1} \cap B_2)$ puis calculer la probabilité de cet événement.

Ainsi, $X_1$ et $X_2$ suivent des lois uniformes sur l'ensemble des valeurs qu'elles prennent. □

3. La technique que nous venons d'employer ne va pas fonctionner. Ainsi, nous allons procéder par récurrence en posant $\mathcal{P}(n)$ « $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n]\!])$. »

   Remarquons que l'initialisation a été faite pour $n = 1$ et $n = 2$ dans la question précédente.

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

   On a déjà vu que $X_{n+1}(\Omega) = [\![0, n + 1]\!]$.

   Soit $k \in [\![0, n+1]\!]$, en utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements non négligeables $(X_n = i)_{i\in[\![0,n]\!]}$, on a

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{i=0}^{n} P(X_{n+1} = k|X_n = i)P(X_n = i).$$

   Or, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $P(X_n = i) = \dfrac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} P(X_{n+1} = k|X_n = i).$$

   Si $k \in [\![1, n]\!]$, remarquons que $P(X_{n+1} = k|X_n = i) = 0$ sauf si $i = k$ ou $i = k - 1$ car le nombre de boules blanches obtenues au rang $n + 1$ ne peut être égal qu'à celui qu'on avait au rang $n$ ou éventuellement à celui-ci plus 1.

   Et on a

$$P(X_{n+1} = k|X_n = k - 1) = \frac{k}{n+2}$$

   car il y a $n+2$ boules dans l'urne après $n$ tirages dont $k$ blanches si on a obtenu $k-1$ blanches.

De plus, on a

$$P(X_{n+1} = k | X_n = k) = \frac{(n+2) - (k+1)}{n+2} = \frac{n+1-k}{n+2}$$

car il y a $n+2$ boules dans l'urne après $n$ tirages dont $k+1$ blanches si on a obtenu $k$ blanches.

Ainsi,

$$P(X_{n+1} = k) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n+2} + \frac{n+1-k}{n+2}\right) = \frac{1}{n+2}.$$

Pour $k = 0$, le seul terme non nul est celui en $i = 0$, donc

$$P(X_{n+1} = 0) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1-0}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Pour $k = n+1$, le seul terme non nul est celui en $i = n$, donc

$$P(X_{n+1} = n+1) = \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{n+2} = \frac{1}{n+2}.$$

Ainsi, $X_{n+1} \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, n+1]\!])$ et donc $P(n+1)$ est vraie.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n$ suit une loi uniforme sur $[\![0, n]\!]$. $\square$

**Exercice 9** (Un peu difficile)**.** 1. a. $X(\Omega) = [\![1, 2n-1]\!]$.

Le plus simple est de déterminer $P(X > k)$ pour $k \in [\![0, 2n-2]\!]$.

En effet l'événement $(X > k)$ consiste à n'avoir pioché que des cartes qui ne sont pas un as noir en $k$ tirages. Si on considère que l'univers est l'ensemble des combinaisons de $k$ cartes prises dans un jeu de 52 cartes, il a pour cardinal $\binom{2n}{k}$ et $\text{Card}(X > k) = \binom{2n-2}{k}$.

Autrement dit

$$P(X > k) = \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2n(2n-1)}.$$

Remarquons que ce résultat est vrai pour $k = 2n-1$ ou $k = 2n$.

De plus, pour $k \in [\![1, 2n-1]\!]$

$$\begin{aligned} P(X = k) = &\ P(X > k-1) - P(X > k) \\ = &\ \frac{(2n-k+1)(2n-k)}{2n(2n-1)} - \frac{(2n-k)(2n-k-1)}{2n(2n-1)} \\ = &\ \frac{(2n-k)(2n-k+1-2n+k+1)}{2n(2n-1)} \\ = &\ \frac{2(2n-k)}{2n(2n-1)}. \end{aligned}$$

Autrement dit, $\forall k \in [\![1, 2n-1]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$. $\square$

b. On a
$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{2n-1} kP(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{2n-1} k\frac{2n-k}{n(2n-1)}\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\sum_{k=1}^{2n-1} k - \sum_{k=1}^{2n-1} k^2\right)\\
&= \frac{1}{n(2n-1)}\left(2n\frac{2n(2n-1)}{2} - \frac{2n(2n-1)(4n-1)}{6}\right)\\
&= \frac{12n^2(2n-1)-2n(2n-1)(4n-1)}{6n(2n-1)}\\
&= \frac{2n(2n-1)[6n-(4n-1)]}{6n(2n-1)}\\
&= \frac{2n+1}{3}
\end{aligned}$$

□

c. $G_1 = -X + a$ donc, par linéarité de l'espérance
$$E(G_1) = \frac{3a-2n-1}{3}.$$

□

d. Ai-je besoin de détailler le résultat ? On doit prendre $a = \dfrac{2n+1}{3}$. □

2. a. Il suffit de réaliser qu'on a fait une bonne partie.
On a $G_2(\Omega) = \{-n\} \cup [\![a-n, a-1]\!]$. Ensuite,
$\forall k \in [\![1,n]\!], P(G_2 = -k+a) = \dfrac{2n-k}{n(2n-1)}$, autrement dit $\forall \ell \in [\![a-n, a-1]\!]$,
$P(G_2 = \ell) = \dfrac{2n-a+\ell}{n(2n-1)}$
On a $P(G_2 = -n) = 1 - P(X \leqslant n)$ Or
$$\begin{aligned}
P(X \leqslant n) &= \sum_{k=1}^{n} P(X=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{2n-k}{n(2n-1)}\\
&= \frac{2n^2}{n(2n-1)} - \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{k=1}^{n} k\\
&= \frac{2n^2}{n(2n-1)} - \frac{1}{n(2n-1)}\frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{4n^2-n(n+1)}{2n(2n-1)}\\
&= \frac{3n^2-n}{2n(2n-1)}
\end{aligned}$$
et $P(G_2 = -n) = 1 - \dfrac{3n^2-n}{2n(2n-1)} = \dfrac{n^2-n}{2n(2n-1)} = \dfrac{n-1}{2(2n-1)}$. □

b. Allons-y, c'est long et assez pénible mais pas très difficile.

$$\begin{aligned}
E(G_2) &= \sum_{k\in G_2(\Omega)} kP(G_2=k)\\
&= -n\frac{n-1}{2(2n-1)} + \sum_{k=a-n}^{a-1} k\frac{2n-a+k}{n(2n-1)}\\
&= -n\frac{n-1}{2(2n-1)} + \sum_{i=0}^{n-1}(i+a-n)\frac{n+i}{n(2n-1)} \text{ avec } i=k-a+n\\
&= -n\frac{n-1}{2(2n-1)} + \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}(i+a-n)(n+i)\\
&= -n\frac{n-1}{2(2n-1)} + \frac{1}{n(2n-1)}\sum_{i=0}^{n-1}(i^2+ai+n(a-n))\\
&= -n\frac{n-1}{2(2n-1)} + \frac{1}{n(2n-1)}\left(\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}+a\frac{n(n-1)}{2}+n^2(a-n)\right)\\
&= -n\frac{n-1}{2(2n-1)} + \frac{(n-1)(2n-1)+3a(n-1)+6n(a-n)}{6(2n-1)}\\
&= -\frac{3n^2-3n}{6(2n-1)} + \frac{-4n^2+(-3+3a+6a)n+1-3a}{6(2n-1)}\\
&= \frac{-7n^2+9an+1-3a}{6(2n-1)}\\
&= \frac{-7n^2+1+3(3n-1)a}{6(2n-1)}.
\end{aligned}$$

On a donc $E(G_2)=\dfrac{-7n^2+1+3(3n-1)a}{6(2n-1)}$, donc pour avoir un jeu équilibré, on doit prendre $a=\dfrac{7n^2-1}{3(3n-1)}$. □

**Exercice 10.** On a $E(X)=\sum_{k=0}^{n} kP(X=k)=\sum_{k=1}^{n} kP(X=k)$.
Or, $\forall k\in [\![1,n]\!]$, $P(X=k)=P(X>k-1)-P(X>k)$ car $(X=k)\cup(X>k)=(X>k-1)$ avec une union disjointe. Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=1}^{n} kP(X>k-1)-kP(X>k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} kP(X>k-1)-\sum_{k=1}^{n} kP(X>k)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(i+1)P(X>i)-\sum_{k=1}^{n} kP(X>k) \text{ en posant dans la première somme } i=k-1\\
&= \sum_{i=0}^{n-1} iP(X>i)+\sum_{i=0}^{n-1} P(X>i)-\sum_{k=1}^{n} kP(X>k)\\
&= 0P(X>0)+\sum_{i=0}^{n-1} P(X>i)-nP(X>n)
\end{aligned}$$

en simplifiant les termes de la somme qui peuvent l'être.
Remarquons alors que $P(X>n)=0$, donc en fait, il ne reste plus que

$$E(X)=\sum_{i=0}^{n-1} P(X>i).$$

□

**Exercice 11.** 1. Notons $\Omega$ l'ensemble des 3-listes d'éléments de $[\![1,n]\!]$ qui modélise notre expérience et munissons-le de la probabilité uniforme.

On a $\Omega = [\![1,n]\!]^3$, donc $\text{Card}(\Omega) = n^3$.

Par ailleurs $(X > k) = [\![k+1,n]\!]^3$ puisque tous les numéros doivent être strictement plus grands que $k$.

Ainsi, $\text{Card}(X > k) = (n-k)^3$.

On a donc $P(X > k) = \left(\dfrac{n-k}{n}\right)^3$. □

2. On trouve $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{n-k}{n}\right)^3$. En posant $\ell = n-k$, on a

$$E(X) = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\ell}{n}\right)^3 = \frac{1}{n^3}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

On a donc

$$E(X) = \frac{(n+1)^2}{4n}.$$

□

**Exercice 12.** Tout d'abord, remarquons que $X(\Omega) = [\![0,20]\!]$.
Notons $F_i$ l'événement ≪ on a obtenu face au lancer $i$ ≫.
On a alors pour tout $k \in [\![1,20]\!]$, $(X = k) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \cap \overline{F_k}$.
On a bien entendu, $P(X = k) = P\left(\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k-1} F_i \cap \overline{F_k}\right)$, puis par indépendance des lancers

$$P(X = k) = \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{2}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2^k}.$$

Par ailleurs, $(X = 0) = \displaystyle\bigcap_{i=1}^{20} F_i$ et comme ci-dessus, on applique $P$ puis par indépendance des lancers, on récupère :

$$P(X = 0) = \prod_{i=1}^{20} \frac{1}{2} = \frac{1}{2^{20}}.$$

On peut passer au calcul de l'espérance.
Première façon : On remarque qu'on nous suggère d'utiliser l'exercice 10, donc déterminons, pour $k \in [\![1,20]\!]$,

$$P(X > k) = \sum_{i=k+1}^{20} P(X = i) = \sum_{i=k+1}^{20} \frac{1}{2^i} = \frac{1}{2^{k+1}} \sum_{i=k+1}^{20} \frac{1}{2^{i-k-1}}.$$

En posant $\ell = i-k-1$, on a $P(X > k) = \dfrac{1}{2^{k+1}} \displaystyle\sum_{\ell=0}^{20-k-1} \frac{1}{2^\ell}$.

Autrement dit

$$P(X > k) = \frac{1}{2^{k+1}} \frac{1 - \frac{1}{2^{20-k}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{20}}.$$

Il ne reste plus qu'à calculer $E(X) = \sum_{k=0}^{19} P(X > k) = \sum_{k=0}^{19} \left(\frac{1}{2^k} - \frac{1}{2^{20}}\right)$.
On a donc :

$$\begin{aligned} E(X) = & \sum_{k=0}^{19} \frac{1}{2^k} - \frac{20}{2^{20}} \\ = & \frac{1 - \frac{1}{2^{20}}}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{20}{2^{20}} \\ = & 2 - \frac{2}{2^{20}} - \frac{20}{2^{20}}. \end{aligned}$$

Donc

$$E(X) = 2 - \frac{11}{2^{19}}.$$

Deuxième façon :
On a $E(X) = \sum_{k=0}^{20} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{20} kP(X = k)$ car le premier terme est nul.
On a donc $E(X) = \sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^{k-1}}$.
En utilisant l'astuce et en développant, on récupère :

$$\begin{aligned} E(X) = & \left(1 - \frac{1}{2}\right)\sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^{k-1}} \\ = & \sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^{k-1}} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^{k-1}} \\ = & \sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^{k-1}} - \sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^k} \\ = & \sum_{\ell=0}^{19}(\ell + 1)\frac{1}{2^\ell} - \sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^k} \text{ en posant } \ell = k - 1 \\ = & \sum_{\ell=0}^{19} \ell\frac{1}{2^\ell} + \sum_{\ell=0}^{19} \frac{1}{2^\ell} - \sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^k} \\ = & 0 + \sum_{\ell=1}^{19} \ell\frac{1}{2^\ell} + \frac{1 - \frac{1}{2^{20}}}{1 - \frac{1}{2}} - \sum_{k=1}^{19} k\frac{1}{2^k} - \frac{20}{2^{20}} \\ = & 2 - \frac{2}{2^{20}} - \frac{20}{2^{20}}. \end{aligned}$$

Soit

$$E(X) = 2 - \frac{11}{2^{19}}.$$

La dernière solution était de considérer, pour $x \in ]-1, 1[$, $\sum_{k=0}^{20} x^k = \frac{1 - x^{21}}{1 - x}$, de dériver cette égalité en le justifiant (on trouve $\sum_{k=1}^{20} kx^{k-1} = \frac{-21x^{20}(1 - x) + x(1 - x^{21})}{(1 - x)^2}$)et de l'appliquer en $x = \frac{1}{2}$ pour obtenir $\sum_{k=1}^{20} k\frac{1}{2^{k-1}}$ qui est exactement le double de la valeur recherchée (c'est la technique la plus facile). □

**Exercice 13.** 1. Notons, pour tout l'exercice, $B_i$ : « obtenir une boule blanche au $i$ème tirage ».

Il est clair que $Y_1(\Omega) = \{1, 2\}$ (soit on n'a pas changé la composition, soit on a enlevé une blanche).

On a $(Y_1 = 1) = B_1$, donc $P(Y_1 = 1) = P(B_1) = \dfrac{2}{3}$.

Et $(Y_1 = 2) = \overline{B_1}$, donc $P(Y_1 = 2) = \dfrac{1}{3}$. $\square$

2. On a $Y_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

   On a $(Y_n = 2) = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}$, donc $P(Y_n = 2) = P\left(\bigcap_{i=1}^{n} \overline{B_i}\right)$.

   En utilisant la formule des probabilités composées, on a

$$P(Y_n = 2) = P(\overline{B_1})P(\overline{B_2}|\overline{B_1}) \dots P(\overline{B_n}|\bigcap_{i=1}^{n-1} \overline{B_i}).$$

   Or, tant qu'on pioche des boules noires la composition de l'urne ne change pas, ainsi :

$$P(Y_n = 2) = \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{3^n}$$

   (et au passage, l'hypothèse de la formule est bien vérifiée).

   $(Y_n = 1)$ correspond à l'événement « on a pioché une seule boule blanche », ainsi $(Y_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{n} B_k \left(\bigcap_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{n} \overline{B_i}\right)$ ce qu'on peut écrire

$$(Y_n = 1) = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}.$$

   On a donc :

$$P(Y_n = 1) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} \overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}\right).$$

   Comme l'union est disjointe :

$$P(Y_n = 1) = \sum_{k=1}^{n} P\left(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}\right).$$

   On applique encore une fois la formule des probabilités composées et on a :

$$\begin{aligned} P\left(\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_n}\right) &= P(\overline{B_1}) \dots P(\overline{B_{k-1}}|\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}}) \\ & P(B_k|\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i}) \dots P(\overline{B_n}|\overline{B_1} \cap \dots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k \cap \overline{B_{k+1}} \cap \dots \cap \overline{B_{n-1}}). \end{aligned}$$

   Or les probabilités valent $\dfrac{1}{3}$ jusqu'à ce qu'on pioche la boule blanche avec probabilité $\dfrac{2}{3}$, puis chacune vaut encore $\dfrac{2}{3}$.

Ainsi

$$P\left(\overline{B_1}\cap\ldots\cap\overline{B_{k-1}}\cap B_k\cap\overline{B_{k+1}}\cap\ldots\cap\overline{B_n}\right)=\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}=\frac{2^{n-k+1}}{3^n}.$$

Au passage, on remarque bien que l'hypothèse de la formule des probabilités composées étaient bien vérifiée.

Ainsi, $P(Y_n=1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2^{n-k+1}}{3^n}=\frac{2}{3^n}\sum_{\ell=0}^{n-1}2^\ell$ en posant $\ell=n-k$.

On a donc $P(Y_n=1)=\frac{2^{n+1}-2}{3^n}$.

Pour récupérer la dernière probabilité, le plus simple est de remarquer que $(Y_n = i)_{0\leqslant i\leqslant 2}$ est un système complet d'événement, donc

$$P(Y_n=0)=1-P(Y_n=1)-P(Y_n=2)$$

et donc

$$P(Y_n=0)=\frac{3^n-2^{n+1}+1}{3^n}.$$

□

3. On a

$$E(Y_n)=\sum_{k=0}^{2}kP(Y_n=k)=P(Y_n=1)+2P(Y_n=2)=\frac{2^{n+1}-2}{3^n}+2\frac{1}{3^n}.$$

On trouve $E(Y_n)=\frac{2^{n+1}}{3^n}$. □

**Exercice 14.** 1. On a $X(\Omega)=[\![n,N]\!]$ et $\forall k\in[\![n,N]\!]$, il est facile de déterminer $P(X\leqslant k)$. En effet, $\Omega$ est l'ensemble des combinaisons à $n$ éléments pris entre 1 et $N$ et $(X\leqslant k)$ est l'ensemble des combinaisons à $n$ éléments pris entre 1 et $k$.

Ainsi, $P(X\leqslant k)=\frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$.

On a donc $P(X=k)=P(X\leqslant k)-P(X\leqslant k-1)$ (en prenant $P(X\leqslant k-1)=0$ si $k-1<n$ ce qui est cohérent avec l'écriture avec les coefficients binomiaux en prenant la convention habituelle).

On a donc, $\forall k\in[\![n,N]\!]$, en utilisant la formule de Pascal,

$$P(X=k)=\frac{\binom{k}{n}-\binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}}=\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

□

2. Là encore, nous allons utiliser la formule de Pascal puisque $\binom{k}{n}=\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}$, ainsi

$$\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n}=\sum_{k=n}^{N}\binom{k+1}{n+1}-\binom{k}{n+1}=\sum_{k=n}^{N}\binom{k+1}{n+1}-\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n+1}.$$

En posant $\ell = k+1$ dans la première somme, on a

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \sum_{\ell=n+1}^{N+1} \binom{\ell}{n+1} - \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n+1}.$$

Or en simplifiant les termes qui apparaissent dans les deux sommes, il ne reste que

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1} - \binom{n}{n+1}.$$

Mais comme $\binom{n}{n+1} = 0$, on a bien démontré le résultat souhaité.

A noter que ce résultat porte le nom de formule de Pascal itérée. □

3. On a $E(X) = \sum_{k=n}^{N} kP(X=k) = \sum_{k=n}^{N} k\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}$.

   On a donc

$$\begin{aligned}
E(X) = &\ \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^{N} k\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \\
= &\ \frac{n!(N-n)!}{N!} \sum_{k=n}^{N} n\frac{k!}{n!(k-n)!} \\
= &\ n\frac{n!(N-n)!}{N!} \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} \\
= &\ n\frac{n!(N-n)!}{N!} \binom{N+1}{n+1} \text{ d'après la question précédente} \\
= &\ n\frac{n!(N-n)!}{N!} \frac{(N+1)!}{(N-n)!(n+1)!} \\
= &\ \frac{n(N+1)}{n+1}
\end{aligned}$$

   On a donc $E(X) = \frac{n(N+1)}{n+1}$. □

**Exercice 15.** 1. Pour des raisons de généralités (la formule est connue dans ce cas un peu plus général), on va faire la preuve de la formule de Pascal itérée, à savoir

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}.$$

Il suffit ensuite de prendre $N = 2n$ pour démontrer la formule demandée. On aurait bien entendu pu faire directement le travail avec $2n$.

Nous allons utiliser la formule de Pascal puisque $\binom{k}{n} = \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1}$, ainsi

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \sum_{k=n}^{N} \binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} = \sum_{k=n}^{N} \binom{k+1}{n+1} - \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n+1}.$$

En posant $\ell = k+1$ dans la première somme, on a

$$\sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n} = \sum_{\ell=n+1}^{N+1} \binom{\ell}{n+1} - \sum_{k=n}^{N} \binom{k}{n+1}.$$

Or en simplifiant les termes qui apparaissent dans les deux sommes, il ne reste que

$$\sum_{k=n}^{N}\binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1} - \binom{n}{n+1}.$$

Mais comme $\displaystyle\binom{n}{n+1} = 0$, on a bien démontré le résultat souhaité.

A noter que ce résultat porte le nom de formule de Pascal itérée.

Il suffit de remplacer $N$ par $2n$ pour obtenir le résultat désiré. En utilisant la formule de Pascal pour remplacer chaque terme, on tombe sur une somme télescopique. □

2. On a clairement $X(\Omega) = [\![n, 2n]\!]$. Soit $k \in [\![n, 2n]\!]$, déterminons $P(X = k)$.

   Prenons $\Omega$ l'ensemble des tirages possibles, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons à $n$ éléments de 1 à $2n$ qui contiennent les rangs d'apparition des boules noires. Il y en a $\displaystyle\binom{2n}{n}$. Munissons $\Omega$ de la probabilité uniforme.

   Considérons $(X = k)$. C'est l'ensemble des sous-ensembles à $n-1$ éléments pris entre 1 et $k-1$ qui représentent le numéro du tirage où on a pioché les $k-1$ premières boules noires que l'on réunit avec le singleton $\{k\}$ où l'on pioche la dernière boule noire. $(X = k)$ contient donc $\binom{k-1}{n-1}$.

   Ainsi, on a $\forall k \in [\![n, 2n]\!]$, $P(X = k) = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}}$.

   Ensuite, cherchons son espérance.

   On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=n}^{2n} kP(X = k) \\
&= \sum_{k=n}^{2n} k\frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{2n}{n}} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n} k\frac{(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} \\
&= \frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n} n\frac{k!}{n!(k-n)!} \\
&= n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\sum_{k=n}^{2n}\binom{k}{n} \\
&= n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\binom{2n+1}{n+1} \\
&= n\frac{(n!)^2}{(2n)!}\frac{(2n+1)!}{(n+1)!n!} \\
&= n\frac{2n+1}{n+1}.
\end{aligned}$$

   On a donc $E(X) = \dfrac{n(2n+1)}{n+1}$. □

**Exercice 16** (La loi hypergéométrique, exercice difficile)**.** 1. a. Numérotons les boules rouges de 1 à $m$ et les vertes de $m+1$ à $m+n$.

Il s'agit de combinaisons à $k$ éléments pris dans $[\![1, m+n]\!]$ qui contient $m+n$ éléments. Il y a $\displaystyle\binom{n+m}{k}$ tirages à $k$ boules. □

b. Il y a $\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}$ ensembles à $i$ boules rouges (combinaisons à $i$ éléments de $[\![1, m]\!]$) et $\begin{pmatrix} n \\ k-i \end{pmatrix}$ ensembles à $k-i$ boules vertes (combinaisons à $k-i$ éléments de $[\![m+1, m+n]\!]$). Ainsi, il y a $\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k-i \end{pmatrix}$ ensembles à $k$ boules dont exactement $i$ sont rouges.
La convention prise permet d'éviter de distinguer certains cas. $\square$

c. L'ensemble des tirages possibles peut s'écrire comme l'union disjointes des tirages à exactement $i$ boules rouges pour $i$ entre 0 et $k$. Ainsi, comme l'union est disjointe, il y a $\sum_{i=0}^{k} \begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n \\ k-i \end{pmatrix}$ ensembles à $k$ boules.
Comme nous en avions $\begin{pmatrix} n+m \\ k \end{pmatrix}$ d'après la première question, l'égalité est démontrée. $\square$

2. a. On doit vérifier que $\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = 1$.
On a
$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$
En mettant tout sur le même dénominateur, on a
$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$
Or d'après l'identité de Vandermonde, on a
$$\sum_{k=0}^{n} P(X=k) = \frac{\binom{N(p+q)}{n}}{\binom{N}{n}} = 1.$$
On a bien défini une variable aléatoire. $\square$

b. On a

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{n} kP(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} k\frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \text{ le premier terme est nul} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} k\frac{(Np)!}{k!(Np-k)!}\binom{Nq}{n-k} \\
&= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \frac{(Np-1)!Np}{(k-1)!(Np-k)!}\binom{Nq}{n-k} \\
&= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{Np-1}{k-1}\binom{Nq}{n-k} \\
&= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{Np-1}{\ell}\binom{Nq}{n-1-\ell} \text{ avec } \ell = k-1 \\
&= \frac{Np}{\binom{N}{n}} \binom{Np+Nq-1}{n-1} \text{ d'après la formule de Vandermonde} \\
&= Np\frac{n!(N-n)!}{N!}\frac{(N-1)!}{(n-1)!(N-n)!} \\
&= np.
\end{aligned}$$

□

c. Cela modélise un tirage sans remise (ou simultané) de $n$ boules parmi $N$ dont $pN$ ont une certaine propriété et où $X$ compte le nombre de telles boules obtenues. On parle de boules, mais il peut s'agir d'autre chose (individus dans une population qui ont un certain caractère). □

3. a. Considérons, pour $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X_N = k) = \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
P(X_N = k) &= \frac{\binom{Np}{k}\binom{Nq}{n-k}}{\binom{N}{n}} \\
&= \frac{(Np)!(Nq)!n!(N-n)!}{k!(Np-k)!(n-k)!(Nq-n+k)!N!} \\
&= \binom{n}{k}\frac{(Np)!}{(Np-k)!}\frac{(Nq)!}{(Nq-n+k)!}\frac{(N-n)!}{N!}
\end{aligned}$$

Or pour $N \to +\infty$,

$$\frac{(N-n)!}{N!} = \frac{1}{\prod_{i=0}^{n-1}(N-i)} \sim \frac{1}{N^n}.$$

Et de même,

$$\frac{(Np)!}{(Np-k)!} = \prod_{i=0}^{k-1}(Np-i) \sim (Np)^k$$

et

$$\frac{(Nq)!}{(Nq-n+k)!} = \prod_{i=0}^{n-k-1}(Nq-i) \sim (Nq)^{n-k}.$$

En regroupant tous ces équivalents, on a

$$\binom{n}{k}\frac{(Np)!}{(Np-k)!}\frac{(Nq)!}{(Nq-n+k)!}\frac{(N-n)!}{N!} \sim \binom{n}{k}\frac{(Np)^k(Nq)^{n-k}}{N^n}$$

Or, on a

$$\binom{n}{k}\frac{(Np)^k(Nq)^{n-k}}{N^n} = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

Ainsi,

$$\lim_{N\to+\infty} P(X_N = k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}.$$

□

b. Autrement dit, lorsque $N$ est grand, une loi hypergéométrique n'est pas très loin d'être une loi binomiale. C'est relativement prévisible puisque l'absence de remise ne change pas énormément les probabilités lorsqu'on tire un nombre $n$ négligeable de boules comparé au nombre total de boules dans l'urne. En pratique, on peut utiliser cette approximation d'une loi hypergéométrique par une binomiale lorsque $10n < N$. □

**Exercice 17.** Notons $X_n$ le nombre de 6 obtenus en $n$ lancers. Comme les lancers sont indépendants et ont la même probabilité de faire 6, il est clair que $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$.
Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|X_n - E(X_n)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X_n)}{\varepsilon^2}.$$

Or, on connait $E(X_n) = \dfrac{n}{6}$ et $V(X_n) = \dfrac{5n}{36}$. L'inégalité devient

$$P\left(\left|X_n - \frac{n}{6}\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \frac{5n}{36\varepsilon^2}.$$

Faisons apparaitre la fréquence d'apparition de 6 soit $\dfrac{X_n}{n}$, on a

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{n}\right) \leqslant \frac{5n}{36\varepsilon^2}.$$

On veut la probabilité que la fréquence de 6 soit autour de $\dfrac{1}{6}$ au centième près, donc

$$1 - P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{\varepsilon}{n}\right) \leqslant \frac{5n}{36\varepsilon^2}$$

ce qui revient à

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{\varepsilon}{n}\right) \geqslant 1 - \frac{5n}{36\varepsilon^2}.$$

On veut que $\dfrac{\varepsilon}{n} = \dfrac{1}{100}$ donc $\varepsilon = \dfrac{n}{100}$ ce qui nous donne,

$$P\left(\left|\frac{X_n}{n} - \frac{1}{6}\right| < \frac{1}{100}\right) \geqslant 1 - \frac{50000}{36n}.$$

On veut cette probabilité supérieure à $\dfrac{95}{100}$, ce qu'on pourra affirmer si

$$1 - \frac{50000}{36n} \geqslant \frac{95}{100}.$$

On résout cette bien brave inéquation, pour obtenir

$$\frac{50000}{36n} \leqslant \frac{1}{20}$$

donc

$$\frac{36n}{50000} \geqslant 20$$

et pour finir $n \geqslant \dfrac{1000000}{36} \simeq 27777,78$.
On trouve qu'il faut 27778 lancers.
En fait, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev est vraiment grossière pour ce genre de travail et d'autres que vous verrez l'an prochain permettent de conclure avec nombre bien moins important de lancers. □

**Exercice 18.** On remarque que si on note $X$ le nombre de vaches qui vont vers la première étable, $X$ compte le nombre de succès à l'épreuve « la vache va vers la première étable » répétée 100 fois de façon indépendante, donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100, \frac{1}{2})$.
En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, pour $\varepsilon > 0$

$$P(|X - E(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{V(X)}{\varepsilon^2}$$

soit

$$P(|X - 50| \geqslant \varepsilon) \leqslant \frac{25}{\varepsilon^2}$$

autrement écrit

$$1 - P(|X - 50| < \varepsilon) \leqslant \frac{25}{\varepsilon^2}$$

ou encore

$$P(50 - \varepsilon < X < 50 + \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{25}{\varepsilon^2}$$

On veut choisir $\varepsilon$ tel que cette probabilité soit supérieure ou égale à $\dfrac{95}{100}$, ce qu'on peut assurer lorsque

$$1 - \frac{25}{\varepsilon^2} \geqslant \frac{95}{100}$$

autrement dit

$$20 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{25}$$

soit

$$\varepsilon > \sqrt{500} \simeq 22,4.$$

Il faut donc 23 places au-dessus de 50, soit faire des étables de 73 places. □

# 18 Intégration sur un segment

Pour les trois premiers exercices, seules les méthodes, astuces et résultats sont indiqués. Pour la rédaction, reportez-vous aux exemples du cours. □

**Exercice 1.** 1. Soit on fait apparaitre un 2 au numérateur et on multiplie par $\dfrac{1}{2}$ pour se corriger, soit on pose $u = 2x + 1$. On trouve $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{2x+1} = \frac{\ln(3)}{2}$. □

2. Soit on pose $u = x + 2$ et on coupe en deux, soit on remarque que $\dfrac{-x+3}{x+2} = \dfrac{-(x+2)+5}{x+2}$ et on coupe la fraction en deux. $\displaystyle\int_0^2 \frac{-x+3}{x+2}\,\mathrm{d}x = 5\ln(2) - 2$. □

3. Soit on la reconnait tout de suite, soit on pose $u = 3x+5$. $\displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{3x+5}} = \frac{2\sqrt{11} - 4\sqrt{2}}{3}$. $\square$

4. On peut poser $u = x + 2$ pour se simplifier la vie, ou $u = 2x + 4$.

   Ensuite, il faut remarquer que $x \mapsto \dfrac{1}{x}\ln(x)$ est la dérivée de $x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x)^2$.

   $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(2x+4)}{x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{(\ln(6))^2 - (\ln(4))^2}{2}$. $\square$

5. Il faut faire une IPP (dériver le polynôme, intégrer l'exponentielle). $\displaystyle\int_0^x (2t+1)e^{2t}\,\mathrm{d}t = xe^{2x}$. $\square$

6. Il faut faire une IPP : dériver le ln intégrer le polynôme et simplifier la nouvelle intégrale qui se trouve être celle d'un autre polynôme. $\displaystyle\int_1^x (t^2+t-1)\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{4} - x\ln(x) + \frac{x^2\ln(x)}{2} + \frac{x^3\ln(x)}{3} + x - \frac{23}{36}$. $\square$

7. Deux IPP, à chaque fois dériver le polynôme. $\displaystyle\int_1^x (-t^2+t-1)e^{-t}\,\mathrm{d}t = (x^2+x+2)e^{-x} - 4e^{-1}$. $\square$

8. Commencer par remarquer que $\ln(x^3) = 3\ln(x)$, puis IPP, on dérive le ln. $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x^3)}{x^2}\,\mathrm{d}x = 3 - 6e^{-1}$. $\square$

9. On peut poser $t = x^3 + 2$. $\displaystyle\int_2^5 \frac{3x^2}{x^3+2}\,\mathrm{d}x = \ln(127) - \ln(10)$. $\square$

10. On peut poser $t = x^2 + 1$.

    $\displaystyle\int_1^2 \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = 3\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$. $\square$

11. Attention à vérifier que le dénominateur est bien de signe constant ! On a $x^4 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^3+x^2+1) < 0$ pour $x \in [0, 1/2]$.

    On a donc

    $$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4x^3 - 2x + 1}{x^4 - x^2 + x - 1}\,\mathrm{d}x = \Big[\ln(-x^4 + x^2 - x + 1)\Big]_0^{1/2} = \ln\left(\frac{11}{16}\right).$$

    $\square$

12. Si on ne voit rien, on peut poser $t = x^2 + 2$. $\displaystyle\int_0^1 x\ln(x^2+2)\,\mathrm{d}x = 3\frac{\ln(3)}{2} - \ln(2) - \frac{1}{2}$. $\square$

13. Si on ne voit rien, on peut poser $t = 3x^2+2x-1$. $\displaystyle\int_0^2 (3x+1)e^{3x^2+2x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^{15} - \frac{1}{2}e^{-1}$. $\square$

14. 0 par encadrement car pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leqslant \dfrac{x^{5n+2}}{e + x^3} \leqslant \dfrac{1}{e}x^{5n+2}$. $\square$

15. 0 par encadrement car pour tout $x \in [0, 1]$, $0 \leqslant x^n e^x \leqslant ex^n$. $\square$

16. C'était un semi-piège, on peut la calculer et c'est même plus facile.

$$\int_1^e \frac{\ln^{2n}(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2n+1}\left(\ln(x)\right)^{2n+1}\right]_1^e = \frac{1}{2n+1}.$$

Ou on pose $t = \ln(x)$. $\square$

17. On remarque que $\cos(x) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$ et sur cet intervalle, $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geqslant 0$.

Ainsi, $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^\pi \sqrt{2}\cos\left(\frac{x}{2}\right)\,\mathrm{d}x = 2\sqrt{2}$. $\square$

18. On trouve $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\pi/2}^0 \sqrt{1-\cos^2(t)}(-\sin(t))\,\mathrm{d}t$. Or comme sur cet intervalle $\sin(t) \geqslant 0$, on a $\sqrt{1-\cos^2(t)} = \sin(t)$.
Ainsi, on a $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2x)}{2} = \frac{\pi}{4}$. $\square$

19. En la notant $I$, avec le changement de variables indiqué, on tombe sur $I = \int_{\pi/4}^0 \ln\left(1 + \frac{1-\tan(u)}{1+\tan(u)}\right)(-du)$ (à vérifier en explicitant $\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.)

Puis on a $I = \int_0^{\pi/4} \ln(2) - \ln(1+\tan(u))du = \frac{\pi\ln(2)}{4} - I$, ainsi $I = \frac{\pi\ln(2)}{8}$. $\square$

**Exercice 2.** 1. C'est une intégrale de fonction continue donc ça existe. Une IPP pour obtenir $\int_{-1}^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 2e^{-1}$. $\square$

2. On peut se placer sur $\mathbb{R}$ puisque la fonction $t \longmapsto sin^3(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition. Ensuite on commence par remarquer que $\sin^3(t) = \sin(t)(1-\cos^2(t)) = \sin(t) - \sin(t)\cos^2(t)$.

On peut désormais intégrer terme à terme.
On a $\int_0^x \sin^3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sin(t) - \sin(t)\cos^2(t)\,\mathrm{d}t = [-\cos(t) + \frac{1}{3}\cos^3(t)]_0^x$.
On a donc

$$\int_0^x \sin^3(t)\,\mathrm{d}x = -\cos(t) + \frac{1}{3}\cos^3(t) + \frac{2}{3}.$$

Remarquons que l'ensemble des primitives $x \longmapsto \sin^3(x)$ est constitué des fonctions

$$x \mapsto -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + k;\ \ k \in \mathbb{R}.$$

$\square$

3. Il s'agit d'une IPP, mais les fonctions qu'on a envie de poser ne sont pas $\mathcal{C}^1$ sur $[0, x]$. Il faut donc le faire sur $[A, x]$ puis faire tendre $A$ vers 0 pour avoir le résultat que l'on souhaite. $\int_0^x t\ln(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^2\ln(x)}{2} - \frac{x^2}{4}$. $\square$

**Exercice 3.** 1. On a $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. Il s'agit d'une somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0, 1]$ $x \mapsto \frac{1}{1+x}$. $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2)$. $\square$

2. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(k+n)^2} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^2}{\left(1+\frac{k}{n}\right)^2}$. Ainsi, il d'une somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0,1]$ $x \mapsto \dfrac{x^2}{(1+x)^2}$.

   On a donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n(k+n)^2} = \int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

   Ensuite, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{(1+x)^2-(2x+1)}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$, donc

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1 - \frac{2(x+1)}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

   Ainsi,

$$\int_0^1 \frac{x^2}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[x - 2\ln((1+x)) - \frac{1}{1+x}\right]_0^1 = \frac{3}{2} - 2\ln(2).$$

   □

3. L'idée est de remarquer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)\right)$.

   Or

$$\ln\left(\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right).$$

   Il suffit ensuite de remarquer qu'on tombe sur la somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0,1]$ $x \mapsto \ln(1+x)$, et par conséquent

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = [(x+1)\ln(x+1)-(x+1)]_0^1 = 2\ln(2)-1.$$

   Ensuite, par continuité de la fonction exponentielle, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = \exp(2\ln(2)-1) = 4e^{-1}.$$

   □

4. C'est clairement une somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0,1]$ $x \mapsto \cos(x)\sin(x)$. Ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 \cos(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^1 = \frac{1}{2}\sin^2(1).$$

   □

**Exercice 4.** Nous l'avons déjà faite de nombreuses fois, mais au cas où... on va d'ailleurs en faire un peu trop.
Notons $h$ la fonction définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = x - \ln(1+x)$, bien définie et dérivable car sur cet intervalle $1+x>0$, donc on compose des fonctions dérivables puis on fait une combinaison de fonctions dérivables.

On a $h'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x} = \dfrac{x}{1+x}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $x$ puisque $1+x>0$. Donc $h$ est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi $h$ est minimale en 0. Or $h(0)=0$, donc $\forall x \in ]-1+\infty$, $h(x) \geqslant 0$, ce qui est équivalent à

$$\forall x \in ]-1;+\infty[; \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

Ensuite, on remarque que $\forall x \geqslant 0$, $x^n \geqslant 0$ donc , on a $0 \leqslant \ln(1+x^n) \leqslant x^n$.
En intégrant tout ça de 0 à 1 avec les bornes dans l'ordre croissant, on obtient

$$0 \leqslant \int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

Puis, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a

$$\int_0^1 \ln(1+x^n)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

□

**Exercice 5.** 1. Remarquons tout simplement que $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

Ensuite, on a $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x$. Or sur $[0;\pi/4]$, $\cos(x)>0$, ainsi

$$I_1 = [-\ln(\cos(x))]_0^{\pi/4} = -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

□

2. Remarquons que $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, $0 \leqslant \tan(x) \leqslant 1$, ainsi,

$$\tan^{n+1}(x) \leqslant \tan^n(x).$$

En intégrant dans l'ordre croissant des bornes entre 0 et $\dfrac{\pi}{4}$, on obtient,

$$\int_0^{\pi/4} \tan^{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x$$

autrement dit $I_{n+1} \leqslant I_n$. La suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien décroissante. □

3. Considérons
$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi/4} \tan^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a
$$I_{n+2} + I_n = \int_0^{\pi/4} (1+\tan^2(x))\tan^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pour ceux qui ne voient pas qu'il s'agit d'une dérivée classique, on pose $u = \tan(x)$ le changement de variables $\mathcal{C}^1([0,\pi/4])$ tel que $du = (1+\tan^2(x))\,\mathrm{d}x$.

Ainsi,
$$I_{n+2} + I_n = \int_0^1 u^n du = \frac{1}{n+1}.$$

(Pour les étourdis, on se souvient que cette dernière intégrale a été calculée dans une question précédente.) □

4. On a $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par 0 (c'est l'intégrale d'une fonction positive avec les bornes dans l'ordre croissant, donc positive).

   Ainsi, $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente. Notons $\ell$ sa limite.

   On a $\lim\limits_{n\to+\infty} I_{n+2}+I_n = 2\ell$ mais $\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, or d'après la question précédente, ces quantités sont égales, donc $2\ell = 0$.

   Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = 0.$$

□

**Exercice 6.** 1. Notons, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right)$.

On a

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k+1) - \ln(n+k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k+1) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \\
&= \sum_{\ell=2}^{n+1} \ln(n+\ell) - \sum_{k=1}^{n} \ln(n+k) \text{ avec } \ell = k+1 \\
&= \ln(2n+1) + \sum_{\ell=2}^{n} \ln(n+\ell) - \ln(n+1) - \sum_{k=2}^{n} \ln(n+k) \\
&= \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Or $\dfrac{2n+1}{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 2$, donc, comme ln est continue en 2, par composition on a

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \ln(2).$$

□

2. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. Il s'agit d'une somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0,1]$ $x \mapsto \dfrac{1}{1+x}$. Et on trouve donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \ln(2).$$

□

3. On a pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, $\dfrac{1}{4n^2} \leqslant \dfrac{1}{(n+k)^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$.

   En ajoutant toutes les inégalités entre 1 et $n$, on a

$$\frac{1}{4n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant \frac{1}{n}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, donc d'après le théorème des gendarmes,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0.$$

□

4. Notons $h$ la fonction définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ par $h(x) = x - \ln(1+x)$, bien définie et dérivable car sur cet intervalle $1+x > 0$, donc on compose des fonctions dérivables puis on fait une combinaison linéaire de fonctions dérivables.

   On a $h'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$. Ainsi, $h'(x)$ est du signe de $x$ puisque $1+x > 0$. Donc $h$ est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi $h$ est minimale en 0. Or $h(0) = 0$, donc $\forall x \in ]-1+\infty$, $h(x) \geqslant 0$, ce qui est équivalent à

   $$\forall x \in ]-1;+\infty[; \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

   Notons $g$ la fonction définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ par

   $$g(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}.$$

   On a $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geqslant 0$. Ainsi, $g$ est croissante. Par ailleurs $g(0) = 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $g(x) \geqslant 0 \iff x - \frac{x^2}{2} \leqslant \ln(1+x)$.

   □

5. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$.

   D'après l'inégalité précédente, on a

   $$\frac{1}{n+k} - \frac{1}{2(n+k)^2} \leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n+k}\right) \leqslant \frac{1}{n+k}.$$

   En ajoutant toutes les inégalités pour $k$ allant de 1 à $n$, on obtient

   $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+k)^2} \leqslant S_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$

   Or, d'après les premières questions,

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} = \ln(2)$$

   et

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2(n+k)^2} = 0,$$

   ainsi, par le théorème des gendarmes,

   $$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n+k+1}{n+k}\right) = \ln(2).$$

   □

**Exercice 7.** 1. La fonction sin est continue, strictement croissante de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$ donc établit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1,1]$. Elle admet donc une réciproque que nous noterons $g$. □

2. On sait que sin est dérivable de sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et sa dérivée s'annule uniquement en $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$. Ainsi, $g$ est dérivable sur $]-1,1[$ et on a $\forall x \in ]-1,1[,\ g'(x) = \dfrac{1}{\cos(g(x))}$.
Or, $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$ et $\cos(x) \geqslant 0$, ainsi $\cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$.

On a donc, pour tout $x \in ]-1,1[$, $g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2(g(x))}}$ puisque $g(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Ainsi, $\forall x \in ]-1,1[,\ g'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. □

3. Notons, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4-\frac{k^2}{n^2}}}.$$

On reconnait une somme de Riemann, ainsi $\lim\limits_{n+\infty} S_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

En factorisant par $\frac{1}{2}$, on a $\lim\limits_{n+\infty} S_n = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{2}\right)^2}}\,\mathrm{d}x$.

On pose le changement de variable $t = \dfrac{x}{2}$ donc $\mathrm{d}t = \dfrac{1}{2}\,\mathrm{d}x$ pour avoir :

$$\lim_{n+\infty} S_n = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} g'(t)\,\mathrm{d}t = g\left(\frac{1}{2}\right) - g(0) = \frac{\pi}{6} - 0.$$

Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}} = \frac{\pi}{6}.$$

Remarquons que nous aurions pu éviter le changement de variables en factorisant directement par $2n$ et en reconnaissant l'intégrale de 0 à $\dfrac{1}{2}$. □

**Exercice 8** (Comparaisons Séries-Intégrales)**.** 1. Soit $k \in \mathbb{N}$. Sur l'intervalle $[k, k+1[$, comme $f$ est croissante, on a $\sqrt{k} \leqslant \sqrt{x} \leqslant \sqrt{k+1}$.

En intégrant cette inégalité de $k$ à $k+1$ (les bornes étants dans l'ordre croissant), on récupère

$$\int_k^{k+1} \sqrt{k}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \sqrt{k+1}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\sqrt{k} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{k+1}$.

En ajoutant toutes ces inégalités de $0$ à $n-1$, on récupère grâce à la relation de Chasles,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k} \leqslant \int_0^n \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k+1}.$$

On trouve alors, en posant $\ell = k+1$, et en calculant l'intégrale,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{k} \leqslant \left[\frac{2}{3}x^{3/2}\right]_0^n \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} \sqrt{\ell}.$$

Soit,

$$S_n - \sqrt{n} \leqslant \frac{2}{3}n^{3/2} \leqslant S_n.$$

En remaniant un peu, on obtient

$$\frac{2}{3}n^{3/2} \leqslant S_n \leqslant \frac{2}{3}n^{3/2} + \sqrt{n}.$$

Il suffit de diviser le tout par $\frac{2}{3}n\sqrt{n}$ pour avoir

$$1 \leqslant \frac{S_n}{\frac{2}{3}n\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{3}{2n}.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes assure $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{\frac{2}{3}n\sqrt{n}}$, soit $S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2}{3}n\sqrt{n}$. $\square$

2. On pose $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sur l'intervalle $[k, k+1[$, comme $g$ est décroissante, on a $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.
En intégrant cette inégalité de $k$ à $k+1$ (les bornes étants dans l'ordre croissant), on récupère

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k+1}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{k}}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\dfrac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}$.
En ajoutant toutes ces inégalités de 1 à $n-1$, on récupère grâce à la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

On trouve alors, en posant $\ell = k+1$, et en calculant l'intégrale,

$$\sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{\ell}} \leqslant \left[2\sqrt{x}\right]_1^n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

Soit,

$$T_n - 1 \leqslant 2\sqrt{n} - 2 \leqslant T_n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

En remaniant un peu, on obtient

$$2\sqrt{n} - 2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant T_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

Il suffit de diviser le tout par $2\sqrt{n}$ pour avoir

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} \leqslant T_n \leqslant 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes assure $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{T_n}{2\sqrt{n}} = 1$, soit $T_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$. □

3. On pose $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Sur l'intervalle $[k, k+1[$, comme $h$ est décroissante, on a $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dfrac{1}{k}$.
En intégrant cette inégalité de $k$ à $k+1$ (les bornes étants dans l'ordre croissant), on récupère

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,\mathrm{d}x.$$

Soit $\dfrac{1}{k+1} \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{k}$.
En ajoutant toutes ces inégalités de 1 à $n-1$, on récupère grâce à la relation de Chasles,

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

On trouve alors, en posant $\ell = k+1$, et en calculant l'intégrale,

$$\sum_{\ell=2}^{n} \frac{1}{\ell} \leqslant [\ln(x)]_1^n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Soit,

$$U_n - 1 \leqslant \ln(n) \leqslant U_n - \frac{1}{n}.$$

En remaniant un peu, on obtient

$$\ln(n) + \frac{1}{n} \leqslant U_n \leqslant \ln(n) + 1.$$

Il suffit de diviser le tout par $\ln(n)$ pour avoir

$$1 + \frac{1}{n\ln(n)} \leqslant U_n \leqslant 1 + \frac{1}{\ln(n)}.$$

En faisant tendre $n \to +\infty$, le théorème des gendarmes assure $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{U_n}{\ln(n)} = 1$, soit $U_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$. □

**Exercice 9.** 1. a. Comme $\forall x \in [0,1]$, $1 + x^2 > 0$, on a

$$J_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}.$$

□

b. On a, $\forall x \in [0,1]$, $0 \leqslant \dfrac{1}{1+x^2} \leqslant 1$ puis en multipliant par $x^n \geqslant 0$,

$$0 \leqslant \frac{x^n}{1+x^2} \leqslant x^n.$$

En intégrant de 0 à 1 avec les bornes dans l'ordre croissant, on obtient :

$$0 \leqslant J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

□

c. Il suffit d'appliquer le théorème des gendarmes puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$. Ainsi, $J_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. □

2. a. On a

$$I_n = \int_0^1 x^n \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x.$$

En posant $u$ et $v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1([0,1])$ définies par

$$\begin{aligned} u'(x) &= x^n; & u(x) &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}; \\ v(x) &= \ln(1+x^2); & v'(x) &= \frac{2x}{1+x^2} \end{aligned}$$

on a

$$I_n = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln(1+x^2)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^{n+2}}{(n+1)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

En calculant ce qu'il est possible et en procédant par linéarité de l'intégrale, on obtient,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n+1} - \frac{2}{n+1}J_{n+2}.$$

□

b. Il s'agit tout simplement de faire une somme de limites pour voir que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

□

c. On remarque que $I_n$ est égal à une somme de termes dont le premier à l'air « plus gros » que l'autre (le deuxième est le produit de deux termes qui tendent vers 0, dont un est du même ordre que le premier).

On factorise donc,

$$I_n = \frac{\ln(2)}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{2}{\ln(2)\left(1+\frac{1}{n}\right)}J_{n+2}\right).$$

Or il est clair que $\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\dfrac{2}{\ln(2)\left(1+\frac{1}{n}\right)}J_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (ce dernier par produit ).

Ainsi

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{2}{\ln(2)\left(1+\frac{1}{n}\right)}J_{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

et donc

$$I_n \sim \frac{\ln(2)}{n}.$$

□

**Exercice 10.** 1. Remarquons que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$0 \leqslant \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k} \leqslant x^{k(n+1)}$$

puisque $1+x^k \geqslant 1$ (mais c'est même vrai pour $x \geqslant 0$). Si on intègre le tout entre 0 et 1 (bornes dans l'ordre croissant), on obtient

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{k(n+1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{k(n+1)+1}.$$

Or $\dfrac{1}{k(n+1)+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Ainsi, par encadrement $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$. □

2. On a $J - I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^k} - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k}\,\mathrm{d}x$.

Par linéarité, on a

$$J - I_n = \int_0^1 \frac{1-(-x^k)^{n+1}}{1-(-x^k)}\,\mathrm{d}x.$$

On reconnait $\dfrac{1-(-x^k)^{n+1}}{1-(-x^k)} = \displaystyle\sum_{j=0}^{n}(-x^k)^j$ ainsi,

$$J - I_n = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n}(-x^k)^j\,\mathrm{d}x.$$

Ou encore, par linéarité,

$$J - I_n = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \int_0^1 x^{kj}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\displaystyle\int_0^1 x^{kj}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{kj+1}x^{kj+1}\right]_0^1 = \frac{1}{kj+1}$.

Ainsi,

$$J - I_n = \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^j}{kj+1}.$$

□

3. Remarquons que

$$J - I_N = \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{kn+1}.$$

Or $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} I_N = 0$, donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{kn+1} = J - I_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} J$.

Ainsi, $\displaystyle\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{kn+1} = J$.

Elle converge vers $J$. □

4. On a donc, en prenant $k=1$, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}=[\ln(1+x)]_0^1=\ln(2)$.

   Et en prenant $k=2$, $\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=[\arctan(x)]_0^1=\frac{\pi}{4}$. □

**Exercice 11.** 1. On a, pour $x\in[0,1[$,

$$\frac{x^{2n}-x^{4n}}{1-x^2}=x^{2n}\frac{1-(x^2)^n}{1-x^2}=x^{2n}\sum_{k=0}^{n-1}(x^2)^k.$$

Ainsi, $I_n$ est l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1[$, prolongeable par continuité en 1 (polynôme), donc $I_n$ est en réalité l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$, donc existe bien.

Et on a par linéarité,

$$I_n=\int_0^1 x^{2n}\sum_{k=0}^{n-1}x^{2k}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^1 x^{2n+2k}\,\mathrm{d}x.$$

Or $\int_0^1 x^{2n+2k}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{2n+2k+1}x^{2n+2k+1}\right]_0^1=\frac{1}{2n+2k+1}$.

On a donc bien

$$I_n=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+2k+1}.$$

□

2. On a, pour $k\in[\![0,n-1]\!]$, $\frac{1}{2n+2k+2}\leqslant\frac{1}{2n+2k+1}\leqslant\frac{1}{2n+2k}$. En ajoutant toutes ces inégalités, on récupère

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+2k+2}\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+2k+1}\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+2k}.$$

On reconnait $I_n$ et en posant $\ell=k+1$ dans la première somme, on obtient

$$\sum_{\ell=1}^{n}\frac{1}{2n+2\ell}\leqslant I_n\leqslant\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2n+2k}$$

ce qui est exactement ce qui était demandé. □

3. On a $\int_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=[\ln(1+x)]_0^1=\ln(2)$ puisque $1+x>0$ sur $[0,1]$.

   Par ailleurs, $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. On reconnait la somme de Riemann associée à l'intégrale précédente, ainsi

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\ln(2).$$

□

4. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$.

On reconnait presque la somme précédente. On peut soit justifier que les sommes de Riemann ne changent pas si on commence à 0 ou à 1 et si on termine à $n-1$ ou $n$ ou tout simplement remarquer que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2n+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{4n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}.$$

De la même façon

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}.$$

Ainsi, puisque $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n+2k} \leqslant I_n \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2n+2k}$, on a par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \frac{\ln(2)}{2}.$$

□

**Exercice 12.** 1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, la fonction $g_x$ est une fonction continue (quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas). Ainsi, $f$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. □

2. Prenons $x, y$ deux réels positifs avec $x \leqslant y$.

Pour tout $t \in [0,1]$, on a $t^x \geqslant t^y$ (car $t^y - t^x = t^x(t^{y-x} - 1) \leqslant 0$ car $y - x \geqslant 0$). En multipliant par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, on obtient

$$\frac{t^x}{1+t} \geqslant \frac{t^y}{1+t}.$$

En intégrant ces fonctions continues avec les bornes dans l'ordre croissant, on obtient

$$\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \frac{t^y}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit, $f(x) \geqslant f(y)$. La fonction $f$ est donc décroissante. □

3. On a pour tout $t \in [0,1]$, $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \dfrac{t^x}{1+t} \leqslant t^x$. En intégrant ces fonctions continues avec les bornes dans l'ordre croissant, on obtient

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{x+1}t^{x+1}\right]_0^1 = \frac{1}{x+1}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+x} = 0$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. □

4. a. On a $0 \leqslant t \leqslant 1$ donc en appliquant la fonction $t \longmapsto t^x$ qui est croissante car $x \geqslant 0$, on a $t^x \leqslant 1$, ce qui nous donne $0 \leqslant 1 - t^x$. En multipliant le tout par $\dfrac{1}{1+t} > 0$, on obtient

$$0 \leqslant \frac{1-t^x}{1+t}.$$

Par ailleurs, comme $\dfrac{1}{1+t} \leqslant 1$, en multipliant par $1-t^x \geqslant 0$, on a

$$\frac{1-t^x}{1+t} \leqslant 1-t^x.$$

On a donc, pour $t \in [0,1]$,

$$0 \leqslant \frac{1-t^x}{1+t} \leqslant 1-t^x.$$

En intégrant ces fonctions continues avec les bornes dans l'ordre croissant, on obtient

$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{1-t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 1-t^x\,\mathrm{d}t = \left[t - \frac{1}{x+1}t^{x+1}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{x+1}.$$

$\square$

b. On a, par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \frac{1-t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(1+t)]_0^1 - f(x) = \ln(2) - f(x).$$

Et d'après la question précédente, on a $0 \leqslant \ln(2) - f(x) \leqslant \dfrac{x}{x+1}$.

Comme $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{x+1}$, d'après le théorème des gendarmes, on a $\lim\limits_{x\to 0} \ln(2) - f(x) = 0$, soit $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \ln(2)$. $\square$

**Exercice 13.** 1. Sur $\mathbb{R}^*$, $t \mapsto 1+t^2$ est une fonction continue avec $1+t^2 > 1$, donc $t \mapsto \ln(1+t^2)$ est continue par composition et strictement positive donc non nulle. Ainsi, la fonction que nous appellerons $g$ définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(t) = \dfrac{1}{\ln(1+t^2)}$ est bien continue sur $\mathbb{R}^*$, donc en particulier sur $[\min(x,2x), \max(x,2x)]$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x)$ est bien définie. $\square$

2. Notons $G$ une primitive de $g$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $f(x) = G(2x) - G(x)$.

Donc, comme $G$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $x \mapsto 2x$ est dérivable de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$, $f$ est bien dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de fonctions dérivables puis combinaison linéaire. On a de plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$f'(x) = 2G'(2x) - G'(x) = 2g(2x) - g(x).$$

On a donc

$$f'(x) = \frac{2}{\ln(1+4x^2)} - \frac{1}{\ln(1+x^2)}.$$

En réduisant au même dénominateur, on a

$$f'(x) = \frac{\ln((1+x^2)^2) - \ln(1+4x^2)}{\ln(1+4x^2)\ln(1+x^2)}.$$

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de son numérateur (le dénominateur est toujours strictement positif).

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln((1+x^2)^2) > \ln(1+4x^2).$$

Mais comme la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, cela revient à

$$f'(x) > 0 \iff (1+x^2)^2 > 1+4x^2.$$

Ce qui est équivalent à $1+2x^2+x^4 > 1+4x^2$, soit $x^2(x^2-2) > 0$ ou encore $x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) > 0$.

Donc, sur $\mathbb{R}_+^*$ $f'(x) > 0$ si et seulement si $x-\sqrt{2} > 0$ (le reste est strictement positif). $f$ est décroissante sur $]0,\sqrt{2}]$ puis croissante sur $[\sqrt{2},+\infty[$. □

3. a. Notons $h$ la fonction définie et dérivable sur $]-1;+\infty[$ par $h(u) = u - \ln(1+u)$, bien définie et dérivable car sur cet intervalle $1+u > 0$, donc on compose des fonctions dérivables puis on fait une combinaison linéaire de fonctions dérivables. On a $h'(u) = 1 - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{u}{1+u}$. Ainsi, $h'(u)$ est du signe de $u$ puisque $1+u > 0$. Donc $h$ est décroissante sur $]-1;0]$ et croissante sur $[0,+\infty[$. Ainsi $h$ est minimale en 0. Or $h(0) = 0$, donc $\forall u \in ]-1+\infty[$, $h(u) \geqslant 0$, ce qui est équivalent à

$$\forall u \in ]-1;+\infty[; \quad \ln(1+u) \leqslant u.$$

On aurait pu se contenter de regarder sur $[0,+\infty[$, mais... une fois n'est pas coutume, il vaut mieux en faire trop : cette inégalité étant classique, cela ne fait pas de mal de la revoir. □

b. En utilisant la question précédente, on a, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $0 \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant t^2$, donc en prenant l'inverse (tout est bien du même signe), on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad \frac{1}{\ln(1+t^2)} \geqslant \frac{1}{t^2}.$$

En intégrant de $x$ à $2x$ dans l'ordre croissant puisque $x > 0$, on a

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Or $\displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{2x} = -\frac{1}{2x} + \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$.

Ainsi, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2x}$.

Or, on a $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{2x} = +\infty$, ainsi, par minoration,

$\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$. □

4. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

a. Pour $x > 0$, lorsque $t \in [x, 2x]$, on a

$$0 < x^2 \leqslant t^2 \leqslant 4x^2$$

puisque la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. En ajoutant 1, puis en prenant le ln qui est strictement croissant sur $\mathbb{R}_+^*$,

$$0 = \ln(1) < \ln(1+x^2) \leqslant \ln(1+t^2) \leqslant \ln(1+4x^2),$$

puis en prenant l'inverse (décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$), on a

$$\frac{1}{\ln(1+x^2)} \geqslant \frac{1}{\ln(1+t^2)} \geqslant \frac{1}{\ln(1+4x^2)}.$$

On intègre ensuite de $x$ à $2x$ (encore une fois, les bornes sont dans le bon sens car $x > 0$), on a

$$\int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+x^2)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t \geqslant \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+4x^2)}\,\mathrm{d}t.$$

On termine en réalisant que le terme de gauche est celui de droite sont évidents et donc

$$\frac{2x-x}{\ln(1+x^2)} \geqslant f(x) \geqslant \frac{2x-x}{\ln(1+4x^2)},$$

ce qui nous donne le résultat attendu. $\square$

b. Puis, on cherche l'équivalent,

$$\frac{x}{\ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} \geqslant f(x) \geqslant \frac{x}{\ln(x^2)+\ln(4)+\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}.$$

En arrangeant un peu les termes, on trouve :

$$\frac{x}{2\ln(x)}\frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}} \geqslant f(x) \geqslant \frac{x}{2\ln(x)}\frac{1}{1+\frac{\ln(4)}{2\ln(x)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}{2\ln(x)}}.$$

Autrement dit, avec $x > 1$ pour que $\frac{x}{2\ln(x)} > 0$, on a

$$\frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}} \geqslant \frac{f(x)}{\frac{x}{2\ln(x)}} \geqslant \frac{1}{1+\frac{\ln(4)}{2\ln(x)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}{2\ln(x)}}.$$

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{2\ln(x)}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{1+\frac{\ln(4)}{2\ln(x)}+\frac{\ln\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)}{2\ln(x)}} = 1$, donc par encadrement

$$\frac{f(x)}{\frac{x}{2\ln(x)}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1.$$

Ainsi, en $+\infty$, $f(x) \sim \frac{x}{2\ln(x)}$. $\square$

5. On a, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$, donc $f(-x) = \int_{-x}^{-2x} \frac{1}{\ln(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$. On pose $u = -t$ donc $du = -\,\mathrm{d}t$ le changement de variable $\mathcal{C}^1$ qui nous donne

$$f(-x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\ln(1+(-u)^2)}(-du) = -f(x).$$

Ainsi, $f$ est impaire. $\square$

6. On peut écrire, en utilisant ce qui a été démontré précédemment et l'imparité de $f$ :

$$\begin{array}{c|ccccc||ccccc}
x & -\infty & & -\sqrt{2} & & 0 & 0 & & \sqrt{2} & & +\infty \\
\hline
 & & & f(-\sqrt{2}) & & & +\infty & & & & +\infty \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & -\infty & & & & -\infty & & & f(\sqrt{2}) & & 
\end{array}$$

$\square$

7. Vous n'oublierez pas de respecter les signes : $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$, la tangente horizontale à cet endroit là, le fait que $f$ tende vers $+\infty$ pas trop vite et la symétrie par rapport à 0 due à l'imparité. $\square$

**Exercice 14** (Intégrales de Wallis, un classique indémodable)**.** 1. Une question qui ne servira pas dans la suite, mais qui permet de vérifier que le candidat sait faire un changement de variable. En posant le changement de variable $\mathcal{C}^1\left([0, \frac{\pi}{2}]\right)$, $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ donc $du = -\,\mathrm{d}x$, on a

$$I_n = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \sin^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-du) = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

$\square$

2. On a, pour tout $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, $0 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$, donc $0 \leqslant \sin^{n+1}(x) \leqslant \sin^n(x)$. Ainsi, en intégrant dans l'ordre croissant des bornes de 0 à $\dfrac{\pi}{2}$, on obtient

$$0 \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Donc $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. $\square$

3. On a $I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x$. Faisons une intégration par parties en posant $u$ et $v$ deux fonctions $\mathcal{C}^1\left([0, \frac{\pi}{2}]\right)$ définies par

$$u'(x) = \sin(x); \qquad u(x) = -\cos(x)$$
$$v(x) = \sin^{n+1}(x); \quad v'(x) = (n+1)\cos(x)\sin^n(x)$$

Ainsi, on a

$$I_{n+2} = \Big[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\cos^2(x)\sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or $\Big[-\cos(x)\sin^{n+1}(x)\Big]_0^{\pi/2} = 0$ et $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$, donc

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2(x))\sin^n(x)\,\mathrm{d}x.$$

En utilisant la linéarité de l'intégrale, on trouve

$$I_{n+2} = (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x - (n+1)\int_0^{\pi/2} \sin^{n+2}(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $I_{n+2} = (n+1)I_n - (n+1)I_{n+2}$ ce que nous arrangeons en

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

Note culturelle : on peut alors montrer que $I_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^{2p}(p!)^2}\pi$ et $I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$. $\square$

4. Multiplions l'égalité précédente par $(n+2)I_{n+1}$ pour obtenir
$$(n+2)I_{n+1}I_{n+2} = (n+1)I_{n+1}I_n.$$
Ainsi la suite $\left((n+1)I_{n+1}I_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire.
On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = I_1 I_0$.
Or, $I_0 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} 1\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ et $I_1 = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \sin(x)\,\mathrm{d}x = [-\cos(x)]_0^{\pi/2} = 1$.
Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \dfrac{\pi}{2}$. $\square$

5. Là, ça se complique un peu. Remarquons que comme $(I_n)$ est décroissante, on a $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} \leqslant \dfrac{I_{n+1}}{I_n} \leqslant 1$ puisque $I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$ puis en multipliant tout par $\dfrac{1}{I_n} > 0$ ($I_n > 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue positive non nulle).
Par ailleurs, $I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2} I_n$, donc $\dfrac{I_{n+2}}{I_n} = \dfrac{n+1}{n+2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
Ainsi, par le théorème des gendarmes, on a $\dfrac{I_{n+1}}{I_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$, ou encore $I_{n+1} \sim I_n$.
Ensuite, reprenons l'égalité précédente. On a $(n+1)I_{n+1}I_n \sim nI_n^2$ puisque $n+1 \sim n$ et $I_{n+1} \sim I_n$.
On a donc $nI_n^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$, autrement dit $I_n^2 \sim \dfrac{\pi}{2n}$.
En prenant la racine carrée, on obtient, $I_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$. $\square$

# 19 Géométrie

**Exercice 1** (A propos des droites et des plans.)**.** 1. C'est l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{OM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. En posant $\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$, on trouve immédiatement qu'il s'agit de la droite d'équation $x + 2y = 0$.

C'est l'ensemble des points $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x + 2y = 0\} = \{(-2y, y) / y \in \mathbb{R}\}$ ce qui nous donne une représentation paramétrique.

De la même façon, on montre que le plan est l'ensemble des points tels que $\left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{n} \right\rangle = 0$ donc a pour équation $x + 2y + 3z = 0$ donc a pour représentation paramétrique $\{(-2y-3z, y, z)/(y,z) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$

2. Notons le point $A(3,2)$. Cette fois, on cherche les points $M(x,y)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. On trouve alors que la droite a pour équation $x + 2y = 7$ et donc c'est l'ensemble des points
$$\{(x,y)/x + 2y = 7\} = \{(7-2y, y)/y \in \mathbb{R}\}.$$
Dans $\mathbb{R}^3$, on note $A(3,2,1)$ et les points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$. On trouve que le plan a pour équation $x + 2y + 3z = 10$ et pour représentation paramétrique $\{(10-2y-3z, y, z)/(y,z) \in \mathbb{R}^2\}$. $\square$

3. La droite peut être représentée par
$$\{(1,1) + \lambda(1,2)/\lambda \in \mathbb{R}\} = \{(1+\lambda, 1+2\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}.$$
Pour déterminer une équation, on réalise qu'on cherche les points $M$ tels que, en notant $A(1,1)$, $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires. En faisant le déterminant de ces deux vecteurs, on récupère une équation cartésienne de cette droite, par exemple $-2x + y = -1$.

Le plan peut être représenté par

$$\{(1,1,1)+\lambda(1,2,3)+\mu(2,1,0)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\} = \{(1+\lambda+2\mu, 1+2\lambda+\mu, 1+3\lambda)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$$

Pour déterminer une équation de ce plan, on prend $M(x,y,z)$ un point de ce plan. Ainsi, il doit exister $\lambda$ et $\mu$ tels que $(1+\lambda+2\mu, 1+2\lambda+\mu, 1+3\lambda) = (x,y,z)$. Cela revient au système

$$\begin{cases} 1+\lambda+2\mu = & x \\ 1+2\lambda+\mu = & y \\ 1+3\lambda = & z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 1+\lambda+2\mu = & x \\ 1+3\lambda = & -x+2y \quad L_2 \leftarrow 2L_2 - L_1 \\ 1+3\lambda = & z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda+2\mu = & x-1 \\ 3\lambda = & -x+2y-1 \\ 0 = & x-2y+z \qquad L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{cases}$$

Ainsi, $\lambda$ et $\mu$ existent si et seulement si $x-2y+z=0$.

Une équation cartésienne de ce plan est $x-2y+z=0$. □

**Exercice 2.** 1. On remarque que cet ensemble se décrit $E_1 = \{(x,2x)/x\in\mathbb{R}\} = \{(0,0)+x(1,2)/x\in\mathbb{R}\}$. On reconnait alors la droite de vecteur directeur $(1,2)$ passant par $(0,0)$. □

2. On reconnait le plan de vecteur normal $(-2,1,0)$ passant par $(0,0,0)$ (attention, nous sommes bien dans $\mathbb{R}^3$).

   Remarquons que $O\in E_2$, ainsi que $A(1,2,0)\in E_2$ ou $B(0,0,1)\in\mathbb{E}_2$ Les vecteurs $\overrightarrow{OA}=(1,2,0)$ et $\overrightarrow{OB}=(0,0,1)$ sont directeurs du plan (ils ne sont pas colinéaires), donc une de ses représentations est

$$E_2 = \{(0,0,0)+\lambda(1,2,0)+\mu(0,0,1)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\} = \{(\lambda,2\lambda,\mu)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}.$$

   □

3. Immédiatement, on reconnait le plan de vecteur normal $(-2,1,1)$ passant par $(0,0,0)$. Remarquons que $O\in E_3$, ainsi que $A(1,2,0)\in E_3$ ou $B(0,-1,1)\in\mathbb{E}_3$ Les vecteurs $\overrightarrow{OA}=(1,2,0)$ et $\overrightarrow{OB}=(0,-1,1)$ sont directeurs du plan (ils ne sont pas colinéaires), donc une de ses représentations est

$$E_3\{(0,0,0)+\lambda(1,2,0)+\mu(0,-1,1)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\} = \{(\lambda,2\lambda-\mu,\mu)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}.$$

   □

4. Comme à la question précédente, il s'agit du plan de vecteur normal $(-2,1,1)$ mais passant par $(0,0,3)$ (par exemple). Comme il a le même vecteur normal, il est dirigé par le même système que le précédent (sinon, on aurait là encore pris 3 points du plan formants deux vecteurs non colinéaires). Ainsi, une représentation est

$$E_4 = \{(0,0,3)+\lambda(1,2,0)+\mu(0,-1,1)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\} = \{(\lambda,2\lambda-\mu,3+\mu)/(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}.$$

   □

5. On a $E_5 = \{(0,0,0) + \lambda(2,3,-1)/\lambda \in \mathbb{R}\}$. On reconnait la droite de vecteur directeur $(2,3,-1)$ passant par $(0,0,0)$.

   Pour lui trouver un système d'équations, on prend $(x,y,z) \in E_5$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\begin{cases} 2\lambda = & x \\ 3\lambda = & y \\ -\lambda = & z \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} 0 = & x + 2z & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ 0 = & y + 3z & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ -\lambda = & z \end{cases}$$

   Ainsi, $(x,y,z) \in E_5 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = & x + 2z \\ 0 = & y + 3z \end{cases}$

   Ainsi un système d'équations est, par exemple, $\begin{cases} x + 2z & = 0 \\ y + 3z & = 0 \end{cases}$

   Attention, ce n'est pas le seul ! Celui qui apparaitra dépendra de la façon dont vous avez échelonné le système. $\square$

6. On a $E_6 = \{(-1,2,0)+\lambda(2,3,-1)/\lambda \in \mathbb{R}\}$. On reconnait la droite de vecteur directeur $(2,3,-1)$ passant par $(-1,2,0)$.

   Pour lui trouver un système d'équations, on prend $(x,y,z) \in E_6$. Cela signifie qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

   $$\begin{cases} 2\lambda - 1 = & x \\ 3\lambda + 2 = & y \\ -\lambda = & z \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} -1 = & x + 2z & L_1 \leftarrow L_1 + 2L_3 \\ 2 = & y + 3z & L_2 \leftarrow L_2 + 3L_3 \\ -\lambda = & z \end{cases}$$

   Ainsi, $(x,y,z) \in E_6 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 = & x + 2z \\ 2 = & y + 3z \end{cases}$

   Ainsi un système d'équations est, par exemple, $\begin{cases} x + 2z & = -1 \\ y + 3z & = 2 \end{cases}$

   Encore une fois, ce n'est pas le seul ! Celui qui apparaitra dépendra de la façon dont vous avez échelonné le système. $\square$

7. On a $E_7 = \{(0,0,0) + a(2,1,1) + b(-1,2,0)/(a,b) \in \mathbb{R}^2\}$, ains il s'agit d'un plan de base $\big((2,1,1),(-1,2,0)\big)$ passant par l'origine.

   Pour en déterminer une équation, on prend $(x,y,z) \in E_7$ si et seulement si il existe $a$ et $b$ deux réels tels que

   $$\begin{cases} 2a - b = & x \\ a + 2b = & y \\ a = & z \end{cases}$$

   $$\iff \begin{cases} -b = & x - 2z & L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ 2b = & y - z & L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ a = & z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -b = & x - 2z \\ 0 = & 2x + y - 5z \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ a = & z \end{cases}$$

Le système est bien échelonné, il admet un unique couple solution si et seulement si $2x + y - 5z = 0$.

Ainsi, le plan a pour équation $2x + y - 5z = 0$. □

8. On a $E_8 = \{(-2, 1, 6) + a(2, 1, 1) + b(-1, 2, 0)/(a, b) \in \mathbb{R}^2\}$, ains il s'agit d'un plan de base $\big((2, 1, 1), (-1, 2, 0)\big)$ passant par $(-2, 1, 6)$.

   Pour en déterminer une équation, on prend $(x, y, z) \in E_8$ si et seulement si il existe $a$ et $b$ deux réels tels que

$$\begin{cases} 2a - b - 2 = & x \\ a + 2b + 1 = & y \\ a + 6 = & z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -b - 14 = & x - 2z \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_3 \\ 2b - 5 = & y - z \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_3 \\ a + 6 = & z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -b - 14 = & x - 2z \\ -33 = & 2x + y - 5z \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ a + 6 = & z \end{cases}$$

   Le système est bien échelonné, il admet un unique couple solution si et seulement si $2x + y - 5 = -33$.

   Ainsi, le plan a pour équation $2x + y - 5z = -33$.

   □

9. On pourrait croire qu'il s'agit d'une droite, mais pour identifier proprement les choses, essayons de paramétrer proprement l'ensemble.

   On a $(x, y, z) \in E_9 \iff \begin{cases} -2x + y + z = & 0 \\ 4x - 2y - 2z = & 0 \end{cases}$.

$$\iff \begin{cases} -2x + y + z = & 0 \\ 0 = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \end{cases}$$

   $\iff y = 2x - z$.

   Ainsi, $E_9 = \{(x, 2x - z, z)/(x, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{(0, 0, 0) + x(1, 2, 0) + z(0, -1, 1)/(x, z) \in \mathbb{R}^2\}$ donc $E_3$ est un plan de base $\big((1, 2, 0), (0, -1, 1)\big)$ et passant par l'origine. □

10. On a $(x, y, z) \in E_{10} \iff \begin{cases} x + y + z = & 0 \\ x - y + z = & 2 \end{cases}$.

$$\iff \begin{cases} x + y + z = & 0 \\ -2y = & 2 \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x + z = & 1 \\ y = & -1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} z = & -x + 1 \\ y = & -1 \end{cases}$$

   Ainsi, $E_{10} = \{(x, -1, -x + 1)/x \in \mathbb{R}\} = \{(0, -1, 1) + x(1, 0, -1)/x \in \mathbb{R}\}$ donc $E_{10}$ est la droite donc de vecteur directeur $(1, 0, -1)$ et passant par $(0, -1, 1)$. □

11. C'est faussement difficile : en effet, $x^2+y^2=0 \iff x=y=0$. On a donc

$$E_{11}=\{(0,0,z)/z\in\mathbb{R}\}=\{(0,0,0)+z(0,0,1)/z\in\mathbb{R}\}.$$

Il s'agit de la droite de vecteur directeur $(0,0,1)$ passant par $(0,0,0)$. $\square$

**Exercice 3.** 1. On a, au vu du cours, $\overrightarrow{n}=(2,3)$. $\square$

2. Notons $D'$ cette droite. Considérons un point $M$ de coordonnées $(x,y)$.

On a $M\in D' \iff \det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{n})=0 \iff \begin{vmatrix} x-3 & 2\\ y+6 & 3\end{vmatrix}=0.$

Autrement dit $M\in D' \iff 3(x-3)-2(y+6)=0 \iff 3x-2y=21$. $\square$

3. Notons $(x,y)$ les coordonnées du point $H$. Le projeté orthogonal de $A$ sur $D$ est le point $H$ tel que $\overrightarrow{AH}$ est orthogonal à $D$, autrement dit que $H\in D'$, et tel que $H\in D$. Autrement dit, $H$ est le point d'intersection de $D$ et $D'$.

Ainsi, $H\in D\cap D' \iff \left\{\begin{array}{lll} 2x & +3y & =1\\ 3x & -2y & =21\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow 2L_2-3L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{lll} 2x & +3y & =1\\ & -13y & =39.\end{array}\right.$

Autrement dit $H\in D\cap D' \iff \left\{\begin{array}{lll} 2x & +3y & =1\\ & y & =-3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll} x & =5\\ y & =-3.\end{array}\right.$

Ainsi, $H$ a pour coordonnées $(5,-3)$. $\square$

4. On a $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2/2x+3y=1\}$, donc $D=\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}y,y\right)/y\in\mathbb{R}\right\}$.

Ainsi, la droite $D$ est la droite passant par le point $M$ de coordonnées $(-1,1)$ (en faisant $y=1$ pour s'éviter des fractions) et dirigée par le vecteur $\left(-\frac{3}{2},1\right)$ ou encore par $\overrightarrow{u}=(-3,2)$. $\square$

5. On peut ainsi dire que $D$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u'}=\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2)$ car $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{13}$.

Ainsi, on a $\overrightarrow{MH}=\left\langle\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u'}\right\rangle\overrightarrow{u'}$. Notons $(x,y)$ les coordonnées de $H$. On a alors

$$\left\langle\overrightarrow{MA},\overrightarrow{u'}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{13}}\langle(3+1,-6-1),(-3,2)\rangle=\frac{-26}{\sqrt{13}}.$$

Ainsi, $\overrightarrow{MH}=\frac{-26}{13}(-3,2)=(6,-4)$.

En notant $(x,y)$ les coordonnée de $H$, on a $\overrightarrow{MH}=(x+1,y-1)$, donc $H$ a pour coordonnées $(5,-3)$. $\square$

**Exercice 4.** 1. Notons $\overrightarrow{u'}=\frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ un tel vecteur. On $\|\overrightarrow{u}\|=\sqrt{5}$, donc prenons $\overrightarrow{u'}=\frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$.

Notons $(x,y)$ les coordonnées de $H$. On a $\overrightarrow{AH}=\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u'}\right\rangle\overrightarrow{u'}$.

Or $\overrightarrow{AB}=(-5,5)$, donc $\left\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{u'}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{5}}\langle(-5,5),(1,2)\rangle=\frac{5}{\sqrt{5}}$.

De plus, $\overrightarrow{AH}=(x-2,y+1)$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{5}{5}(1,2)=(1,2).$, donc $(x,y)=(3,1)$.

Ainsi, $H$ a pour coordonnées $(3,1)$. $\square$

2. Notons $M$ un point et $(x, y)$ ses coordonnées. On a $M \in D \iff \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}) = 0 \iff \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ y+1 & 2 \end{vmatrix} = 0.$

   Ainsi, $M \in D \iff 2(x-2) - (y+1) = 0 \iff 2x - y = 5$. La droite $D$ admet donc pour équation $2x - y = 5$. $\square$

3. Notons $M$ un point et $(x, y)$ ses coordonnées. On a $M \in D' \iff \left\langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \iff \langle (x+3, y-4), (1, 2) \rangle = 0.$

   Ainsi, $M \in D' \iff (x+3) + 2(y-4) = 0 \iff x + 2y = 5$. La droite $D'$ admet donc pour équation $x + 2y = 5$. $\square$

4. Le point $H$ est le point tel que $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $D$, donc $H \in D'$ et $H \in D$.

   Notons $(x, y)$ les coordonnées de $H$.

   On a ainsi, $H \in D \cap D' \iff \begin{cases} 2x & -y & = 5 \\ x & +2y & = 5 \end{cases} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1}{\iff} \begin{cases} 2x & -y & = 5 \\ 5x & & = 15. \end{cases}$

   Autrement dit $H \in D \cap D' \iff \begin{cases} 2x & -y & = 5 \\ x & & = 3. \end{cases} \iff \begin{cases} & -y & = 1 \\ x & & = 3. \end{cases}$

   Ainsi, $H$ a pour coordonnées $(3, 1)$ . $\square$

**Exercice 5.** 1. Notons $\overrightarrow{u'} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$ un tel vecteur. On $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{6}$, donc prenons $\overrightarrow{u'} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2).$

Notons $(x, y, z)$ les coordonnées de $H$. On a $\overrightarrow{AH} = \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u'} \right\rangle \overrightarrow{u'}$.

Or $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u'} \right\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{6}} \langle (1, 4, -1), (1, 1, 2) \rangle = \dfrac{3}{\sqrt{6}}.$

De plus, $\overrightarrow{AH} = (x-2, y+1, z-1)$, et $\overrightarrow{AH} = \dfrac{3}{6}(1, 1, 2) = \dfrac{1}{2}(1, 1, 2)$, donc $(x, y, z) = \left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}, 2\right)$.

Ainsi, $H$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}, 2\right)$ . $\square$

2. Notons $M$ un point de coordonnées $(x, y, z)$. On a $M \in D$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u}$.

   Ainsi, $M \in D \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x & & & -2 & = \lambda \\ & y & & +1 & = \lambda \\ & & z & -1 & = 2\lambda \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1}}{\iff} \begin{cases} x & & & -2 & = \lambda \\ -x & +y & & +3 & = 0 \\ -2x & & +z & +3 & = 0 \end{cases}$

   Ainsi, un système d'équation caractérisant $D$ est $\begin{cases} -x & +y & & = -3 \\ -2x & & +z & = -3 \end{cases}$ ou encore pour éviter l'abus de signe moins, $\begin{cases} x & -y & & = 3 \\ 2x & & -z & = 3 \end{cases}$ $\square$

3. Notons $(x, y, z)$ les coordonnées de $H$. Le point $H$ est tel que $\overrightarrow{BH}$ est orthogonal à $D$, donc à $\overrightarrow{u}$. Ainsi $\left\langle \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0 \iff \langle (x-3, y-3, z), (1, 1, 2) \rangle = 0$. Ainsi les coordonnées de $H$ vérifient $(x-3) + (y-3) + 2z = 0 \iff x + y + 2z = 6$.

Ainsi, comme $H \in D$, les coordonnées de $H$ vérifient

$$\begin{cases} x & -y & & = 3 \\ 2x & & -z & = 3 \\ x & +y & +2z & = 6 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + L_1}{\iff} \begin{cases} x & -y & & = 3 \\ 2x & & -z & = 3 \\ 2x & & +2z & = 9 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} x & -y & & = 3 \\ 2x & & -z & = 3 \\ 0 & & 3z & = 6 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} x & -y & & = 3 \\ 2x & & & = 5 \\ 0 & & z & = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} & -y & & = \dfrac{1}{2} \\ x & & & = \dfrac{5}{2} \\ 0 & & z & = 2 \end{cases}$$

Ainsi, $H$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{5}{2}, -\dfrac{1}{2}, 2\right)$. $\square$

**Exercice 6.** 1. On sait au vu du cours que l'on peut prendre $\overrightarrow{n} = (1, -2, 1)$. $\square$

2. Une telle droite $D$ est constituée par l'ensemble des points $M$ tels que $\overrightarrow{BM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$, c'est-à-dire tels qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{BM} = \lambda \overrightarrow{n}$.

   Ainsi, $D = \{(-1+\lambda, 2-2\lambda, 1+\lambda)/\lambda \in \mathbb{R}\}$. $\square$

3. Le point $H$ est le point d'intersection de $D$ (puisque $\overrightarrow{BM}$ et $\mathcal{P}$ sont orthogonaux) et de $\mathcal{P}$.

   Ainsi, comme $H \in D$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $H$ ait pour coordonnées $(-1+\lambda, 2-2\lambda, 1+\lambda)$. Mais de plus, les coordonnées de $H$ vérifient l'équation $x - 2y + z = 2$, donc
   $$(-1+\lambda) - 2(2-2\lambda) + (1+\lambda) = 2 \iff 6\lambda = 6 \iff \lambda = 1.$$

   Ainsi, $H$ a pour coordonnées $(0, 0, 2)$. $\square$

4. Considérons un point $M$ de coordonnées $(x, y, z)$. On a $M \in P \iff x - 2y + z = 2 \iff x = 2y - z + 2$.

   Ainsi, $\mathcal{P} = \{(2y - z + 2, y, z)/(y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \{(2,0,0) + \lambda(2,1,0) + \mu(-1,0,1)/(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\}$.

   Le plan $\mathcal{P}$ passe par le point $(2, 0, 0)$ et admet pour système directeur le couple $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ avec $\overrightarrow{u} = (2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v} = (-1, 0, 1)$. $\square$

5. Si $\overrightarrow{v'}$ est coplanaire à $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{v'} = \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}$.

   On souhaite avoir $\left\langle \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0$, soit $\langle \lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}, u \rangle = 0$, soit encore
   $$\lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \mu \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 0 \iff \lambda 5\lambda - 2\mu = 0.$$

   Prenons par exemple $\lambda = 2$ et $\mu = 5$, donc $\overrightarrow{v'} = 2(2,1,0) + 5(-1,0,1) = (-1, 2, 5)$. $\square$

6. Posons $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|} \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{v'}\right\|} \overrightarrow{v'}$ qui forment deux vecteurs orthonormaux (orthogonaux d'après la question précédente, orthonormaux puisque normalisés).

   Ainsi, $\overrightarrow{u_1} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_1} = \dfrac{1}{\sqrt{30}}(-1, 2, 5)$.

On a alors, comme $\overrightarrow{AB} = (-3, 2, 1)$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH} &= \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle \overrightarrow{u_1} + \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle \overrightarrow{v_1} \\
&= \frac{-4}{5}(2, 1, 0) + \frac{12}{30}(-1, 2, 5) \\
&= \frac{-24}{30}(2, 1, 0) + \frac{12}{30}(-1, 2, 5) \\
&= \frac{1}{30}(-60, 0, 60).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\overrightarrow{AH} = (-2, 0, 2)$. Comme $A(2, 0, 0)$, $H$ a pour coordonnées $(0, 0, 2)$. $\square$

**Exercice 7.** 1. On cherche donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{v'} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$ et $\left\langle \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0$.

On a

$$\left\langle \overrightarrow{v'}, \overrightarrow{u} \right\rangle = \langle \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle + \mu \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle = 6\lambda + 2\mu = 0.$$

On peut par exemple prendre $\lambda = 1$ et $\mu = -3$, donc $\overrightarrow{v'} = \overrightarrow{u} - 3\overrightarrow{v} = (4, -2, -1)$. $\square$

2. Il suffit de prendre $u_1 = \dfrac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, 2)$ et $v_1 = \dfrac{1}{\left\|\overrightarrow{v'}\right\|}\overrightarrow{v'} = \dfrac{1}{\sqrt{21}}(4, -2, -1)$.

   En effet, ils sont orthogonaux et une fois renormalisés, ils sont de norme 1. $\square$

3. Notons $(x, y, z)$ les coordonnées de $H$. On a

$$\overrightarrow{AH} = \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle \overrightarrow{u_1} + \left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle \overrightarrow{v_1}.$$

   Or $\overrightarrow{AB} = (1, -7, 4)$, puis $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{u_1} \right\rangle \overrightarrow{u_1} = \dfrac{2}{6}(1, 1, 2) = \dfrac{1}{3}(1, 1, 2)$ et $\left\langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{v_1} \right\rangle \overrightarrow{v_1} = \dfrac{14}{21}(4, -2, -1)$ś$dfrac23(4,-2,-1)$.
   Ainsi, $\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{3}(1, 1, 2) + \dfrac{2}{3}(4, -2, -1) = \dfrac{1}{3}(9, -3, 0) = (3, -1, 0)$.
   Or $\overrightarrow{AH} = (x - 1, y - 1, z - 1)$, donc $(x, y, z) = (1, 1, 1) + (3, -1, 0) = (4, 0, 1)$.
   $H$ a pour coordonnées $(4, 0, 1)$. $\square$

4. Notons $M$ un point de coordonnées $(x, y, z)$. On a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{P} &\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v} \\
&\iff \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \left\{\begin{array}{rcll} x - 1 &=& \lambda & -\mu \\ y - 1 &=& \lambda & +\mu \\ z - 1 &=& 2\lambda & +\mu \end{array}\right. \\
&\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1}}{\iff} \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \left\{\begin{array}{rcll} x - 1 &=& \lambda & -\mu \\ x + y - 2 &=& 2\lambda & \\ x + z - 2 &=& 3\lambda & \end{array}\right. \\
&\underset{L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_2}{\iff} \exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2; \left\{\begin{array}{rcll} x - 1 &=& \lambda & -\mu \\ x + y - 2 &=& 2\lambda & \\ -x - 3y + 2z + 2 &=& 0 & \end{array}\right.
\end{aligned}$$

   Ainsi, une équation caractérisant $\mathcal{P}$ est $x + 3y - 2z = 2$. $\square$

5. Notons $M$ un point de coordonnées $(x,y,z)$. On a $M \in D$ si et seulement si $\left\langle \overrightarrow{BM}, u \right\rangle = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{BM}, \overrightarrow{v} \right\rangle = 0$.

   Ainsi, comme $\overrightarrow{BM} = (x-2, y+6, z-5)$, on a

   $$\left\langle \overrightarrow{BM}, u \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow (x-2) + (y+6) + 2(z-5) = 0$$

   et on a

   $$\left\langle \overrightarrow{BM}, v \right\rangle = 0 \Longleftrightarrow -(x-2) + (y+6) + (z-5) = 0.$$

   Ainsi, un système décrivant $D$ est

   $$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +2z & = 6 \\ -x & +y & +z & = -3 \end{array}\right.$$

   □

6. Le point $H$ est sur la droite $D$ et dans le plan $\mathcal{P}$ ainsi, ses coordonnées notées $(x,y,z)$ vérifient le système d'équations

   $$\left\{\begin{array}{llll} x & +y & +2z & = 6 \\ -x & +y & +z & = -3 \\ x & +3y & -2z & = 2 \end{array}\right. \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} x & +y & +2z & = 6 \\ & 2y & +3z & = 3 \\ & 2y & -4z & = -4 \end{array}\right. \underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{llll} x & +y & +2z & = 6 \\ & 2y & +3z & = 3 \\ & & -7z & = -7 \end{array}\right.$$

   C'est équivalent à $\left\{\begin{array}{lll} x & & = 4 \\ & y = & 0 \\ & z & = 1. \end{array}\right.$

   Ainsi, la seule solution du système est $(4,0,1)$ ce qui donne les coordonnées de $H$. □

**Exercice 8.** 1. Notons $M$ ce point. Comme $M \in \mathcal{D}_1$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M(1+t, 2-t)$. Comme $M \in \mathcal{D}_2$, il existe $s \in \mathbb{R}$ tel que $M(s, 2s)$.

   Ainsi, on doit avoir l'existence d'un couple $(s,t)$ tel que

   $$\left\{\begin{array}{rl} 1+t = & s \\ 2-t = & 2s \end{array}\right.$$

   $$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rl} s-t = & 1 \\ 2s+t = & 2 \end{array}\right.$$

   $$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rll} s-t = & 1 & \\ 3s = & 3 & L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \end{array}\right.$$

   Donc le couple $(s,t)$ existe, est unique et vaut $(1,0)$.

   Ainsi, $M$ est le point de coordonnées $(1,2)$. □

2. Il est clair que le point $(2,0) \in \mathcal{D}$. Par ailleurs, un vecteur normal est $(1,1)$, donc un vecteur directeur est $(-1,1)$. Par ailleurs,

   $$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 2 - y\} = \{(2-y, y) / y \in \mathbb{R}\} = \{(2,0) + y(-1,1) / y \in \mathbb{R}\}.$$

   On retrouve ce qu'on a affirmé au-dessus. □

3. Notons $H(x_H, y_H)$ cette projection.

On a $\overrightarrow{MH} = (x_H - 2, y_H - 1)$ normal à $\Delta$, donc $\exists\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{MH} = \lambda(2, -1)$.

Ainsi, $H(2 + 2\lambda, 1 - \lambda)$. Par ailleurs, comme $H \in \Delta$, on a

$$2(2 + 2\lambda) - (1 - \lambda) + 2 = 0 \iff 5\lambda = -5.$$

Ainsi, $\lambda = -1$, donc $H(0, 2)$, et on a $\overrightarrow{MH} = (-2, 1)$ donc la distance est $\left\|\overrightarrow{MH}\right\| = \sqrt{5}$. $\square$

**Exercice 9.** 1. Notons $H$ le projeté orthogonal de $U$ sur la droite. On sait que $\overrightarrow{UH}$ est colinéaire au vecteur normal à la droite, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{UH} = \lambda(2, -3)$.

Ainsi, $H(1 + 2\lambda, 1 - 3\lambda)$.

On a aussi, comme $H$ est sur la droite,

$$2(1 + 2\lambda) - 3(1 - 3\lambda) = 0 \iff 13\lambda = 1.$$

Soit $\lambda = \frac{1}{13}$. Ainsi, $H$ a pour coordonnées $\frac{5}{13}(3, 2)$. $\square$

2. Notons $H$ le projeté orthogonal de $U$ sur la droite. On sait que $\overrightarrow{UH}$ est colinéaire au vecteur normal à la droite, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{UH} = \lambda(-1, 2)$.

Ainsi, $H(1 - \lambda, 2 + 2\lambda)$.

On a aussi, comme $H$ est sur la droite,

$$-(1 - \lambda) + 2(2 + 2\lambda) = 1 \iff 5\lambda = -2.$$

Soit $\lambda = -\frac{2}{5}$. Ainsi, $H$ a pour coordonnées $\frac{1}{5}(7, 6)$. $\square$

3. Notons $H(x, y, z)$ le projeté orthogonal de $U$ sur la droite. On a alors

$\begin{cases} y &= -3x + 3 \\ z &= 2x - 3 \end{cases}$ en faisant $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$.

Ainsi, on sait qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $H(x, -3x + 3, 2x - 3)$.

Au passage, on récupère que $(1, -3, 2)$ dirige la droite. Ainsi, on a $\overrightarrow{UH} = (x-1, -3x+2, 2x - 2)$ orthogonal avec $(1, -3, 2)$.

On a alors

$$(x - 1) - 3(-3x + 2) + 2(2x - 2) = 0 \iff 14x = 11.$$

En réinjectant la valeur de $x$ dans les coordonnées de $H$, on récupère ses coordonnées : $\frac{1}{14}(11, 9, -20)$. $\square$

4. Notons $H$ le projeté orthogonal de $U$ sur le plan. On sait que $\overrightarrow{UH}$ est colinéaire au vecteur normal au plan, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{UH} = \lambda(2, 2, -1)$.

Ainsi, $H(1 + 2\lambda, 2 + 2\lambda, -\lambda)$.

Comme $H$ est dans le plan, on a aussi

$$2(1 + 2\lambda) + 2(2 + 2\lambda) - (-\lambda) = 0 \iff 9\lambda = -6.$$

Soit $\lambda = -\frac{2}{3}$. Ainsi, $H$ a pour coordonnées $\frac{1}{3}(-1, 2, 2)$. $\square$

**Exercice 10.** 1. Il s'agit tout simplement d'utiliser la forme canonique du trinôme du second degré. En effet,

$$x^2 + y^2 - 4x + y + m = 0 \iff (x-2)^2 - 4 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + m = 0.$$

Ainsi, on trouve que l'équation qui régit cet ensemble est en fait

$$(x-2)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{17}{4} - m.$$

On peut donc conclure :

- Si $m > \frac{17}{4}$, l'ensemble est vide.
- Si $m = \frac{17}{4}$, il s'agit du point de coordonnées $(2, -\frac{1}{2})$.
- Si $m < \frac{17}{4}$, il s'agit du cercle de centre $(2, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\sqrt{\frac{17}{4} - m}$.
  Dans ce cas, on a $\left\{\left(2 + \sqrt{\frac{17}{4} - m}\cos(t), -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{17}{4} - m}\sin(t)\right) / t \in \mathbb{R}\right\}$.

□

2. On cherche les points qui vérifient deux équations simultanément, celle du cercle et celle de la droite. Notons $M(x,y)$ un tel point. On a alors
$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 = & 1 \\ px - y + 1 = & 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x-3)^2 + (px+1)^2 = & 1 \\ y = & px + 1 \end{cases}$
Intéressons nous à la première équation. En développant, elle est équivalente à

$$x^2 - 6x + 9 + p^2x^2 + 2px + 1 = 1 \iff (p^2+1)x^2 + 2(p-3)x + 9 = 0.$$

Son discriminant est $\Delta = 4(p-3)^2 - 4(p^2+1)9 = -32p^2 - 24p = -8p(4p+3)$.
Ainsi, il n'y a d'intersection que lorsque $p \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right]$ (une seule lorsque $p = 0$ ou $p = -\frac{3}{4}$).
Dans ce cas, on a

$$\left(\frac{2(3-p) - \sqrt{-8p(4p+3)}}{2(1+p^2)}, p\frac{2(3-p) - \sqrt{-8p(4p+3)}}{2(1+p^2)} + 1\right)$$

et

$$\left(\frac{2(3-p) + \sqrt{-8p(4p+3)}}{2(1+p^2)}, p\frac{2(3-p) + \sqrt{-8p(4p+3)}}{2(1+p^2)} + 1\right).$$

Ces deux solutions sont confondues lorsque $p = 0$ ou $p = -\frac{3}{4}$. □

3. Les éventuelles intersections vérifient les deux équations de cercle. Ainsi, un tel point de coordonnées $(x,y)$ vérifiera :
$\begin{cases} \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = & \frac{9}{4} \\ x^2 + (y-2)^2 = & m \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 - 3x + y^2 = & 0 \\ x^2 + y^2 - 4y = & m - 4 \end{cases}$ On va commencer à essayer de simplifier le système.

Il est équivalent à
$\begin{cases} x^2-3x+y^2 = & 0 \\ 3x-4y = & m-4 \quad L_2 \leftarrow L_2-L_1 \end{cases}$
On a donc $4y=-3x+m-4$, donc la première équation devient

$$x^2-3x+\frac{1}{16}(-3x+m-4)^2=0 \Longleftrightarrow 16x^2-48x+9x^2-6(m-4)x+(m-4)^2.$$

Soit
$$25x^2-6(m+4)x+(m-4)^2=0.$$

Cherchons le discriminant de cette équation. On a

$$\Delta=36(m+4)^2-4\times 25(m-4)^2=\left[6(m+4)-10(m-4)\right]\left[6(m+4)+10(m-4)\right].$$

Soit
$$\Delta=(-4m+64)(16m-16)=-64(m-16)(m-1).$$

Ainsi, on a un seul point d'intersection lorsque $m=1$ ou $m=16$. On en a 2 si $m\in]1,16[$ et aucun dans le cas où $m<1$ ou $m>16$.

Je vous laisse exprimer les coordonnées des points d'intersection en fonction de $m$ : les expressions sont vraiment encombrantes (c'est pour ça que je n'ai pas posé la question). $\square$

**Exercice 11.** 1. Comme il est parallèle à $\mathcal{P}_1$, il a le même vecteur normal, donc il existe $d\in\mathbb{R}$ tel que son équation soit

$$x+y+z=d.$$

Comme $A\in\mathcal{P}_1$, ses coordonnées vérifient l'équation. Ainsi, on doit avoir $1+2+3=d$.

Ainsi, $\mathcal{P}_1'$ est le plan d'équation $x+y+z=6$. $\square$

2. Notons $(x,y,z)\in\mathcal{P}_1\cap\mathcal{P}_2$. C'est équivalent à
$\begin{cases} x+y+z = & 3 \\ 2x-y+z = & 2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x+y+z = & 3 \\ x-2y = & -1 \quad L_2-L_1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} z = & -3y+4 \\ x = & 2y-1 \end{cases}$

On a donc $\Delta=\{(2y-1,y,-3y+4)/y\in\mathbb{R}\}=\{(-1,0,4)+y(2,1,-3)/y\in\mathbb{R}\}$.

Ainsi, $\Delta$ est la droite passant par $(-1,0,4)$ dirigée par $(2,1,-3)$. $\square$

3. Notons que $\Delta'=\{(a+2\mu,b+\mu,c-3\mu)/\mu\in\mathbb{R}\}$ puisqu'elle est parallèle à $\Delta$ où $(a,b,c)$ représente un point par lequel elle passe.

Comme $\Delta'\in\mathcal{P}_1$, on a $(a+2\mu)+(b+\mu)+(c-3\mu)=3$ ce qui est équivalent à $a+b+c=3$.

De plus, on doit avoir $\Delta'$ et $\mathcal{D}$ qui sont sécantes, donc il existe un point dans l'une et dans l'autre simultanément. Ainsi, il existe $\lambda$ et $\mu$ deux réels tels que

$$(1+2\lambda,3\lambda,-1+\lambda)=(a+2\mu,b+\mu,c-3\mu).$$

C'est équivalent au système $\begin{cases} 2\lambda-2\mu = & a-1 \\ 3\lambda-\mu = & b \\ \lambda+3\mu = & c+1 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} -4\lambda = & a-2b-1 \quad L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2 \\ 3\lambda - \mu = & b \\ 10\lambda = & 3b+c+1 \quad L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -4\lambda = & a-2b-1 \\ 3\lambda - \mu = & b \\ 0 = & 5a-4b+2c-3 \quad L_3 \leftarrow 2L_3 + 5L_1 \end{cases}$$

Ainsi, un point par lequel doit passer $\Delta'$ doit vérifier $\begin{cases} a+b+c = & 3 \\ 5a-4b+2c = & 3 \end{cases} \iff$

$\begin{cases} a+b+c = & 3 \\ 3a-6b = & -3 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = & 2b+4 \\ a = & 2b-1 \end{cases}$

Ainsi, on peut remarquer qu'elle peut passer par, entre autres, $(-1,0,4)$... et là on remarque qu'en fait $\Delta' = \Delta$. $\square$

**Exercice 12.** 1. On peut chercher un paramétrage du plan en disant qu'il s'agit du plan passant par $A$ dirigé par $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. Mais soyons plus originaux et direct. On cherche 4 réels tels que, pour les coordonnées de $A, B$, et $C$ on ait $ax+by+cz=d$.

Ainsi, on a le système suivant

$$\begin{cases} a+b+c = & d \\ 2b+2c = & d \\ -a+2b = & d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 3b+c = & 2d \quad L_1 \leftarrow L_1 + L_3 \\ 2b+2c = & d \\ -a+2b = & d \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 4b = & 3d \quad L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2 \\ 2b+2c = & d \\ -a+2b = & d \end{cases}$$

En prenant $d=4$ (pour éviter une fraction dans la valeur de $b$), on récupère $b=3$, $c=-1$ et $a=2$. Ainsi, une équation du plan est $2x+3y-z=4$. $\square$

2. C'est une droite passant par $(0,-3,1)$ et dirigé par $(2,3,-1)$, donc elle peut se paramétrer par :

   $\{(2\lambda, -3+3\lambda, 1-\lambda / \lambda \in \mathbb{R}\}$. $\square$

3. Il s'agit d'un point $D'$ de la droite évoquée ci-dessus (puisqu'elle est orthogonale au plan $\mathcal{P}$) tel que le milieu de $[DD']$ soit le point d'intersection entre la droite et $\mathcal{P}$. Commençons par déterminer ce milieu que l'on notera $I$.

   Comme $I$ est sur la droite, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $I(2\lambda, -3+3\lambda, 1-\lambda)$ et comme il est dans $\mathcal{P}$, on a

   $$2(2\lambda) + 3(-3+3\lambda) - (1-\lambda) = 4 \iff 14\lambda = 14 \iff \lambda = 1.$$

   Ainsi, $I(2,0,0)$.

   Or comme $I$ est le milieu de $[DD']$, on a $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{ID'}$.

   Or $\overrightarrow{DI} = (2,3,-1)$. Si on note $D'(x,y,z)$, on a $(x-2,y,z) = (2,3,-1)$ donc $D'$ a pour coordonnées $(4,3,-1)$. $\square$

**Exercice 13.** 1. Comme il s'agit de quantités positives, on a

$$\begin{aligned}
\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\| &\iff \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\\
&\iff \langle \vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle = \langle \vec{u}-\vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\rangle\\
&\iff \langle \vec{u}, \vec{u}+\vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}+\vec{v}\rangle\\
&\qquad = \langle \vec{u}, \vec{u}-\vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}-\vec{v}\rangle \text{ par linéarité à gauche}\\
&\iff \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{v}\rangle\\
&\qquad = \langle \vec{u}, \vec{u}\rangle - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle + \langle \vec{v}, \vec{u}\rangle - \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle \text{ par linéarité à droite}\\
&\iff 2\langle \vec{u}, \vec{v}\rangle = 0 \text{ en simplifiant et par symétrie}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = \|\vec{u}-\vec{v}\|$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. □

2. Un parallélogramme est $ABCD$ est un rectangle si et seulement il admet un angle droit en n'importe lequel de ses sommets. Donc $ABCD$ est un rectangle si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont orthogonaux.

   Cela arrive si et seulement si $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}\right\|$.

   Or on a $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, ainsi, la condition devient $\left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\right\|$. Ce qu'on réécrit en $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left\|\overrightarrow{DB}\right\|$.

   Autrement dit, un parallélogramme est un rectangle si et seulement si ses diagonales ont la même longueur ! □

**Exercice 14.** 1. On a $\mathcal{D}_1 = \{(3,-2,1)+t(1,-1,1)/t \in \mathbb{R}\}$ donc $\mathcal{D}_1$ passe par $A_1(3,-2,1)$ et est de vecteur directeur $\vec{v_1} = (1,-1,1)$.

   On pourrait paramétrer $\mathcal{D}_2$, mais on peut remarquer que $\mathcal{D}_2$ passe par $A_2(0,0,0)$ et aussi par $B(-1,0,1)$ donc est dirigée par $\overrightarrow{A_2B} = \vec{v_2} = (-1,0,1)$. □

2. On cherche $\vec{u} = (x,y,z)$ tel que $\langle \vec{u}, \vec{v_1}\rangle = 0$ et $\langle \vec{u}, \vec{v_2}\rangle = 0$.

   Cela revient au système

$$\left\{\begin{array}{rl} x-y+z = & 0\\ -x+z = & 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rll} -y+2z = & 0 & L_1 \leftarrow L_1 + L_2\\ -x+z = & 0 & \end{array}\right.$$

   Ainsi, on peut prendre n'importe quel vecteur de la forme $(z, 2z, z)$ donc $\vec{u} = (1,2,1)$ par exemple. □

3. Il suffit de calculer $\langle \vec{u}, \vec{v_1}\rangle$, $\langle \vec{u}, \vec{v_2}\rangle$, et $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2}\rangle$, on trouve que chacun fait 0. □

4. Remarquons que $\vec{v_2}$ est orthogonal à $\mathcal{P}_1$ puisqu'il est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v_1}$.

   Ainsi, une équation de $\mathcal{P}_1$ sera de la forme $x-z=d$. Comme $A_1 \in \mathcal{P}_1$, on a $3-1=d$, donc une équation de $\mathcal{P}_1$ est $x-z=2$.

   De même, $\vec{v_1}$ est orthogonal à $\mathcal{P}_2$ puisqu'il est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v_2}$.

   Ainsi, une équation de $\mathcal{P}_2$ sera de la forme $x-y+z=d$. Comme $A_2 \in \mathcal{P}_2$, on a $0=d$, donc une équation de $\mathcal{P}_1$ est $x-y+z=0$.

   L'intersection de ces deux plans est bien une droite, ils ne sont pas parallèles (ils admettent des vecteurs normaux ne sont pas colinéaires).

   On remarque alors que $\mathcal{P}_1 \cap P_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x-z=2 \text{ et } x-y+z=0\}$.

   Cherchons les points d'intersection des droites.

   Notons $M \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1$. Alors, comme $M \in \mathcal{D}_1$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $M(3+t, -2-t, 1+t)$. Comme $M \in \mathcal{D}$, on a

$$(3+t)-(1+t) = 2 \text{ et } (3+t)-(-2-t)+(1+t) = 0 \iff t = -2$$

Donc on a $M(1,0,-1)$. Ainsi, on a $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \{(1,0,-1)\}$

Notons un nouveau $M(x,y,z) \in \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2$. C'est le cas si et seulement si le système suivant est vérifié :

$$\left\{\begin{array}{rl} x-y+z= & 0 \\ x-z= & 2 \\ x+2y+z= & 0 \\ -x+2y-z= & 0 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rll} x-y+z= & 0 & \\ y-2z= & 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 3y= & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ y= & 0 & L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{rl} x+z= & 0 \\ -2z= & 2 \\ y= & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi $z=-1$, donc $x=1$. On a donc $M(1,0,-1)$.

On a $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_1 = \{(1,0,-1)\}$ et $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}_2 = \{(1,0,-1)\}$ aussi.

Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_1$ sont sécantes ainsi que les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}_2$. Et vu le $A_2$ que nous avons choisi, elles sont même concourantes.

Pour finir $\mathcal{D}$ passe par $M(1,0,-1)$ mais aussi par $N(2,2,0)$. Ainsi elle est dirigée par $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{u}$ (on aurait pu s'en douter en faisant un dessin). Comme $\overrightarrow{u}$ est orthogonal aux vecteurs directeurs de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ et que les droites sont sécantes, elles sont bien perpendiculaires. □

**Exercice 15.** 1. Notons $H$ le projeté recherché. Comme $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ et que $O \in D$, on a $\overrightarrow{OH} = \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{u}$.

Ainsi, le projeté $H$ a pour coordonnées $(0,1)$. □

2. Notons $H$ le projeté recherché. Comme $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ et que $O \in D$, on a $\overrightarrow{OH} = \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{u}$.

   Ainsi, le projeté $H$ a pour coordonnées $(2,0)$. □

3. Notons $H$ le projeté recherché.

   Notons $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{v}$ dirige $D$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 1$. Comme $O \in D$, on a $\overrightarrow{OH} = \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{v}$.

   Une fois les calculs posés, on trouve que le projeté a pour coordonnées $\dfrac{3}{2}(1,1)$. □

4. Notons $H$ le projeté recherché.

   On a $\overrightarrow{u}$ dirige $D$ et $\|\overrightarrow{u}\| = 1$. Comme $A(-1,1) \in D$, on a $\overrightarrow{AH} = \left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{v}$.

   Une fois les calculs posés, on trouve que le projeté a pour coordonnées $(1,-1)$. □

5. Le projeté a pour coordonnées $(3,1)$ : il est déjà sur $D$ (humour de prof de maths). □

6. Notons $H$ le projeté recherché.

   Notons $\overrightarrow{v} = \frac{1}{\|\overrightarrow{u}\|}\overrightarrow{u}$. Ainsi, $\overrightarrow{v}$ dirige $D$ et $\|\overrightarrow{v}\| = 1$. Comme $A(3,1) \in D$, on a $\overrightarrow{AH} = \left\langle \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{v}$.

   Une fois les calculs posés, on trouve que le projeté a pour coordonnées $(5,-3)$. □

7. Utilisons l'autre méthode. Notons $H$ le projeté recherché et $A(-2,-3)$.

   Comme $A, H \in D$ et $\overrightarrow{u}$ dirige $D$, on sait qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{u}$.

   Ainsi, $H(-2+\lambda,-3)$.

   De plus, on doit avoir $\left\langle \overrightarrow{MH}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0$. Or $\overrightarrow{MH} = (-1+\lambda,-1)$. Ainsi, on a

   $$(-1+\lambda)\times 1 + (-1)\times 0 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1.$$

   Comme

   Ainsi, $H$ a pour coordonnées $(-1,-3)$. $\square$

8. Notons $H$ le projeté recherché. Notons $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$ et $\overrightarrow{v} = (0,0,1)$. On a la chance que la base soit une famille orthonormale. Ainsi, comme $O \in P$, on a

   $$\overrightarrow{OH} = \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{u} \right\rangle \overrightarrow{u} + \left\langle \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{v} \right\rangle \overrightarrow{v}.$$

   Ainsi, on récupère immédiatement en posant les calculs que le projeté a pour coordonnées $(2,0,1)$. $\square$

9. Notons $H$ le projeté recherché. Notons $A(0,1,1)$, $\overrightarrow{u} = (1,0,-1)$ et $\overrightarrow{v} = (1,-1,1)$. Comme la base n'est pas une famille orthonormée, nous allons devoir utiliser la définition.

   On a $A \in P$, $H \in P$, donc il existe $\lambda, \mu$ deux réels tels que $\overrightarrow{AH} = \lambda u + \mu v$.

   Ainsi, $H(0+\lambda+\mu, 1+0\lambda-\mu, 1-\lambda+\mu) = (\lambda+\mu, 1-\mu, 1-\lambda+\mu)$.

   Par ailleurs, on doit avoir $\left\langle \overrightarrow{MH}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{MH}, \overrightarrow{v} \right\rangle = 0$.

   Comme $\overrightarrow{MH} = (1+\lambda+\mu, -\mu, -1-\lambda+\mu)$

   Ainsi, la première équation donne

   $$1+\lambda+\mu-(-1-\lambda+\mu) = 0 \Longleftrightarrow 2\lambda = -2.$$

   Et la seconde

   $$(1+\lambda+\mu)-(-\mu)+(-1-\lambda+\mu) = 0 \Longleftrightarrow 3\mu = 0.$$

   Ainsi, on obtient (le système est facile), $\lambda = -1$ et $\mu = 0$ et en réinjectant ces informations, on a les coordonnées du projeté $H$ : $(-1,1,2)$. $\square$

10. Notons $H$ le projeté recherché. Notons $A(1,1,1)$, $\overrightarrow{u} = (1,0,0)$ et $\overrightarrow{v} = (0,-1,1)$. Comme la base n'est pas une famille orthonormée, nous allons devoir utiliser la définition.

    On a $A \in P$, $H \in P$, donc il existe $\lambda, \mu$ deux réels tels que $\overrightarrow{AH} = \lambda u + \mu v$.

    Ainsi, $H(1+\lambda, 1-\mu, 1+\mu)$.

    Par ailleurs, on doit avoir $\left\langle \overrightarrow{MH}, \overrightarrow{u} \right\rangle = 0$ et $\left\langle \overrightarrow{MH}, \overrightarrow{v} \right\rangle = 0$.

    Comme $\overrightarrow{MH} = (-2+\lambda, -1-\mu, -1+\mu)$

    Ainsi, la première équation donne

    $$-2+\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 2.$$

    Et la seconde

    $$-(-1-\mu)+(-1+\mu) = 0 \Longleftrightarrow 2\mu = 0.$$

    Ainsi, on obtient (le système est facile), $\lambda = 2$ et $\mu = 0$ puis en réinjectant ces informations, on a les coordonnées du projeté $H$ : $(3,1,1)$. $\square$

11. Je vous laisse détailler... mais la même technique que la question précédente donne (seuls les calculs changent)... que le projeté a pour coordonnées $(3,1,1)$. Etonnant ? Pas vraiment. Remarquons que $(1,0,0) = \overrightarrow{u}$ et $(1,-1,1) = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ (en prenant les notations de la question précédente). Ainsi, le plan a la même direction que le précédent, passe par le même point, donc c'est le même ! On projète orthogonalement le même point sur le même plan... trouver un autre résultat aurait été inquiétant. $\square$

# 20 Applications linéaires

**Exercice 1.** Pour montrer qu'une application est linéaire, je vous renvoie aux exemples traités dans le cours. Pour déterminer les matrices associées, il suffit de calculer les images des vecteurs de la base canonique est de les mettre en colonne puisque nous sommes dans la base canonique.
Là encore, je vous renvoie aux exemples. $\square$

1. Elle est linéaire et sa matrice représentative dans les bases canoniques (arrivée et départ) est $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   $\square$

2. Elle est linéaire et sa matrice représentative dans les bases canoniques (arrivée et départ) est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

   $\square$

3. $f_3(0,0,0) \neq (0,0)$ donc elle n'est pas linéaire. $\square$

4. On a $f_4(1,0,0) = (0,0)$, $f_4(0,1,0) = (0,0)$ et $f_4(1,1,0) = (0,1)$.

   Ainsi, $f_4(1,0,0) + f_4(0,1,0) = (0,0) \neq f_4(1,1,0) = (0,1)$, donc $f_4$ n'est pas linéaire. $\square$

5. On a $f_5(0,0,1) = (0,1)$ et $f_5(0,0,-1) = (0,1)$, donc $f_5(0,0,-1) \neq -f_5(0,0,1)$.

   $f_5$ n'est pas linéaire. $\square$

6. $f_6$ est bien linéaire et sa matrice représentative dans les bases canoniques (arrivée et départ) est $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. $\square$

**Exercice 2.** 1. $f$ va de $\mathbb{R}^2$ dans le même espace.

Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. $\square$

2. On a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1),(2,3)\big)$. Or $\big((1,1),(2,3)\big)$ forme une famille libre, donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

   On a donc $dim(Im(f)) = 2$ et $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$, donc $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2$. L'application est surjective. $\square$

3. Puisque $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, et que $f$ est surjective, $f$ est en réalité un isomorphisme donc elle est injective et $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$. $\square$

4. On a $f(1,0) = (1,1)$ et $f(0,1) = (2,3)$ donc il s'agit de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

   $\square$

**Exercice 3.** 1. Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. $\square$

2. D'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc $\dim(Im(f)) \leqslant 2$.

   Ainsi, $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ puisque $\dim(\mathbb{R}^3) = 3$. $\square$

3. On cherche à déterminer le noyau. On a donc $(x, y) \in \text{Ker}(f) \iff f(x, y) = (0, 0, 0)$ ce qui est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} x - y = & 0 \\ x + y = & 0 \\ -x + 2y = & 0 \end{cases}$$

   En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on récupère $y = 0$, puis donc $x = 0$ dans les deux autres.

   Ainsi $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ donc $f$ est injective. $\square$

4. On a $f(1, 0) = (1, 1, -1), f(0, 1) = (-1, 1, 2)$ donc $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

**Exercice 4.** 1. Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. $\square$

2. On a $(x, y, z) \in \text{Ker}(f)$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0, 0)$ ce qui est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} 2x - z = & 0 \\ y + 2z = & 0 \end{cases}$$

   Ainsi, $\text{Ker}(f) = \left\{ (\frac{1}{2}z, -2z, z) / z \in \mathbb{R} \right\}$, autrement dit

   $\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -4, 2))$ donc non. $\square$

3. On a $\dim(Ker(f)) = 1$ puisqu'il est engendré par un seul vecteur non nul. D'après le théorème du rang, $\dim(Ker(f)) + \text{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3)$, ainsi $\text{rg}(f) = \dim(Im(f)) = 2$. Or $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ de dimension 2.

   On a donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ donc $f$ surjective. $\square$

4. On a $f(1, 0, 0) = (2, 0)$, $f(0, 1, 0) = (0, 1)$ et $f(0, 0, 1) = (-1, 2)$ donc $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   $\square$

**Exercice 5.** 1. Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. $\square$

2. On a

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}\big(f(1, 0, 0), f(0, 1, 0), f(0, 0, 1)\big) = \text{Vect}\big((1, 1), (-1, 2), (1, -1)\big).$$

   Or $\text{Im}(f) \subset \mathbb{R}^2$ et $\big((1, 1), (1, -1)\big)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^2$ (deux vecteurs non colinéaires) donc une base de $\mathbb{R}^2$ donc engendre $\mathbb{R}^2$ donc $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$.

   $f$ est surjective. $\square$

3. On nous demande $\mathrm{Ker}(f)$ donc on est obligé de le déterminer.

$(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $f(x, y, z) = (0, 0)$ ce qui est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} x - y + z = & 0 \\ x + 2y - z = & 0 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on a

$$\begin{cases} x - y + z = & 0 \\ 3y - 2z = & 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = & -\frac{1}{3}z \\ y = & \frac{2}{3}z \end{cases}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{(-\frac{1}{3}z, \frac{2}{3}z, z)/z \in \mathbb{R}\right\}$ soit $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1, 2, 3))$.

$\mathrm{Ker}(f) \neq \{(0, 0, 0)\}$ donc $f$, n'est pas injective.

On peut remarquer que même sans avoir fait le moindre calcul, le théorème du rang aurait pu permettre de déterminer que $f$ n'était pas injective. En effet $\dim(Ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{R}^3)$ mais $\mathrm{rg}(f) = \dim(Im(f)) \leqslant \dim(\mathbb{R}^2) = 2$, donc $\dim(Ker(f)) \geqslant 1$. $\square$

**Exercice 6.** 1. Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. $\square$

2. On a $f(1, 0, 0) = (1, 0, 1)$, $f(0, 1, 0) = (-i, 1, -1)$ et $f(0, 0, 1) = (1, 2 + i, 0)$. Ainsi, $M = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1 \\ 0 & 1 & 2+i \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

3. On prend $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ ce qui est équivalent à $f(x, y, z) = (0, 0, 0)$ qui est équivalent au système :

$$\begin{cases} x - iy + z = & 0 \\ y + (2+i)z = & 0 \\ x - y = & 0 \end{cases}$$

En faisant $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$, on a

$$\begin{cases} (1-i)y + z = & 0 \\ y + (2+i)z = & 0 \\ x - y = & 0 \end{cases}$$

Puis en faisant $L_1 \leftarrow L_1 - (1 - i)L_2$, on a

$$\begin{cases} (-2+i)z = & 0 \\ y + (2+i)z = & 0 \\ x - y = & 0 \end{cases}$$

Soit $x = y = z = 0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, 0, 0)\}$ donc $f$ est injective. $\square$

4. Puisque $f$ est un endomorphisme et que $f$ est injective, d'après le théorème du rang (son corollaire), on a $f$ est un isomorphisme donc surjective. $\square$

**Exercice 7.** 1. Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. □

2. On a $f(1,0,0) = (i,0)$, $f(0,1,0) = (0,1+i)$, et $f(0,0,1) = (1,2)$. Donc $M = \begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ 0 & 1+i & 2 \end{pmatrix}$. □

3. On a $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $f(x,y,z) = (0,0)$ ce qui est équivalent au système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rl} ix+z = & 0 \\ (1+i)y+2z = & 0 \end{array}\right.$$
Ce qui est équivalent à
$$\left\{\begin{array}{rl} x = & iz \\ y = & -(1-i)z \end{array}\right.$$
En multipliant la première ligne par $-i$ et la seconde par $\frac{1-i}{2}$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((i,-1+i,1))$. $\mathrm{Ker}(f) \neq \{(0,0,0)\}$ donc $f$ n'est pas injective. □

4. On peut soit déterminer $\mathrm{Im}(f)$ et voir s'il est égal ou non à $\mathbb{C}^2$.

   Mais sinon, le plus simple est de remarquer que $\dim(Ker(f)) = 1$ (engendré par un seul vecteur non nul).

   Ainsi, d'après le théorème du rang, on a $\dim(Ker(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{C}^3)$, soit $\dim(Im(f)) = \mathrm{rg}(f) = 2$. Or $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{C}^2$ qui est de dimension 2. Ainsi, $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{C}^2$, donc $f$ est surjective. □

**Exercice 8.** 1. Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. □

2. On commence à avoir l'habitude, non ? On a $f(1,0) = (1,1)$ et $f(0,1) = (i,1)$ donc $M = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ □

3. On a $(x,y) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $f(x,y) = (0,0)$ ce qui est équivalent au système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rl} x+iy = & 0 \\ x+y = & 0 \end{array}\right.$$
Ce qui est équivalent à, en faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$,
$$\left\{\begin{array}{rl} x+iy = & 0 \\ (1-i)y = & 0 \end{array}\right.$$
Ainsi, c'est équivalent à $y = x = 0$ donc $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0)\}$ et elle est injective. □

4. $f$ est un endomorphisme injectif de $\mathbb{C}^2$, donc un isomorphisme donc elle est bien surjective. □

**Exercice 9.** 1. Remarquons que $p$ va de $\mathbb{R}^2$ dans le même ensemble.

   Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. □

2. On a $(x,y) \in \mathrm{Ker}(p)$ si et seulement si $p(x,y) = (0,0)$ ce qui est équivalent au système suivant :
$$\left\{\begin{array}{rl} 2x+y = & 0 \\ 4x+2y = & 0 \end{array}\right. \underset{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{rl} 2x+y = & 0 \\ 0 = & 0 \end{array}\right.$$
Ainsi, $\mathrm{Ker}(p) = \{(x,-2x)/x \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}((1,-2))$.

   L'endomorphisme $p$ n'est pas injectif. □

3. On a $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Vect}\big(p(1,0), p(0,1)\big) = \mathrm{Vect}\big(\frac{1}{4}(2,4), \frac{1}{4}(1,2)\big) = \mathrm{Vect}\big((1,2)\big)$ et ce puisque $2(1,2) = (2,4)$.

   On a donc $\big((1,2)\big)$ qui est une famille constituée d'un unique vecteur non nul, elle est donc libre, et donc une base de $\mathrm{Im}(p)$.

   Ainsi, $\dim(\mathrm{Im}(p)) \neq 2 = \dim(\mathbb{R}^2)$, donc $p$ n'est pas surjectif. □

4. On prend $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On a
$$p \circ p(x,y) = p\left(\frac{1}{4}(2x+y, 4x+2y)\right) = \frac{1}{4}p(2x+y, 4x+2y).$$
   Et donc
$$p \circ p(x,y) = \frac{1}{16}(8x+4y, 16x+8y) = \frac{1}{4}(2x+y, 4x+2y).$$
   Ainsi, $p \circ p$ et $p$ sont des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ tels que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a $p \circ p(x,y) = p(x,y)$.

   On a donc $p \circ p = p$. □

5. On a déjà calculé les images des vecteurs de la base pour déterminer $\mathrm{Im}(p)$, donc on peut affirmer tout de suite que $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$. □

6. On trouve $A^2 = A$. Et oui puisque $A^2$ est la matrice représentative de $p \circ p = p$... □

7. C'est ce qu'on appelle une projection ! □

8. Il s'agit de deux vecteurs non colinéaires, donc ils forment une famille libre, et il y a deux vecteurs soit autant que la dimension de $\mathbb{R}^2$. Ainsi, on a une base de $\mathbb{R}^2$.

   Par ailleurs, on a $p(1,-2) = (0,0) = 0(1,-2) + 0(1,2)$ et $p(1,2) = (1,2) = 0(1-2) + 1(1,2)$.

   Ainsi, la matrice de $p$ dans cette nouvelle base est $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   Vu la matrice, il est clair qu'elle est de rang 2, que son carré est égal à elle-même, que le noyau est engendré par le premier vecteur de la base et l'ensemble image par le deuxième. □

**Exercice 10.** 1. Remarquons que $f$ va de $\mathbb{C}^3$ dans le même ensemble.

Voir les exemples du cours pour la rédaction de la preuve de sa linéarité. □

2. Montrons que cette famille est libre. Soient $\lambda, \mu, \nu$ trois éléments de $\mathbb{C}$ tels que
$$\lambda(1,0,0) + \mu(1,0,1) + \nu(-1,1,0) = (0,0,0).$$
   C'est équivalent au système
$$\begin{cases} \lambda + \mu - \nu = & 0 \\ \nu = & 0 \\ \mu = & 0 \end{cases}$$
   Autrement on a forcément $\mu = \nu = 0$ donc $\lambda = 0$. Il s'agit donc bien d'une famille libre de trois vecteurs, dans un espace vectoriel de dimension 3. Ainsi, cette famille forme bien une base de $\mathbb{C}^3$. □

3. Calculons
$$f(1,0,0) = (2,0,0) = 2(1,0,0) + 0(1,0,1) + 0(-1,1,0).$$
On a aussi
$$f(1,0,1) = (i,0,i) = 0(1,0,0) + i(1,0,1) + 0(-1,1,0).$$
Pour finir
$$f(-1,1,0) = (0,0,0) = 0(1,0,0) + 0(1,0,1) + 0(-1,1,0).$$
Ainsi, la matrice $M$ représentative de $f$ dans la base évoquée est $M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

4. Il est tellement simple de remarquer que, dans cette nouvelle base, $\mathrm{Ker}(f)$ est l'espace engendré par le troisième vecteur et on voit tout de suite que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}((-1,1,0))$. Ainsi, $f$ n'est pas injective. $\square$

5. Non plus, sinon, elle serait un isomorphisme à cause des dimensions, donc injective. $\square$

**Exercice 11.** 1. On considère $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu$ deux éléments de $\mathbb{K}$. On a
$$\begin{aligned} f\left(\lambda \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right) &= f\left(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu a' & \lambda b + \mu b' \\ \lambda c + \mu c' & \lambda d + \mu d' \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (\lambda a + \mu a') - (\lambda b + \mu b') & (\lambda a + \mu a') - (\lambda d + \mu d') \\ \lambda c + \mu c' & \lambda c + \mu c' \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} a-b & a-d \\ c & c \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} a'-b' & a'-d' \\ c' & c' \end{pmatrix} \\ &= \lambda f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) + \mu f\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}\right). \end{aligned}$$
Ainsi, on a bien $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_2(\mathbb{K}))$. $\square$

2. Comme $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Vect}(f) = \mathrm{Vect}\left(f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right), f\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)\right)$.

Ainsi, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$.

Or $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi,

$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

Considérons $\lambda, \mu$ et $\nu$ trois éléments de $\mathbb{K}$ tels que
$$\lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{K})}.$$
Il est clair que ça implique $\lambda = \mu = \nu = 0$.

La famille $\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\right)$ est donc libre. Il s'agit donc d'une base de $\mathrm{Im}(f)$ et $f$ est de rang 3. $\square$

3. Prenons $\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. On a

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(f) &\iff f\left(\begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{pmatrix}a-b & a-d\\c & c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} a-b = & 0\\ a-d = & 0\\ c = & 0\\ c = & 0\end{cases}\\
&\iff \begin{cases} b = & a\\ d = & a\\ c = & 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \left\{\begin{pmatrix}a & a\\0 & a\end{pmatrix} / a \in \mathbb{K}\right\} = \left\{a\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix} / a \in \mathbb{K}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}\right)$. $\square$

**Exercice 12.** 1. Notons que, si $P \in \mathbb{R}_2[X]$, $\deg(P') \leqslant 1$, donc $\deg(f(P)) \leqslant 2$. L'application $f$ est donc bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}_2[X]$.

Prenons $\lambda$ et $\mu$ deux éléments de $\mathbb{K}$ et $P$, $Q$ deux éléments de $\mathbb{R}_2[X]$. On a

$$\begin{aligned}
f(\lambda P + \mu Q) = &\ (\lambda P + \mu Q)' + (\lambda P + \mu Q)(0)\\
= &\ \lambda P' + \mu Q' + \lambda P(0) + \mu Q(0) \text{ par linéarité de la dérivation}\\
= &\ \lambda(P' + P(0)) + \mu(Q' + Q(0))\\
= &\ \lambda f(P) + \mu f(Q).
\end{aligned}$$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$. $\square$

2. Comme $(1, X, X^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$, on a $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(1), f(X), f(X^2)) = \mathrm{Vect}(1, 1, 2X) = \mathrm{Vect}(1, X) = \mathbb{R}_1[X]$.

   Ainsi, il est clair que $\mathrm{rg}(f) = 2$ et que $f$ n'est pas surjective. $\square$

3. Si $f$ était injective, comme il s'agit d'un endomorphisme, elle serait un isomorphisme, ce qui est exclu (elle n'est pas surjective).

   L'application linéaire $f$ n'est injective. $\square$

**Exercice 13.** 1. Montrons que, si $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, alors $f(P) \in \mathbb{K}_n[X]$.

Si $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$, il existe $(\alpha_0, \dots, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+2}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k X^k$.

On a $f(P) = P(X+1) - P(X) = \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k (X+1)^k - \sum_{k=0}^{n+1} \alpha_k X^k$. On peut réorganiser les termes en $f(P) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k((X+1)^k - X^k) + \alpha_{n+1}((X+1)^{n+1} - X^{n+1})$.

On a clairement $\deg\left(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k((X+1)^k - X^k)\right) \leqslant n$. Par ailleurs, $(X+1)^{n+1}-X^{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n}\binom{n+1}{\ell}X^\ell$, donc $\deg\left(\alpha_{n+1}((X+1)^{n+1} - X^{n+1})\right) \leqslant n$.

Ainsi, $\deg(f(P)) \leqslant n$. L'application $f$ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{K}_n[X]$.

Enfin, prenons $\lambda$ et $\mu$ deux éléments de $\mathbb{K}$ et $P$, $Q$ deux éléments de $\mathbb{K}_{n+1}[X]$. On a

$$\begin{aligned} f(\lambda P + \mu Q) = &\ (\lambda P + \mu Q)(X+1) - (\lambda P + \mu Q)(X) \\ = &\ \lambda(P(X+1) - P(X)) + \mu(Q(X+1) - Q(X)) \\ = &\ \lambda f(P) + \mu f(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_{n+1}[X], \mathbb{K}_n[X])$. □

2. Soit $P \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $P(X+1) - P(X) = 0_{\mathbb{K}_[X]}$, soit $P(X+1) = P(X)$.

   Posons $Q = P - P(0)$. On a alors $Q(0) = 0$, mais $Q(1) = P(1) - P(0) = P(0) - P(0) = 0$. On pose alors $\mathcal{P}(k)$ : « Q(k)=0 ». On vient de voir que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Soit $k \in \mathbb{N}$. On suppose $\mathcal{P}(k)$ vraie. On a alors $Q(k+1) = P(k+1) - P(0) = P(k) - P(0)$ car $P \in \mathrm{Ker}(f)$. Ainsi, $Q(k+1) = Q(k) = 0$ car $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

   On a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q(k) = 0$. Ainsi, $Q$ qui est de degré au plus $n+1$ a une infinité de racines. C'est exclu, sauf si $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$. On a donc $P = P(0)$.

   On vient de démontrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathbb{K}_0[X]$. L'inclusion réciproque est immédiate.

   On en conclut donc que $\mathrm{Ker}(f) = \mathbb{K}_0[X]$. L'application $f$ n'est donc pas injective. □

3. Appliquons le théorème du rang : on a $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \mathrm{rg}(f) = \dim(\mathbb{K}_{n+1}[X])$, donc $\mathrm{rg}(f) = n + 2 - 1 = n + 1$.

   Autrement dit, on a $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathbb{K}_n[X])$, et comme $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{K}_n[X]$, on a bien $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{K}_n[X]$.

   L'application linéaire $f$ est donc surjective. □

**Exercice 14.** 1. Il s'agit tout simplement d'une famille de deux vecteurs non colinéaires, donc ils forment une famille libre de $E$, qui est de dimension 2, donc une base de $E$. □

2. On remarque que $u_1 = e_1 + e_2$ et $u_2 = e_1 - e_2$. Ainsi,

$$e_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$$

   et

$$e_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2).$$

   Ainsi, par linéarité,

$$f(e_1) = f\left(\frac{1}{2}(u_1 + u_2)\right) = \frac{1}{2}f(u_1) + \frac{1}{2}f(u_2) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right),$$

   et

$$f(e_2) = f\left(\frac{1}{2}(u_1 - u_2)\right) = \frac{1}{2}f(u_1) - \frac{1}{2}f(u_2) = \left(0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

   Pour finir, $v = 2e_1 + 3e_2$, donc, toujours par linéarité,

$$f(v) = f(2e_1 + 3e_2) = 2f(e_1) + 3f(e_2) = \left(2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right).$$

   □

3. Sans aucune difficulté, étant donné qu'on a déjà déterminé $f(e_1)$ et $f(e_2)$, la matrice recherchée est $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. □

4. Soit on tâtonne, soit on cherche tous les antécédents jusqu'à tomber sur une condition et on prend un élément qui ne la vérifie pas.

   On peut par exemple deviner que si $(a, b, c) \in \mathrm{Im}(f)$, on a forcément l'existence de $x$ et de $y$ tels que $f(xe_1 + ye_2) = (a, b, c)$.

   Or $f(xe_1 + ye_2) = \left(x, \frac{1}{2}(x+y), \frac{1}{2}(x-y)\right)$. En prenant par exemple $(0, 1, 1)$, on doit avoir $x = 0$ mais $y = 2$ et $y = -2$ simultanément, ce qui est bien difficile. □

**Exercice 15.** 1. La réponse à cette question est évidente ! $M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ □

2. On peut raisonner sur la matrice ou plus simplement remarquer que les coordonnées de l'image de $(x, y, z)$ sont le vecteur colonne

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y - 7z \\ -x + 2y + 4z \\ 2x - y + z \end{pmatrix}.$$

On a donc, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (x - 3y - 7z, -x + 2y + 4z, 2x - y + z)$.

On cherche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (-1, -1, 8)$. C'est équivalent au système

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = & -1 \\ -x + 2y + 4z = & -1 \\ 2x - y + z = & 8 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on a le système équivalent

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = & -1 \\ -y - 3z = & -2 \\ 5y + 15z = & 10 \end{cases}$$

Puis en faisant $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$, on a

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = & -1 \\ -y - 3z = & -2 \\ 0 = & 0 \end{cases}$$

Ainsi, l'ensemble des antécédents de $u$ est $\{(5 - 2z, 2 - 3z, z)/z \in \mathbb{R}\}$.

Pour $v$, on cherche $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x, y, z) = (-2, 1, 3)$. C'est équivalent au système

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = & -2 \\ -x + 2y + 4z = & 1 \\ 2x - y + z = & 3 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$, on a le système équivalent

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = & -2 \\ -y - 3z = & -1 \\ 5y + 15z = & 7 \end{cases}$$

Puis en faisant $L_3 \leftarrow L_3 + 5L_2$, on a

$$\begin{cases} x - 3y - 7z = & -2 \\ -y - 3z = & -1 \\ 0 = & 2 \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution, donc $v$ n'admet aucun antécédent. $\square$

3. Elle n'est pas surjective vu la question précédente ($v$ n'admet pas d'antécédent), et non injective ($u$ en admet une infinité). $\square$

**Exercice 16.** 1. $f$ est un isomorphisme si et seulement si $A$ est inversible, donc si le système homogène associé à $A$ est de rang 3.

$$\begin{cases} az = & 0 \\ x + bz = & 0 \\ y + cz = & 0 \end{cases}$$

Ce système est échelonné, ses coefficients diagonaux sont $a, 1$ et 1, donc il est de rang 3 et et seulement si $a \neq 0$.

$A$ est inversible si et seulement si $a \neq 0$, autrement dit $f$ est un isomorphisme si et seulement si $a \neq 0$. $\square$

2. Il est nettement plus simple de travailler sur la matrice représentative de $f$. Ainsi, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & a & ac \\ 0 & b & a+bc \\ 1 & c & b+c^2 \end{pmatrix}$, puis $A^3 = \begin{pmatrix} a & ac & ab+ac^2 \\ b & a+bc & ab+ac+b^2c \\ c & b+c^2 & a+2bc+c^3 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $A^3 - cA^2 - bA - aI_3 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{K})}$.

$\square$

3. Lorsque $a \neq 0$, on a $\frac{1}{a}\left(A^2 - cA - bI_3\right)A = I_3$, ainsi

$$A^{-1} = \frac{1}{a}\left(A^2 - cA - bI_3\right).$$

On en déduit que $f^{-1} = \dfrac{1}{a}(f^2 - cf - bid_{\mathbb{R}^3})$.

Si on veut une expression explicite de $f$, il vaut mieux calculer $A^{-1}$ ce que l'on peut faire soit en résolvant un système, soit en se servant de ce qu'on vient de faire. On a $A^{-1} = \dfrac{1}{a}\begin{pmatrix} -b & a & 0 \\ -c & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $f^{-1}(x, y, z) = \dfrac{1}{a}(-bx - ay, -cx + az, x)$.

$\square$

4. On est dans le cas où $a = 0$ (sinon, $f$ est injective). Auquel cas, $(x, y, z) \in \mathrm{Ker}(f)$ si et seulement si $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Autrement dit $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Soit le brave système :

$$\begin{cases} 0 = & 0 \\ x + bz = & 0 \\ y + cz = & 0 \end{cases}$$

On obtient très rapidement :

$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((b, c, -1)\big)$. $\square$

**Exercice 17.** 1. Prenons $u$ tel que $f^2(u) \neq 0$.

Montrons que $(f^2(u), f(u), u)$ est une famille libre. Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{K}$ tels que

$$\lambda f^2(u) + \mu f(u) + \nu u = 0.$$

Appliquons $f^2$ à cette égalité. Par linéarité, on obtient

$$\lambda f^4(u) + \mu f^3(u) + \nu f^2(u) = 0.$$

Or comme $f^3 = 0$, on a simplement $\nu f^2(u) = 0$, mais comme $f^2(u) \neq 0$, on a $\nu = 0$.

Donc l'égalité devient

$$\lambda f^2(u) + \mu f(u) = 0.$$

Appliquons $f$ à cette égalité. Par linéarité, on obtient

$$\lambda f^3(u) + \mu f^2(u) = 0.$$

Soit comme ci-dessus, $\mu f^2(u) = 0$, et comme ci-dessus cela implique $\mu = 0$.

Donc en fait, on avait juste $\lambda f^2(u)$ donc $\lambda = 0$ puisque $f^2(u) \neq 0$.

Ainsi, la famille $(f^2(u), f(u), u)$ est une famille libre de 3 éléments de $\mathbb{K}^3$ donc elle une base de $\mathbb{K}^3$. $\square$

2. On a

$$f(f^2(u)) = f^3(u) = 0 = 0f^2(u) + 0f(u) + 0u.$$

Puis

$$f(f(u)) = f^2(u) = f^2(u) + 0f(u) + 0u.$$

Et enfin

$$f(u) = 0f^2(u) + f(u) + 0u.$$

Il s'agit de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\square$

**Exercice 18.** 1. Il est plus simple de travailler sur $A$.

On trouve $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On réalise alors que $A^2 - 3A + 2I_4 = 0$, ce qui se traduit sur les endomorphismes par $f^2 - 3f + 2id = 0$. $\square$

2. On obtient rapidement à partir de l'égalité précédente sur les matrices que $-\dfrac{1}{2}(A - 3I_4)A = I_4$, donc $A$ est inversible et $A^{-1} = -\dfrac{1}{2}(A - 3I_4)$.

   Ainsi, $f$ est bijective (isomorphisme) et $f^{-1} = -\dfrac{1}{2}(f - 3id)$.

   On peut alors voir que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

   Autrement dit, $f^{-1}(x, y, z, t) = \left(y + \dfrac{1}{2}z, y, -x + y + \dfrac{3}{2}z, -\dfrac{1}{2}y + \dfrac{1}{2}t\right)$. □

3. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « il existe $a_n$ et $b_n$ tels que $f^n = a_n f + b_n id$. »

   Cette propriété est vraie au rang 0 puisque $f^0 = 0f + id$ et au rang 1, (puisque $f = f + 0id$) et même au rang 2 d'après la première question.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

   On a $f^{n+1} = f \circ f^n = f \circ (a_n f + b_n id) = a_n f^2 + b_n f$.

   Or, on sait que $f^2 = 3f - 2id$ d'après la première question.

   Ainsi, $f^{n+1} = a_n(3f - 2id) + b_n f$. Autrement dit

   $$f^{n+1} = (3a_n + b_n)f - 2a_n id.$$

   La propriété est donc vraie au rang $n+1$ en prenant $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$.

   Ainsi, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^n = a_n f + b_n id$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites définies par $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 3a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -2a_n$. □

4. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} + b_{n+1}$, or $b_{n+1} = -2a_n$ donc

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n.$$

   Résolvons l'équation caractéristique associée $X^2 - 3X + 2 = 0$. On trouve deux racines évidentes, 1 et 2, donc il existe deux réels $\lambda$ et $\mu$ tels que $a_n = \lambda 2^n + \mu$.

   En faisant $n = 0$, on récupère $\lambda + \mu = 0$ et $2\lambda + \mu = 1$ donc $\lambda = 1$ et $\mu = -1$.

   On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 2^n - 1$.

   Ensuite, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = a_{n+1} - 3a_n = 2 \times 2^n - 1 - 3(2^n - 1) = -2^n + 2$.

   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^n = (2^n - 1)f + (2 - 2^n)id$. □

5. On veut savoir si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f^{-1})^n = (2^{-n} - 1)f + (2 - 2^{-n})id$.

   Composons donc

   $$[(2^{-n} - 1)f + (2 - 2^{-n})id] \circ f^n = [(2^{-n} - 1)f + (2 - 2^{-n})id] \circ [(2^n - 1)f + (2 - 2^n)id].$$

   On a donc

   $$\begin{aligned}[(2^{-n} - 1)f + (2 - 2^{-n})id] \circ f^n &= (2^{-n} - 1)(2^n - 1)f^2 \\ &\quad + \left[(2^{-n} - 1)(2 - 2^n) + (2 - 2^{-n})(2^n - 1)\right] f + (2 - 2^{-n})(2 - 2^n)id.\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}((2^{-n}-1)f+(2-2^{-n})id)\circ f^n &= (2-2^{-n}-2^n)(3f-2id)\\ &\quad+\left[-6+3\times 2^{-n}+3\times 2^n\right]f+(5-2\times 2^{-n}-2\times 2^n)id.\end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient bien $((2^{-n}-1)f+(2-2^{-n})id)\circ f^n = id$.

Ainsi, on a bien pour tout $n\in\mathbb{N}$, $(f^{-1})^n = (2^{-n}-1)f+(2-2^{-n})id$. $\square$

**Exercice 19.** 1. On sait que le vecteur $f(x,y)$ est représenté relativement à la base canonique par le vecteur colonne $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x+5y\\5x+y\end{pmatrix}$.

Ainsi, $f: \begin{array}{rcl}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}(x+5y,5x+y).\end{array}$ $\square$

2. La famille $\mathcal{B}'$ est constituée par seulement deux vecteurs qui s'avèrent être non colinéaires. Elle est donc libre. Comme elle contient exactement deux vecteurs et que $\dim(\mathbb{R}^2)=2$, la famille $\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{R}^2$.

$\square$

3. La matrice $P$ est constituée par les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}'$ exprimés dans la base canonique en colonne. Ainsi, $P=\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}$. Ensuite, on a $\det(P)=2$ donc $P^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$. $\square$

4. Remarquons que $f(1,1)=(3,3)=3(1,1)+0(-1,1)$ et $f(-1,1)=(2,-2)=0(1,1)-2(-1,1)$. Ainsi, $D=\begin{pmatrix}3&0\\0&-2\end{pmatrix}$.

Enfin, après calculs, on a $PDP^{-1}=A$. $\square$

5. Par récurrence, on pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ : « $A^n=PD^nP^{-1}$ ».

On a $A^0=I_2$ et $PD^0P{-}1=PP^{-1}=I_3$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$ quelconque fixé. On suppose $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $A^{n+1}=AA^n=\Delta PD^nP^{-1}$ d'après $\mathcal{P}(n)$. Or, en utilisant la formule de changement de base, on a $A=PDP^{-1}$. Ainsi, $A^{n+1}=PDP^{-1}PD^nP^{-1}=PD^{n+1}P^{-1}$, donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$. $\square$

6. Il suffit désormais de poser les calculs. On a $PD^n=\begin{pmatrix}3^n&-(-2)^n\\3^n&(-2)^n\end{pmatrix}$, puis

$$A^n=PD^nP^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}3^n+(-2)^n & 3^n-(-2)^n\\ 3^n-(-2)^n & 3^n+(-2)^n\end{pmatrix}.$$

$\square$

**Exercice 20.** 1. Vérifions la linéarité de $\varphi$. Soient $M$ et $N$ deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\lambda$ et $\mu$ deux éléments de $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda M+\mu N) &= A(\lambda M+\mu N)\\ &= \lambda AM+\mu AN\\ &= \lambda\varphi(M)+\mu\varphi(N).\end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi$ est une application linéaire. De plus, comme $\varphi$ est définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et à valeur dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, il s'agit bien d'un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\square$

2. Notons $E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E_4 = \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$.

   On a $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = -E_1 - 3E_3$, et on a aussi $\varphi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = -E_2 - 3E_4$, puis $\varphi(E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} E_1 + 3E_3$ et pour finir $\varphi(E_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = E_2 + 3E_4$.

   On a donc $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   $\square$

3. Notons $F_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, F_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ et $F_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

   La famille $\mathcal{B}'$ est une famille de quatre vecteurs et $\dim(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) = 4$. La famille $\mathcal{B}'$ est une base si et seulement si elle est libre.

   Considérons $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tels que $\sum_{k=1}^{4} \lambda_k F_k = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$. Cela implique le système

$$\left\{\begin{array}{ccccl} \lambda_1 & & +\lambda_3 & & = 0 \\ & \lambda_2 & & +\lambda_4 & = 0 \\ \lambda_1 & & +3\lambda_3 & & = 0 \\ & \lambda_2 & & +3\lambda_4 & = 0 \end{array}\right. \underset{\substack{L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2}}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{ccccl} \lambda_1 & & +\lambda_3 & & = 0 \\ & \lambda_2 & & +\lambda_4 & = 0 \\ & & 2\lambda_3 & & = 0 \\ & & & 2\lambda_4 & = 0 \end{array}\right.$$

   Ce qui implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$.

   La famille $\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. $\square$

4. On a $\varphi(F_1) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, $\varphi(F_2) = 0_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$, $\varphi(F_3) = 2F_3$ et $\varphi(F_4) = 2F_4$.

   La matrice $D$ est donc $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. $\square$

5. On a $F_1 = E_1 + E_3$, $F_2 = E_2 + E_4$, $F_3 = E_1 + 3E_3$ et $F_4 = E_2 + 3E_4$.

   Ainsi, on a $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et le calcul donne $C = PDP^{-1}$. $\square$

**Exercice 21.** 1. Prenons $\lambda$ et $\mu$ deux éléments de $\mathbb{K}$ et $P$, $Q$ deux éléments de $\mathbb{K}[X]$. On a

$$\begin{aligned} \varphi_n(\lambda P + \mu Q) = & \ ((\lambda P + \mu Q)(0), \ldots, (\lambda P + \mu Q)(n)) \\ = & \ (\lambda P(0) + \mu Q(0), \ldots, \lambda P(n) + \mu Q(n)) \\ = & \ \lambda(P(0), \ldots, P(n)) + \mu(Q(0), \ldots, Q(n)) \\ = & \ \lambda \varphi_n(P) + \mu \varphi_n(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, $\varphi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{K}[X], \mathbb{K}^{n+1})$. $\square$

2. Considérons $P \in \mathbb{K}[X]$. On a $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$ si et seulement si $(P(0), \ldots, P(n)) = (0, \ldots, 0)$ soit si et seulement si $P$ a $0, \ldots, n$ comme racines.

   Ainsi, $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$ si et seulement si il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)Q$.

   On peut encore écrire $\mathrm{Ker}(\varphi_n) = \{\prod_{k=0}^{n}(X-k)Q / Q \in \mathbb{K}[X]\}$. L'application $\varphi_n$ n'est donc pas injective. □

3. L'application $\psi_n$ est tout aussi linéaire que $\varphi_n$, donc $\psi_n \in \mathcal{L}(\mathbb{K}_n[X], \mathbb{K}^{n+1})$. Par ailleurs, considérons $P \in \mathbb{K}_n[X]$. Si $P \in \mathrm{Ker}(\psi_n)$, alors $\psi_n(P) = \varphi_n(P) = (0, \ldots, 0)$, donc $P \in \mathrm{Ker}(\varphi_n)$. Ainsi, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(X-k)Q$. Cependant, si $Q \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, $\deg(P) = \deg(Q) + n + 1 > n$, ce qui est exclu car $P \in \mathbb{K}_n[X]$.

   Ainsi, $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ce qui implique $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$. On a donc $\mathrm{Ker}(\psi_n) = \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$. L'application $\psi_n$ est injective.

   De plus, comme en plus $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1 = \dim(\mathbb{K}^{n+1})$, l'application $\psi_n$ est un isomorphisme. □

4. Considérons $P_0$ tel que $\psi_n(P_0) = (1, 0, \ldots, 0)$. Ainsi, $P_0$ s'annule pour tout $\ell \in [\![1, n]\!]$, et comme $\deg(P_0) \leqslant n$, il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $P_0 = C\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n}(X-\ell)$. Comme $P_0(0) = 1$, on prend $C = \dfrac{1}{\prod\limits_{\ell=1}^{n}(0-\ell)} = \dfrac{(-1)^n}{n!}$.

   On a donc $P_0 = \dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n}(X-\ell)$. □

5. De la même façon, on considère $P_1$ tel que $\psi_n(P_1) = (0, , 1, 0, \ldots, 0)$. Ainsi, $P_1$ s'annule pour tout $\ell \in [\![0, n]\!] \setminus \{1\}$, et comme $\deg(P_1) \leqslant n$, il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $P_1 = C\displaystyle\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq 1}}^{n}(X-\ell)$. Comme $P_1(1) = 1$, on prend $C = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq 1}}^{n}(1-\ell)} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$.

   On a donc $P_1 = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\displaystyle\prod_{\ell=1}^{n}(X-\ell)$.

   □

6. Plus généralement, on considère $P_k$ tel que $\psi_n(P_k) = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ où le 1 apparait en position $k+1$. Ainsi, $P_k$ s'annule pour tout $\ell \in [\![0, n]\!] \setminus \{k\}$, et comme $\deg(P_k) \leqslant n$, il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $P_k = C\displaystyle\prod_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq k}}^{n}(X-\ell)$. Comme $P_k(1) = 1$, on prend

   $C = \dfrac{1}{\prod\limits_{\substack{\ell=0\\ \ell\neq 1}}^{n}(k-\ell)}$.

   □

7. Considérons $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$. On a $(a, b, c) = a(1, 0, 0) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1) = a\psi_2(P_0) + b\psi_2(P_1) + c\psi_2(P_2)$.

   Plus précisément, on a $(a, b, c) = \psi_2(aP_0 + bP_1 + cP_2)$. Rappelons que l'on a, d'après les questions précédentes, $P_0 = \dfrac{1}{2}(X-1)(X-2)$, $P_1 = -X(X-2)$ et $P_2 = \dfrac{1}{2}X(X-1)$.

Ainsi, comme $\psi_2$ est un isomorphisme, sa réciproque est l'application

$$\begin{array}{rrcl} \psi_2^{-1}: & \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ & (a,b,c) & \longmapsto & a\dfrac{1}{2}(X-1)(X-2) - bX(X-2) + c\dfrac{1}{2}X(X-1). \end{array}$$

□

8. Il s'agit de généraliser la démarche précédente. On considère $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et on remarque que $(a_0, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{n} a_k \psi_k(P_k)$, donc que $(a_0, \dots, a_n) = \psi_n \left( \sum_{k=0}^{n} a_k P_k \right)$.
Ainsi, comme $\psi_n$ est un isomorphisme, sa réciproque est l'application

$$\begin{array}{rrcl} \psi_n^{-1}: & \mathbb{K}^3 & \longrightarrow & \mathbb{K}_2[X] \\ & (a_0, \dots, a_n) & \longmapsto & \sum\limits_{k=0}^{n} a_k P_k. \end{array}$$

□

**Exercice 22.** 1. Déterminons $\mathrm{Ker}(f)$. Soit $(x,y,z) \in \mathrm{Ker}(f)$, alors c'est équivalent à $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire le système

$$\left\{ \begin{array}{rl} x - y - z = & 0 \\ x + y + z = & 0 \\ -x = & 0 \end{array} \right.$$

Soit tout simplement

$$\left\{ \begin{array}{rl} x = & 0 \\ -y - z = & 0 \\ y + z = & 0 \end{array} \right.$$

Ou encore, pour bien détailler,

$$\left\{ \begin{array}{rl} x = & 0 \\ y = & -z \end{array} \right.$$

Ainsi,

$$\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}\big((0,-1,1)\big).$$

On remarque que $\big((0,-1,1)\big)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$ à lui tout seul (un seul vecteur non nul). On a donc $\dim(Ker(f)) = 1$.

Par ailleurs $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(1,0,0), f(0,1,0), f(0,0,1)\big)$, soit

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1), (-1,1,0), (-1,1,0)\big).$$

Ou plus simplement

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big((1,1,-1), (-1,1,0)\big).$$

$\big((1,1,-1), (-1,1,0)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ puisqu'en plus de l'engendrer, cette famille est composée de deux vecteurs non colinéaires donc libres. On a donc $\dim(Im(f)) = 2$.
□

2. C'est équivalent à regarder le rang de $A - \lambda I_3$ autrement dit le rang du système homogène associé à cette matrice soit $(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. C'est à dire :

$$\left\{\begin{array}{cccl} (1-\lambda)x & -y & -z & = 0 \\ x & +(1-\lambda)y & +z & = 0 \\ -x & & -\lambda z & = 0 \end{array}\right.$$

On fait ensuite $L_1 \leftarrow L_1 + (1-\lambda)L_3$ et $L_2 \leftarrow L_2 + L_3$ et on a

$$\left\{\begin{array}{cccl} & -y & +(\lambda^2 - \lambda - 1)z & = 0 \\ & +(1-\lambda)y & +(1-\lambda)z & = 0 \\ -x & & -\lambda z & = 0 \end{array}\right.$$

Ensuite, faisons, $L_2 \leftarrow L_2 + (1-\lambda)L_1$ et on a

$$\left\{\begin{array}{cccl} & -y & +(\lambda^2 - \lambda - 1)z & = 0 \\ & & (-\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3)z & = 0 \\ -x & & -\lambda z & = 0 \end{array}\right.$$

En réorganisant un peu les termes, on trouve

$$\left\{\begin{array}{cccl} -x & & -\lambda z & = 0 \\ & -y & +(\lambda^2 - \lambda - 1)z & = 0 \\ & & -\lambda(\lambda-1)^2 z & = 0 \end{array}\right.$$

Le système n'est pas de rang 3 lorsque $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$. $\square$

3. On ne l'a encore jamais écrit mais $f(x, y, z) = (x - y - z, x + y + z, -x)$.

   Si $s \in \mathrm{Vect}(u)$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $s = \mu u$, ainsi $f(s) = \mu f(u) = \mu(0, 0, 0) \in \mathrm{Vect}(u)$.

   Si $s \in \mathrm{Vect}(v)$, il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $s = \mu v$, ainsi $f(s) = \mu f(v) = \mu(1, 1, -1) \in \mathrm{Vect}(v)$.

   Ainsi, $\mathrm{Vect}(u)$ et $\mathrm{Vect}(v)$ sont des droites vectorielles stables par $f$.

   Soit $w$ non nul tel que $\mathrm{Vect}(w)$ soit une droite vectorielle stable par $f$. Alors $f(w) \in \mathrm{Vect}(w)$, donc il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(w) = \lambda w$.

   On peut le réécrire tel que $f(w) - \lambda w = (0, 0, 0)$ ou encore $(f - \lambda id)(w) = 0$. Cela implique que $\mathrm{rg}(f - \lambda id) < 3$ (sinon d'après le théorème du rang, $\mathrm{Ker}(f - \lambda id) = \{(0, 0, 0)\}$ donc $w = (0, 0, 0)$ et il n'engendrerait pas grand chose).

   Ainsi, on remarque que, d'après la question précédente, $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

   Or si $\lambda = 0$, c'est tout simplement $w \in \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$, donc on retrouve la première droite vectorielle.

   Si $\lambda = 1$, alors $w = (x, y, z)$ est solution du système de la question précédente avec $\lambda = 1$, donc de

$$\left\{\begin{array}{cccl} -x & & -z & = 0 \\ & -y & -z & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array}\right.$$

   On trouve donc $w \in \{(-z, -z, z)/z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\big((-1, -1, 1)\big) = \mathrm{Vect}(v)$.

   Ainsi, on retrouve la deuxième droite vectorielle. $\square$

**Exercice 23.** 1. Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(x) = 0$, donc $g(f(x)) = 0$, autrement dit $g \circ f(x) = 0$, soit $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(g \circ f)$, alors il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = g \circ f(x) = g(f(x))$ donc $y \in \mathrm{Im}(g)$

Ainsi, $\mathrm{Im}(g \circ f) \subset \mathrm{Im}(g)$. $\square$

2. Soit $y \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$, alors il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f(x)$ et on a $g(y) = 0$.

Ainsi, $g(f(x)) = 0$, donc $g \circ f(x) = 0$. Ainsi $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$. Or $y = f(x)$, donc $y \in f(Ker(g \circ f))$.

On a donc $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) \subset f(Ker(g \circ f))$.

Réciproquement, soit $y \in f(Ker(g \circ f))$, donc il existe $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$ tel que $f(x) = y$, donc $y \in \mathrm{Im}(f)$.

Par ailleurs $g(y) = g(f(x)) = g \circ f(x) = 0$ puisque $x \in \mathrm{Ker}(g \circ f)$, donc $y \in \mathrm{Ker}(g)$.

Ainsi, on a $y \in \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

On a donc $f(Ker(g \circ f)) \subset \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f)$.

Par double inclusion, on a bien $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Im}(f) = f(Ker(g \circ f))$. $\square$

3. Soit $x \in \mathrm{Ker}(g)$. On a

$$g(f(x)) = g \circ f(x) = f \circ g(x) = f(g(x)) = f(0) = 0$$

puisque $x \in \mathrm{Ker}(g)$.

Ainsi, $g(f(x)) = 0$, donc $f(x) \in \mathrm{Ker}(g)$. $\mathrm{Ker}(g)$ est donc bien stable par $f$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(g)$. Ainsi, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $g(x) = y$. On a

$$f(y) = f(g(x)) = f \circ g(x) = g \circ f(x) = g(f(x)),$$

autrement dit $f(y) \in \mathrm{Im}(g)$.

$\mathrm{Im}(g)$ est donc bien stable par $f$. $\square$

4. Soit $x \in \mathbb{K}^n$. On a $f \circ g(x) = f(g(x))$ donc $f \circ g(x) \in \mathrm{Im}(f)$. De même, $g \circ f(x) \in \mathrm{Im}(g)$.

Or, $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $f \circ g(x) = g \circ f(x)$, donc $f \circ g(x) \in \mathrm{Im}(g)$.

Ainsi, $f \circ g(x) \in \mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Im}(g) = \{0\}$. Donc $\forall x \in \mathbb{K}^n$, $f \circ g(x) = 0$. On a donc $f \circ g = 0$ et comme $f \circ g = g \circ f$, $g \circ f = 0$ aussi. $\square$

**Exercice 24.** 1. On prend $x \in \mathrm{Ker}(f^p)$. On a donc $f^{p+1}(x) = f(f^p(x)) = f(0) = 0$, donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.

On a donc $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(f^{p+1})$, alors il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f^{p+1}(x) = f^p(f(x))$. Ainsi, $y$ admet un antécédent par $f^p$ qui est $f(x)$. Donc $y \in \mathrm{Im}(f^p)$.

On a donc $\mathrm{Im}(f^{p+1}) \subset \mathrm{Im}(f^p)$. $\square$

2. a. Supposons $\ell \notin \mathbb{N}$.

En prenant $\varepsilon = \min(\ell - \lfloor \ell \rfloor, \lfloor \ell \rfloor + 1 - \ell)$, on remarque que, il existe un entier $p_0$ tel que, $\forall p \geqslant p_0$,

$$|u_p - \ell| < \varepsilon,$$

autrement dit

$$\ell - \varepsilon < u_p < \ell + \varepsilon.$$

Cependant, puisque $\varepsilon \leqslant \ell - \lfloor \ell \rfloor$, $\ell - \varepsilon \geqslant \lfloor \ell \rfloor$, et comme $\varepsilon \leqslant \lfloor \ell \rfloor + 1 - \ell$, on a

$$\lfloor \ell \rfloor < u_p < \lfloor \ell \rfloor + 1.$$

Or il est rigoureusement impossible d'avoir un entier compris strictement entre deux entiers successifs.

On a donc forcément $\ell \in \mathbb{N}$. $\square$

b. On a désormais $\lim\limits_{p \to +\infty} u_p = \ell \in \mathbb{N}$. D'après la définition de limite appliquée à $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on récupère qu'il existe un $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p \geqslant p_0$,

$$|u_p - \ell| < \frac{1}{2},$$

autrement dit

$$\ell - \frac{1}{2} < u_p < \ell + \frac{1}{2}.$$

Or comme $u_p \in \mathbb{N}$, le seul entier possible est $u_p = \ell$.

$\square$

3. a. Si on note $d_p = \dim(Ker(f^p))$, on peut remarquer que, puisque pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Ker}(f^p) \subset \mathrm{Ker}(f^{p+1})$, on a $d_p \leqslant d_{p+1}$.

   La suite $(d_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est donc croissante. Elle est majorée par $n$ (puisque dimension d'un sous-espace de $\mathbb{K}^n$ est forcément inférieure à celle de $\mathbb{K}^n$).

   La suite est donc convergente. D'après la question précédente, il existe $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall p \geqslant p_0$, $d_p = d_{p_0}$. $\square$

   b. On a donc $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) \subset \mathrm{Ker}(f^p)$ ainsi que l'égalité des dimensions, ce qui nous donne que pour tout $p \geqslant p_0$, $\mathrm{Ker}(f^p) = Ker(f^{p_0})$. $\square$

4. a. Appliquons le théorème du rang à $f^p$. On a alors $\dim(Ker(f^p)) + rg(f^p) = \dim(\mathbb{K}^n)$.

   On a donc, $\dim(Im(f^p)) = n - \dim(Ker(f^p))$. Or comme pour tout $p \geqslant p_0$, $\mathrm{Ker}(f^p) = Ker(f^{p_0})$, on a

$$\dim(Im(f^p)) = n - \dim(Ker(f^{p_0})).$$

   Et d'après le théorème du rang appliqué à $f^{p_0}$, on a

$$\dim(Im(f^{p_0})) = n - \dim(Ker(f^{p_0})).$$

   On a donc pour tout $p \geqslant p_0$, $\dim(Im(f^p)) = \dim(Im(f^{p_0}))$. $\square$

   b. C'est la même chose que précédemment. On a donc $\mathrm{Im}(f^p) \subset \mathrm{Im}(f^{p_0})$ ainsi que l'égalité des dimensions, ce qui nous donne que pour tout $p \geqslant p_0$, $\mathrm{Im}(f^p) = Im(f^{p_0})$ $\square$

5. Comme $\mathrm{Ker}(f^{p_0})$ et $\mathrm{Im}(f^{p_0})$ sont des sous-espaces vectoriels, il est clair que $\{0\} \subset \mathrm{Ker}(f^{p_0}) \cap \mathrm{Im}(f^{p_0})$.

   Soit $y \in \mathrm{Ker}(f^{p_0}) \cap \mathrm{Im}(f^{p_0})$. Comme $y \in \mathrm{Im}(f^{p_0})$, il existe $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $y = f^{p_0}(x)$.

   On a de plus $f^{p_0}(y) = 0$, donc $f^{2p_0}(x) = 0$. Autrement dit $x \in \mathrm{Ker}(f^{2p_0})$. Cependant, $\mathrm{Ker}(f^{2p_0}) = Ker(f^{p_0})$ puisque $2p_0 \geqslant p_0$. On a donc $x \in \mathrm{Ker}(f^{p_0})$, donc $f^{p_0}(x) = 0$. Or comme $y = f^{p_0}(x)$, on a $y = 0$, ce qui nous donne l'inclusion$\mathrm{Ker}(f^{p_0}) \cap \mathrm{Im}(f^{p_0}) \subset \{0\}$.

   On a donc démontré par double inclusion que $\mathrm{Ker}(f^{p_0}) \cap \mathrm{Im}(f^{p_0}) = \{0\}$. $\square$

# 21 Compléments sur les variables aléatoires finies

**Exercice 1.** Par linéarité de l'espérance, on a $E(Z) = E(X-Y) = E(X) - E(Y)$ par linéarité de l'espérance. Comme $X$ et $Y$ suivent la même loi uniforme, on a $E(Z) = 0$.
Parce que $X$ et $Y$ sont indépendantes, on a

$$V(Z) = V(X-Y) = V(X) + V(-Y) = V(X) + V(Y) = 2\frac{n^2-1}{12} = \frac{n^2-1}{6}.$$

Ensuite, on a $Z(\Omega) = [\![-n+1, n-1]\!]$.
Ensuite, nous allons utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $Y$, et on a, $\forall k \in Z(\Omega)$,

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{\ell=1}^{n} P(Z=k \cap Y=\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} P(X-Y=k \cap Y=\ell) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} P(X=k+\ell \cap Y=\ell) \end{aligned}$$

Si $k \geqslant 0$, on a

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{\ell=1}^{n-k} P(X=k+\ell \cap Y=\ell) \text{ les autres termes sont nuls} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-k} P(X=k+\ell)P(Y=\ell) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n-k} \frac{1}{n}\frac{1}{n} \\ &= \frac{n-k}{n^2}. \end{aligned}$$

Si $k < 0$, on a

$$\begin{aligned} P(Z=k) &= \sum_{\ell=1-k}^{n} P(X=k+\ell \cap Y=\ell) \text{ les autres termes sont nuls} \\ &= \sum_{\ell=1-k}^{n} P(X=k+\ell)P(Y=\ell) \text{ par indépendance} \\ &= \sum_{\ell=1-k}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{n} \\ &= \frac{n-(1-k)+1}{n^2} \\ &= \frac{n+k}{n^2}. \end{aligned}$$

En résumé, on a $\forall k \in [\![-n+1, n-1]\!]$, $P(Z=k) = \dfrac{n-|k|}{n^2}$.

On a alors,

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} kP(Z=k) \\
&= \sum_{k=-n+1}^{n-1} k\frac{n-|k|}{n^2} \\
&= \sum_{k=-n+1}^{-1} k\frac{n+k}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{n-k}{n^2}
\end{aligned}$$

Posons $\ell = -k$ dans la première, on a alors

$$\begin{aligned}
E(Z) &= \sum_{\ell=1}^{n-1} -\ell\frac{n-\ell}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} k\frac{n-k}{n^2} \\
E(Z) &= 0.
\end{aligned}$$

Puis, on a $V(Z) = E(Z^2)$ comme $E(Z) = 0$ et

$$\begin{aligned}
E(Z^2) &= \sum_{k=-n+1}^{n-1} k^2P(Z=k) \\
&= \sum_{k=-n+1}^{n-1} k^2\frac{n-|k|}{n^2} \\
&= \sum_{k=-n+1}^{-1} k^2\frac{n-|k|}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} k^2\frac{n-k}{n^2}
\end{aligned}$$

Posons $\ell = -k$ dans la première, on a alors Posons $\ell = -k$ dans la première, on a alors

$$\begin{aligned}
E(Z^2) &= \sum_{\ell=1}^{n-1} \ell^2\frac{n-|\ell|}{n^2} + \sum_{k=0}^{n-1} k^2\frac{n-k}{n^2} \\
&= 2\sum_{k=0}^{n-1} k^2\frac{n-k}{n^2} \\
&= \frac{2}{n^2}\left[n\sum_{k=0}^{n-1} k^2 - \sum_{k=0}^{n-1} k^3\right] \\
&= \frac{2}{n^2}\left[n\frac{(n-1)n(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4}\right] \\
&= \frac{(n-1)(2n-1)}{3} - \frac{(n-1)^2}{2} \\
&= \frac{(4n^2-6n+2)-(3n^3-6n+3)}{6} \\
&= \frac{n^2-1}{6}.
\end{aligned}$$

Donc on a bien $V(Z) = \dfrac{n^2-1}{6}$. Ouf.
□

**Exercice 2.** Comme souvent dans ce chapitre, la réponse est dans la formule des probabilités totales. Appliquons la au système complet d'événements $(Y = k)_{k\in[\![0,n]\!]}$.
On a alors :

$$
\begin{aligned}
P(X=Y) = & \sum_{k=0}^{n} P(X=Y \cap Y=k) \\
= & \sum_{k=0}^{n} P(X=k \cap Y=k) \\
= & \sum_{k=0}^{n} P(X=k)P(Y=k) \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
= & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \\
= & \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{k} \\
= & \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \text{ d'après la propriété sur les coefficients binomiaux.}
\end{aligned}
$$

Pour terminer de simplifier, on a besoin de la formule de Vandermonde dans un cas particulier. Cette formule de Vandermonde figure dans l'exercice sur la loi hypergéométrique du chapitre des variables aléatoires. En voilà une démonstration différente dans le cas général (on prendra ensuite $n = m$ et $k = n$ pour son application).
On a $(1+x)^{m+n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} x^k$.
Par ailleurs, $(1+x)^{m+n} = (1+x)^m(1+x)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} x^i \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j$.
Ainsi, $(1+x)^{m+n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} \binom{m}{i}\binom{n}{j} x^{i+j}$.
En posant $k = i+j$, on a $(1+x)^{m+n} = \displaystyle\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=i}^{n+i} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} x^k$. En utilisant la convention habituelle que $\dbinom{n}{k} = 0$ si $k \notin [\![0, n]\!]$, on peut écrire

$$
(1+x)^{m+n} = \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} x^k = \sum_{k=0}^{m+n}\sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i}\binom{n}{k-i} x^k.
$$

L'unicité de l'écriture développée réduite d'un polynôme assure l'égalité de Vandermonde.
Revenons-en à notre problème. Nous avions

$$
\begin{aligned}
P(X=Y) = & \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} \\
= & \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \text{ d'après la formule de Vandermonde.}
\end{aligned}
$$

Ainsi, on a $P(X=Y) = \dbinom{2n}{n}\dfrac{1}{2^{2n}}$. □

**Exercice 3.** 1. Il est clair que $X$ et $Y$ suivent des lois uniformes sur $[\![1, 20]\!]$ et sont indépendantes.

On a $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ par linéarité de l'espérance. Or $E(X) = E(Y) = \dfrac{21}{2}$, donc $E(Z) = 21$.

De la même façon, on a $E(T) = E(X-Y) = E(X) - E(Y) = 0$ en utilisant la linéarité.

Pour les variances, on a $V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y)$ puisque $X$ et $Y$ sont indépendantes. Or

$$V(X) = V(Y) = \frac{400-1}{12} = \frac{399}{12} = \frac{133}{4}.$$

Ainsi, $V(Z) = \dfrac{133}{2}$.

Ensuite, $V(T) = V(X-Y) = V(X) + V(-Y)$ puisque $X$ et $-Y$ sont indépendantes. Mais comme $V(-Y) = V(Y)$, on trouve $V(T) = V(Z) = \dfrac{133}{2}$.

□

2. Remarquons que $Z(\Omega) = [\![2, 40]\!]$ et $T(\Omega) = [\![-19, 19]\!]$ et $Z > T$ car $Y > 0$.

   Ainsi

   $$(ZT = 48) = (Z = 8 \cap T = 6) \cup (Z = 16 \cap T = 3) \cup (Z = 12 \cap T = 4) \cup (Z = 24 \cap T = 2).$$

   Réfléchissons un peu pour voir si chaque chose est possible.

   - $(Z = 8) \cap (T = 6) = (X + Y = 8 \cap X - Y = 6) = (X = 7 \cap Y = 1)$ ;
   - $(Z = 12 \cap T = 4) = (X + Y = 12 \cap X - Y = 4) = (X = 8 \cap Y = 4)$ ;
   - $(Z = 16 \cap T = 3) = (X + Y = 16 \cap X - Y = 3) = (X = \frac{19}{2} \cap Y = \frac{13}{2}) = \emptyset$ ;
   - $(Z = 24 \cap T = 2) = (X + Y = 24 \cap X - Y = 2) = (X = 13 \cap Y = 11)$.

   Ainsi, $P(ZT = 48) = P\big((X = 7 \cap Y = 1) \cup \emptyset \cup (X = 8 \cap Y = 4) \cup (X = 13 \cap Y = 11)\big)$.

   Par incompatibilité, on a

   $$P(ZT = 48) = P(X = 7 \cap Y = 1) + 0 + P(X = 8 \cap Y = 4) + P(X = 13 \cap Y = 11).$$

   Par indépendance de $X$ et $Y$, on a

   $$P(ZT = 48) = P(X = 7)P(Y = 1) + P(X = 8)P(Y = 4) + P(X = 13)P(Y = 11).$$

   Et donc, $P(ZT = 48) = \dfrac{3}{20^2} = \dfrac{3}{400}$. □

**Exercice 4.** 1. Il est évident que $X$ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

De plus, $Y$ compte le nombre de succès à l'épreuve « obtenir face » de probabilité $\dfrac{1}{2}$ répétée 3 fois de façon indépendante, donc $Y$ suit une loi binomiale de paramètre $\left(3, \dfrac{1}{2}\right)$. □

2. On a $X(\Omega) = \{0, 1\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$.

   Il est clair que $P(X = 0 \cap Y = 0) = 0$ (on ne peut pas avoir eu un face en premier et aucun face) et $P(X = 1 \cap Y = 3)$ aussi.

   Calculons $P(X = 1 \cap Y = 1)$. Notons $F_i$ l'événement « faire face au rang $i$ ».

On a $(X = 1 \cap Y = 1) = (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3)$.
Ainsi,

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P\left((\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3)\right).$$

Par incompatibilité, on a

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3).$$

Par indépendance des lancers, on a

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = P(\overline{F_1})P(F_2)P(\overline{F_3}) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})P(F_3).$$

Et donc

$$P(X = 1 \cap Y = 1) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

A ce stade là, on a le tableau suivant.

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | $P(Y = j)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 2 | | | $\frac{3}{8}$ |
| 3 | | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| $P(X = i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |

La formule des probabilités totales qui se traduit par la somme de la ligne $j$ donne $P(Y = j)$ et la somme sur la colonne $i$ donne $P(X = i)$ nous permet de remplir toutes les autres cases !

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | $P(Y = j)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |
| 1 | $\frac{1}{8}$ | $\frac{2}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 2 | $\frac{2}{8}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{3}{8}$ |
| 3 | $\frac{1}{8}$ | 0 | $\frac{1}{8}$ |
| $P(X = i)$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | |

$\square$

**Exercice 5.** 1. Pour que ce soit une probabilité, il faut que

$$\sum_{i=0}^{N} \sum_{j=0}^{N} P(X = i \cap Y = j) = 1.$$

Calculons cette somme. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} P(X=i\cap Y=j) &= \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{N} Ap^iq^{N-j} \\
&= A\left(\sum_{i=0}^{N} p^i\right)\left(\sum_{j=0}^{N} q^{N-j}\right) \\
&= A\left(\sum_{i=0}^{N} p^i\right)\left(\sum_{k=0}^{N} q^{k}\right) \text{ avec } k=N-j \\
&= A\frac{1-p^{N+1}}{1-p}\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \\
&= A\frac{(1-p^{N+1})(1-q^{N+1})}{pq}.
\end{aligned}$$

Ainsi, il faut avoir

$$A = \frac{pq}{(1-p^{N+1})(1-q^{N+1})}.$$

□

2. Utilisons la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $Y$.

   On a alors, $\forall i \in [\![0, N]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(X=i) &= \sum_{j=0}^{N} P(X=i\cap Y=j) \\
&= \sum_{j=0}^{N} Ap^iq^{N-j} \\
&= Ap^i\sum_{j=0}^{N} q^{N-j} \text{ on reconnait une somme déjà calculée} \\
&= Ap^i\frac{1-q^{N+1}}{1-q} \\
&= Ap^{i-1}(1-q^{N+1}) \\
&= \frac{pq}{(1-p^{N+1})(1-q^{N+1})}p^{i-1}(1-q^{N+1}) \\
&= \frac{qp^i}{1-q^{N+1}}
\end{aligned}$$

   Utilisons la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $X$.

On a alors, $\forall i \in [\![0, N]\!]$,

$$\begin{aligned} P(Y = j) = & \sum_{i=0}^{N} P(X = i \cap Y = j) \\ = & \sum_{i=0}^{N} Ap^i q^{N-j} \\ = & Aq^{N-j} \frac{1 - p^{N+1}}{1 - p} \\ = & \frac{pq}{(1 - p^{N+1})(1 - q^{N+1})} q^{N-j-1} (1 - p^{N+1}) \\ = & \frac{pq^{N-j}}{1 - q^{N+1}}. \end{aligned}$$

On remarque alors, que $\forall (i, j) \in [\![0, N]\!]^2$, on a

$$P(X = i \cap Y = j) = P(X = i) P(Y = j).$$

Elles sont donc indépendantes. $\square$

3. On a évidemment, $X + Y(\Omega) = [\![0, 2N]\!]$. Ainsi, $\forall k \in [\![0, 2N]\!]$, on a en utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associés à $Y$,

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) = & \sum_{j=0}^{N} P(X + Y = n \cap Y = j) \\ = & \sum_{j=0}^{N} P(X = k - j \cap Y = j). \end{aligned}$$

Il faut distinguer selon la position de $k$ par rapport à $N$.

Pour $k \in [\![0, C]\!]$, on a

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) = & \sum_{j=0}^{k} P(X = k - j \cap Y = j) \\ = & \sum_{j=0}^{k} Ap^{k-j} q^{N-j} \\ = & Aq^{N-k} \sum_{j=0}^{k} (pq)^{k-j} \\ = & Aq^{N-k} \sum_{\ell=0}^{k} (pq)^{\ell} \text{ avec } \ell = k - j \\ = & Aq^{N-k} \frac{1 - (pq)^{k+1}}{1 - pq}. \end{aligned}$$

Pour $k \in [\![N+1, 2N]\!]$, on a

$$\begin{aligned} P(X+Y=k) = & \sum_{j=k-N}^{N} P(X=k-j \cap Y=j) \\ = & \sum_{j=k-N}^{N} Ap^{k-j}q^{N-j} \\ = & Ap^{k-N} \sum_{j=k-N}^{N} (pq)^{N-j} \\ = & Ap^{k-N} \sum_{\ell=0}^{2N-k} (pq)^{\ell} \text{ avec } \ell = N-j \\ = & Ap^{k-N} \frac{1-(pq)^{2N-k+1}}{1-pq}. \end{aligned}$$

Pour les deux expressions, on peut bien évidemment remplacer $A$ par sa valeur, mais je n'ai pas vu de belle simplification. □

**Exercice 6.** Remarquons tout d'abord que si $X(\Omega) = [\![0, N]\!]$, on a par contre $Y(\Omega) = [\![0, 2N]\!]$.
Pour déterminer la première marginale, utilisons la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $Y$, on a alors, pour tout $i \in [\![0, N]\!]$,

$$\begin{aligned} P(X=i) = & \sum_{j=0}^{2N} P(X=i \cap Y=j) \\ = & \sum_{j=i}^{i+N} P(X=i \cap Y=j) \text{ les autres termes sont nuls} \\ = & \sum_{j=i}^{i+N} \frac{1}{(N+1)^2} \\ = & \frac{1}{N+1}. \end{aligned}$$

On a donc $X \hookrightarrow \mathcal{U}([\![0, N]\!])$.
Pour la seconde, on utilise la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $X$. On a, pour $j \in [\![0, 2N]\!]$,

$$P(Y=j) = \sum_{i=0}^{N} P(X=i \cap Y=j).$$

Il faut distinguer différents cas.
Si $k \in [\![0, N]\!]$,

$$\begin{aligned} P(Y=j) = & \sum_{i=0}^{j} P(X=i \cap Y=j) \text{ les autres termes sont nuls} \\ = & \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{(N+1)^2} \\ = & \frac{j+1}{N+1}. \end{aligned}$$

Si $k \in [\![N+1, 2N]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(Y=j) &= \sum_{i=j-N}^{N} P(X=i\cap Y=j) \text{ les autres termes sont nuls}\\
&= \sum_{i=j-N}^{N} \frac{1}{(N+1)^2}\\
&= \frac{2N-j+1}{N+1}.
\end{aligned}$$

On a donc pour tout $j \in [\![0, 2N]\!]$,

$$P(Y=j) = \begin{cases} \dfrac{j+1}{N+1} & \text{si } j \leqslant N \\ \dfrac{2N-j+1}{N+1} & \text{si } j > N. \end{cases}$$

Elles ne sont pas indépendantes parce que $P(X = 1 \cap Y = 0) = 0$ alors que $P(X = 1)P(Y=0) = \dfrac{1}{N+1}\dfrac{1}{N+1} \neq 0$. □

**Exercice 7.** 1. On a $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

On peut poser mais ce n'est pas si simple que ça. Le plus simple est de faire du dénombrement. On note $\Omega$ l'ensemble des combinaisons à deux éléments de $\{0_1, 0_2, 1_1, 1_2, 2_1, 2_2\}$ qu'on muni de la probabilité uniforme. Donc $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{6}{2} = 15$.

On a $P(X \geqslant 0) = 1$ (évidemment), $P(X \geqslant 1) = \dfrac{\binom{4}{2}}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$ (on compte le nombre de combinaisons à deux éléments pris parmi $\{1_1, 1_2, 2_1, 2_2\}$) et pour finir, $P(X \geqslant 2) = \dfrac{\binom{2}{2}}{15} = \dfrac{1}{15}$.

Ensuite, on a $P(X = 0) = P(X \geqslant 0) - P(X \geqslant 1) = \dfrac{3}{5}$ et $P(X = 1) = P(X \geqslant 1) - P(X \geqslant 2) = \dfrac{1}{3}$ et pour terminer $P(X = 2) = P(X \geqslant 2) = \dfrac{1}{15}$.

Par symétrie, il est clair que $P(Y = 0) = \dfrac{1}{15}$, $P(Y = 1) = \dfrac{1}{3}$, $P(Y = 2) = \dfrac{3}{5}$. Et si ce n'est pas clair, il faut déterminer $P(Y \leqslant 2) = 1$, $P(Y \leqslant 1) = \dfrac{6}{15}$ et $P(Y \leqslant 0) = \dfrac{1}{15}$.

□

2. Le plus simple est de remarquer que $P((X = i) \cap (Y = j)) = 0$ lorsque $i > j$ et de dresser le désormais classique tableau à double entrée, et que $P(X = i \cap Y = i) = \dfrac{1}{15}$ (une seule possibilité avoir pioché les deux boules de même numéro).

| Y \ X | 0 | 1 | 2 | $P(Y=j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{15}$ |
| 1 | | $\frac{1}{15}$ | 0 | $\frac{5}{15}$ |
| 2 | | | $\frac{1}{15}$ | $\frac{9}{15}$ |
| $P(X=i)$ | $\frac{9}{15}$ | $\frac{5}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | |

En remplaçant ce qu'on peut par la formule des probabilités totales (somme sur une ligne donne $P(Y=j)$ et sur une colonne $P(X=i)$), on se rend compte que

| $Y \backslash X$ | 0 | 1 | 2 | $P(Y=j)$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | $\frac{1}{15}$ | 0 | 0 | $\frac{1}{15}$ |
| 1 | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | 0 | $\frac{5}{15}$ |
| 2 | $\frac{4}{15}$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | $\frac{9}{15}$ |
| $P(X=i)$ | $\frac{9}{15}$ | $\frac{5}{15}$ | $\frac{1}{15}$ | |

□

3. Il suffit en réalité de calculer

$$P(X=0|Y=2) = \frac{P(X=0 \cap Y=2)}{P(Y=2)} = \frac{\frac{4}{15}}{\frac{9}{15}} = \frac{4}{9}.$$

A noter qu'il faut bien réaliser que ça marche uniquement parce qu'on sait que 2 est forcément le plus grande de deux jetons piochés ! Si la question avait été ≪ sachant qu'un des jetons porte le numéro 2, quelle est la probabilité que l'autre porte le 0 ? ≫ on n'aurait pas pu se servir des variables $X$ et $Y$. □

**Exercice 8.** 1. Beaucoup de dénombrements dans cet exercice.

On considérera $\Omega$ l'ensemble des combinaisons à $n$ éléments de $[\![1,N]\!]$ que l'on munira de la probabilité uniforme. Comme $(X \geqslant k)$ est l'ensemble des combinaisons à $n$ éléments de $[\![k,N]\!]$, on a

$P(X \geqslant k) = \frac{\binom{N-k+1}{n}}{\binom{N}{n}}$ si $k \leqslant N-n+1$, 0 sinon.

Et comme $(Y \leqslant k)$ est l'ensemble des combinaisons à $n$ éléments de $[\![n,N]\!]$, on a $P(Y \leqslant k) = \frac{\binom{k}{n}}{\binom{N}{n}}$ si $k \geqslant n$, 0 sinon. □

2. En utilisant la question 1, on trouve

$$\forall k \in [\![1,N]\!], P(X=k) = \frac{\binom{N-k+1}{n} - \binom{N-k}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{N-k}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Et pour $Y$ :

$$\forall k \in [\![1,N]\!], P(Y=k) = \frac{\binom{k}{n} - \binom{k-1}{n}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}.$$

Ça peut se simplifier avec la formule de Pascal. □

3. On a $X(\Omega) = [\![1,N]\!] = Y(\Omega)$. Si $j-i \leqslant n-1$, $P((X=i) \cap (Y=j)) = 0$ (il y a forcément une différence de $n-1$ entre le plus petit et le plus grand puisqu'on pioche $n$ boules). Sinon, $P((X=i) \cap (Y=j)) = \frac{\binom{j-i-1}{n-2}}{\binom{N}{n}}$ car $(X=i \cap Y=j)$ est l'ensemble des combinaisons à $n-2$ éléments pris entre $i+1$ et $j-1$ auxquelles on a ajouté $i$ et $j$.

Ainsi, $\forall (i,j) \in [\![1,N]\!]^2$, on a

$$P((X=i)\cap(Y=j)) = \begin{cases} \dfrac{\binom{j-i-1}{n-2}}{\binom{N}{n}} & \text{si } j-i \geqslant n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

□

**Exercice 9.** 1. Il s'agit du nombre de boules dont le numéro correspond à numéro de tirage. □

2. a. Il s'agit d'une Bernoulli. Par symétrie du problème, la probabilité de piocher une boule donnée ne peut être que la même pour chaque boule. Ainsi, la probabilité de piocher la boule numéro $k$ au $k$ème tirage ne peut être que $\frac{1}{n}$. Donc $X_k$ suit loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, donc d'espérance $\frac{1}{n}$ et de variance $\frac{n-1}{n^2}$. □

   b. On trouve, par linéarité de l'espérance

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$$

   et par indépendance,

$$V(X) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-1}{n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

   □

3. a. Pour exactement les mêmes raisons, il s'agit aussi d'une Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}$, donc d'espérance $\frac{1}{n}$ et de variance $\frac{n-1}{n^2}$. □

   b. De la même façon, on trouve $E(X) = 1$. Attention, la variance ne sera pas la même puisque les variables aléatoires ne sont plus indépendantes. □

**Exercice 10** (Attention à mener les calculs soigneusement)**.** 1. a. C'est du cours ! On voit que $X$ compte le nombre de succès à l'épreuve « répondre correctement à la question » répétée $n$ fois de façon indépendante avec la même probabilité de succès. Ainsi, $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

   □

   b. On a donc $E(X) = np$ et $V(X) = np(1-p)$. □

   c. C'est un classique...

```
from random import random

def qcm(n,p):
    X=0
    for k in range(n):
        if random()<=p:
            X+=1
    return X
```

   □

2. a. En refaisant tout depuis le début, on peut faire :

```
from random import random

def qcm2(n,p):
    Z=0
    for k in range(n):
        if random()>p:
            if random()<=p:
                Z+=1
    return Z
```

Ou en plus court et en se servant de ce qu'on vient de faire :

```
def qcm2(n,p):
    return qcm(n-qcm(n,p),p)
```

□

b. Remarquons que $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$. Pour $\ell \in [\![0, n]\!]$, on doit distinguer plusieurs cas.

- Si $k + \ell > n$ c'est-à-dire $\ell > n - k$, $P(Z = \ell | X = k) = 0$.
- Si $\ell \leqslant n - k$, on compte le nombre de succès à une expérience répétée $n - k$ fois de façon indépendante avec la même probabilité $p$ de succès. Ainsi

$$P(Z = \ell | X = k) = \binom{n-k}{\ell} p^\ell q^{n-k-\ell}.$$

□

c. Dans ces conditions, on a

$$\begin{aligned}\binom{n-k}{\ell}\binom{n}{k} &= \frac{(n-k)!}{\ell!(n-k-\ell)!}\frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{\ell!k!(n-k-\ell)!} \\ &= \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!}\frac{(n-\ell)!}{k!(n-k-\ell)!} \\ &= \binom{n}{\ell}\binom{n-\ell}{k}.\end{aligned}$$

□

d. Il est temps d'utiliser la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $X$. On a alors, pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(Z=\ell) &= \sum_{k=0}^{n} P(Z=\ell | X=k) P(X=k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-\ell} P(Z=\ell | X=k) P(X=k) \text{ les autres termes étant nuls} \\
&= \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-k}{\ell} p^\ell q^{n-k-\ell} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= p^\ell q^\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-k}{\ell} \binom{n}{k} p^k q^{2n-2k-2\ell} \\
&= p^\ell q^\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k} p^k (q^2)^{n-k-\ell} \\
&= \binom{n}{\ell} (pq)^\ell \sum_{k=0}^{n-\ell} \binom{n-\ell}{k} p^k (q^2)^{n-k-\ell} \\
&= \binom{n}{\ell} (pq)^\ell (p+q^2)^{n-\ell}.
\end{aligned}$$

On peut remarquer que

$$p+q^2 = p+(1-p)^2 = 1-p+p^2 = 1-p(1-p) = 1-pq.$$

Ainsi, $P(Z=\ell) = \binom{n}{\ell} (pq)^\ell (1-pq)^{n-\ell}$.

On a donc, $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq)$, et ensuite $E(Z) = npq$ et $V(Z) = npq(1-pq)$. □

e. Oui, $Z$ compte le nombre de succès à l'épreuve ≪ rater puis réussir sa réponse ≫ répétée $n$ fois de manière indépendante et de probabilité de succès $qp$ (puisque les deux passages sont indépendants). □

3. a. $S$ représente le nombre de bonnes réponses à l'issue des deux passages du QCM. □

b. La bêtise serait de renvoyer `qcm(n,p)+qcm2(n,p)` parce que les deux simulations ne simulent pas simultanément la même expérience : on pourrait tout à fait avoir un résultat qui dépasse $n$.

Il faut donc refaire les choses.

La version longue

```
def qcm3(n,p):
    S=0
    for k in range(n):
        if random()>p:
            if random()<=p:
                S+=1
        else:
            S+=1
    return S
```

La version courte :

```
def qcm3(n,p):
    X=qcm(n,p)
    Z=qcm(n-X,p)
    return X+Z
```

$\square$

c. On a $S(\Omega) = [\![0, n]\!]$.

Et si on utilisait la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $X$ ? Ainsi, $\forall \ell \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\begin{aligned}
P(S = \ell) &= \sum_{k=0}^{n} P(S = \ell \cap X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(X + Z = \ell \cap X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} P(Z = \ell - k \cap X = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} P(Z = \ell - k \cap X = k) \text{ les autres termes étant nuls} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} P(Z = \ell - k | X = k) P(X = k) \text{ car } P(X = k) \neq 0 \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n-k}{\ell-k} p^{\ell-k} q^{n-k-\ell+k} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n-k}{\ell-k} \binom{n}{k} p^{\ell} q^{2n-k-\ell}.
\end{aligned}$$

Or, on a

$$\begin{aligned}
\binom{n-k}{\ell-k}\binom{n}{k} &= \frac{(n-k)!}{(\ell-k)!(n-\ell)!} \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(\ell-k)!(n-\ell)!} \\
&= \frac{n!}{\ell!(n-\ell)!} \frac{\ell!}{k!(\ell-k)!} \\
&= \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k}.
\end{aligned}$$

Ainsi, reprenons notre calcul :

$$\begin{aligned}
P(S = \ell) &= \sum_{k=0}^{\ell} \binom{n}{\ell}\binom{\ell}{k} p^{\ell} q^{2n-k-\ell} \\
&= \binom{n}{\ell} p^{\ell} q^{2n-2\ell} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} q^{\ell-k} \\
&= \binom{n}{\ell} p^{\ell} q^{2n-2\ell} (1+q)^{\ell} \\
&= \binom{n}{\ell} (p(1+q))^{\ell} (q^2)^{n-\ell}.
\end{aligned}$$

Or, $p(1+q) = (1-q)(1+q) = 1 - q^2$.

Ainsi, $P(S = \ell) = \binom{n}{\ell} \left(1 - q^2\right)^{\ell} (q^2)^{n-\ell}$.

Ainsi, $S \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1 - q^2)$.

On a donc $E(S) = n(1 - q^2)$ et $V(S) = n(1 - q^2)q^2$. $\square$

d. Oui, $S$ compte le nombre de succès à l'épreuve « on n'a pas raté deux fois la question » répétée $n$ fois de manière indépendante et de probabilité de succès $1 - q^2$ (puisque les deux passages sont indépendants). □

**Exercice 11.** 1.

```
from random import randint
def varY(n):
    return randint(1,randint(1,n))
```

□

2.

```
def espY(n):
    N=10000
    S=0
    for k in range(N):
        S+=varY(n)
    return S/N
```

On pourrait croire que ça vaut $\dfrac{n+3}{4}$. □

3. Il est clair que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n\rrbracket)$, donc $E(X) = \dfrac{n+1}{2}$ et $V(X) = \dfrac{n^2-1}{12}$. □

4. On a $Y(\Omega) = \llbracket 1, n\rrbracket$. Soit $\ell \in \llbracket 1, n\rrbracket$.

Si $\ell > k$, $P(Y = \ell | X = k) = 0$ et pour tout $\ell \leqslant k$, $P(Y = \ell | X = x) = \dfrac{1}{k}$. C'est une $\mathcal{U}(\llbracket 1, k\rrbracket)$ □

5. On trouve $\forall (k, \ell) \in \llbracket 1, n\rrbracket^2$,

$$P(X = k \cap Y = \ell) = P(Y = \ell | X = k)P(X = k).$$

Donc on a

$$P(X = k \cap Y = \ell) = \begin{cases} \dfrac{1}{nk} & \text{si } \ell \leqslant k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ensuite, on utilise la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $X$ et on a, $\forall \ell \in \llbracket 1, n\rrbracket$,

$$\begin{aligned} P(Y = \ell) &= \sum_{k=1}^{n} P(X = k \cap Y = \ell) \\ &= \sum_{k=\ell}^{n} P(X = k \cap Y = \ell) \text{les autres termes sont nuls} \\ &= \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{nk}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a $\forall \ell \in \llbracket 1, n\rrbracket$, $P(Y = \ell) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=\ell}^{n} \dfrac{1}{k}$. □

6. On a

$$\begin{aligned} E(Y) = & \sum_{\ell=1}^{n} \ell P(Y=\ell) \\ = & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{kn} \\ = & \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \ell \frac{1}{kn} \\ = & \sum_{1\leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \ell \frac{1}{kn}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(Y) = & \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \ell \frac{1}{kn} \\ = & \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} \frac{k(k+1)}{2} \\ = & \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} (k+1) \\ = & \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} k + \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n} 1 \\ = & \frac{n(n+1)}{4n} + \frac{1}{2} \\ = & \frac{n+3}{4}. \end{aligned}$$

On a donc $E(Y) = \dfrac{n+3}{4}$.

On va procéder de la même façon pour le calcul de $E(Y^2)$.

$$\begin{aligned} E(Y^2) = & \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 P(Y=\ell) \\ = & \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 \sum_{k=\ell}^{n} \frac{1}{kn} \\ = & \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \ell^2 \frac{1}{kn} \\ = & \sum_{1\leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \ell^2 \frac{1}{kn}. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
E(Y^2) = &\ \sum_{k=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k}\ell^2\frac{1}{kn}\\
= &\ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{kn}\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\\
= &\ \frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+1)\\
= &\ \frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}2k^2+\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}3k+\frac{1}{6n}\sum_{k=1}^{n}1\\
= &\ \frac{2n(n+1)(2n+1)}{36n}+\frac{3n(n+1)}{12n}+\frac{1}{6}\\
= &\ \frac{2(n+1)(2n+1)}{36}+\frac{9(n+1)}{36}+\frac{6}{36}\\
= &\ \frac{4n^2+15n+17}{36}.
\end{aligned}$$

On utilise alors la formule de Koenig-Huygens pour avoir :

$$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2,$$

soit

$$\begin{aligned}
V(Y) = &\ \frac{4n^2+15n+17}{36}-\left(\frac{n+3}{4}\right)^2\\
= &\ \frac{4n^2+15n+17}{36}-\frac{n^2+6n+9}{16}\\
= &\ \frac{4n^2+15n+17}{36}-\frac{n^2+6n+9}{16}\\
= &\ \frac{16n^2+60n+68}{144}-\frac{9n^2+54n+81}{144}\\
= &\ \frac{7n^2+6n-13}{144}
\end{aligned}$$

On peut remarquer que la variance s'annule pour $n=1$ (ce qui est logique) et donc factoriser un peu le résultat. On trouve alors $V(Y)=\dfrac{(n-1)(7n+13)}{144}$.

□

**Exercice 12.** 1. Il est clair que $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1,n\rrbracket)$, donc

$$E(X_n)=\frac{n+1}{2} \text{ et } V(X_n)=\frac{n^2-1}{12}.$$

□

2. On a $Y_n(\Omega)=\llbracket 1,n\rrbracket$.

Pour $\ell\in\llbracket 1,n\rrbracket$, on va appliquer la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $X$,

$$\begin{aligned}
P(Y_n=\ell) &= \sum_{k=1}^{n} P(Y_n=\ell|X_n=k)P(X_n=k)\\
&= \sum_{k=1}^{n} P(Y_n=\ell|X=k)\frac{1}{n}\\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{n} P(Y_n=\ell|X=k)+P(Y_n=\ell|X=\ell)\right]\\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{\ell+1}{n+\ell}\right]\\
&= \frac{1}{n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}+\frac{\ell}{n+\ell}\right]\\
&= \frac{1}{n}\left(a_n+\frac{\ell}{n+\ell}\right).
\end{aligned}$$

□

3. On a $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}$. Il s'agit d'une somme de Riemann associée à la fonction continue sur $[0,1]$ $x\mapsto\frac{1}{1+x}$. On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln(2)$$

□

4. Notons $S_n=\frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell^2}{n+\ell}=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(\ell/n)^2}{1+(\ell/n)}$. Ainsi,

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\int_0^1\frac{x^2}{1+x}dx$$

On note $I$ cette intégrale. Or

$$I=\int_0^1\frac{x^2-1}{1+x}+\frac{1}{1+x}dx=\int_0^1 x-1+\frac{1}{1+x}dx.$$

Ainsi, $I=\left[\frac{1}{2}x^2-x+\ln(1+x)\right]_0^1=\ln(2)-\frac{1}{2}$.
On a donc,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{\ell^2}{n+\ell}=\ln(2)-\frac{1}{2}.$$

□

5. On a $E(Y_n)=\sum_{\ell=1}^{n}\ell P(Y_n=\ell)$.

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
E(Y_n) = & \sum_{\ell=1}^{n} \ell \frac{1}{n} \left( a_n + \frac{\ell}{n+\ell} \right) \\
= & \frac{a_n}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \ell + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n+\ell} \\
= & \frac{a_n}{n} \frac{n(n+1)}{2} + n \frac{1}{n^2} \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\ell^2}{n+\ell} \\
= & \frac{(n+1)a_n}{2} + nS_n.
\end{aligned}$$

□

6. On a,

Le plus simple est de déterminer

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{E(Y_n)}{n}.$$

Or, on a

$$\frac{E(Y_n)}{n} = \frac{(1+\frac{1}{n})a_n}{2} + S_n.$$

Or on sait que $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \ln(2)$ et $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \ln(2) - \dfrac{1}{2}$.

Donc d'après les opérations habituelles, on a

$$\frac{E(Y_n)}{n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{\ln(2)}{2} + \ln(2) - \frac{1}{2} = \frac{3\ln(2) - 1}{2}.$$

Et donc, $E(Y_n) \sim \dfrac{3\ln(2) - 1}{2} n$.

□

**Exercice 13.** 1. Notons, pour tout l'exercice, $F_i$ avoir obtenu face au lancer $i$.

On a $X_2(\Omega) = \{0, 1\}$.

Par ailleurs, $(X_2 = 1) = (F_1 \cap F_2) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})$, ainsi, on a

$$P(X_2 = 0) = P((F_1 \cap F_2) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2})).$$

Par incompatibilité, on obtient,

$$P(X_2 = 0) = P(F_1 \cap F_2) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2}).$$

Par indépendance des lancers, on a

$$P(X_2 = 0) = P(F_1)P(F_2) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2}).$$

Et donc $P(X_2 = 0) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Comme $(X_2 = 0), (X_2 = 1))$ forme un système complet d'événements, on a et $P(X_2 = 1) = \dfrac{1}{2}$.

Ensuite, on a $X_3(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.

De plus, $(X_3 = 0) = (F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})$, ainsi, on a

$$P(X_3 = 0) = P\left((F_1 \cap F_2 \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3})\right).$$

Par incompatibilité, on obtient,

$$P(X_3 = 0) = P(F_1 \cap F_2 \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap \overline{F_3}).$$

Par indépendance des lancers, on a

$$P(X_3 = 0) = P(F_1)P(F_2)P(F_3) + P(\overline{F_1})P(\overline{F_2})P(\overline{F_3}).$$

Et donc $P(X_3 = 0) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Ensuite, $(X_3 = 2) = (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3})$, ainsi, on a

$$P(X_3 = 2) = P\left((F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) \cup (\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3})\right).$$

Par incompatibilité, on obtient,

$$P(X_3 = 2) = P(F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3) + P(\overline{F_1} \cap F_2 \cap \overline{F_3}).$$

Par indépendance des lancers, on a

$$P(X_3 = 2) = P(F_1)P(\overline{F_2})P(F_3) + P(\overline{F_1})P(F_2)P(\overline{F_3}).$$

Et donc $P(X_3 = 2) = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Comme $((X_3 = 0), (X_3 = 1), (X_3 = 2))$ forme un système complet d'événements, on a $P(X_3 = 1) = \frac{1}{2}$. □

2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. On a $X_n(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$.

   Notons, en utilisant la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements associé à $X_{n-1}$ , $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$, on a

$$\begin{aligned} P(X_n = i) &= \sum_{k=0}^{n-2} P(X_n = i | X_{n-1} = k) P(X_{n-1} = k) \\ &= P(X_n = i | X_{n-1} = i-1) P(X_{n-1} = i-1) + P(X_n = i | X_{n-1} = i) P(X_{n-1} = i) \end{aligned}$$

   car les autres termes sont nuls (on a forcément $X_n = X_{n-1}$ ou $X_n = X_{n-1} + 1$). Par ailleurs, on note bien que si $i = 0$, $P(X_{n-1} = -1) = 0$ et si $i = n-1$, $P(X_{n-1} = n-1) = 0$.

   Enfin, on remarque que $P(X_n = i | X_{n-1} = i-1) = \frac{1}{2} = P(X_n = i | X_{n-1} = i)$ puisqu'il s'agit de la probabilité d'avoir un résultat différent de celui du lancer $n-1$ pour le premier, ou différent pour le second, comme la pièce est équilibrée.

   Ainsi, on a pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$,

$$P(X_n = i) = \frac{1}{2}(P(X_{n-1} = i-1) + P(X_{n-1} = i)).$$

   □

3. Remarquons que $\varphi_n$ est un polynôme donc est $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$.

   On a $\varphi_n(1) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)$, or $(X_n = k)_{k\in[\![0,n-1]\!]}$ est un système complet d'événements.
   Ainsi, $\varphi_n(1) = 1$.

   Par ailleurs, on a $\varphi_n'(x) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k)x^{k-1}$.

   On a donc $\varphi_n'(1) = \sum_{k=1}^{n-1} kP(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} kP(X_n = k)$ car le premier terme est nul et on reconnait $\varphi_n'(1) = E(X)$.

   Ensuite, on a $\varphi_n''(x) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k)x^{k-2}$.

   On a donc $\varphi_n''(1) = \sum_{k=2}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k-1)P(X_n = k)$ car les deux premiers termes sont nuls et on reconnait $\varphi_n''(1) = E(X(X-1))$.

   □

4. On a $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k)x^k$. Or, on a précédemment montré que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], P(X_n = k) = \frac{1}{2}(P(X_{n-1} = k-1) + P(X_{n-1} = k)).$$

   Ainsi,

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) = &\ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}(P(X_{n-1} = k-1) + P(X_{n-1} = k))x^k \\
= &\ \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k-1)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} P(X_{n-1} = k)x^k \\
= &\ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1} P(X_{n-1} = k-1)x^k + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-2} P(X_{n-1} = k)x^k.
\end{aligned}$$

   en enlevant les termes nuls. On pose $\ell = k-1$ dans la première somme, et on reconnait $\varphi_{n-1}$ dans l'autre pour avoir

$$\begin{aligned}
\varphi_n(x) = &\ \frac{1}{2}\sum_{\ell=0}^{n-2} P(X_{n-1} = \ell)x^{\ell+1} + \frac{1}{2}\varphi_{n-1}(x) \\
= &\ \frac{1}{2}x\sum_{\ell=0}^{n-2} P(X_{n-1} = \ell)x^{\ell} + \frac{1}{2}\varphi_{n-1}(x) \\
= &\ \frac{1}{2}x\varphi_{n-1}(x) + \frac{1}{2}\varphi_{n-1}(x) \\
= &\ \frac{1+x}{2}\varphi_{n-1}(x).
\end{aligned}$$

   Ainsi, $(\varphi_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1+x}{2}$.

   Par ailleurs $\varphi_1(x) = 1$.

   Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n(x) = \left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-1}$ □

5. On a donc $\varphi_n'(x) = \frac{n-1}{2}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-2}$, donc $\varphi_n'(1) = \frac{n-1}{2}$

   Ainsi, $E(X_n) = \frac{n-1}{2}$.

   Ensuite, on a $\varphi_n''(x) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}\left(\frac{1+x}{2}\right)^{n-3}$, donc $\varphi_n''(1) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}$.

   On a donc $E(X(X-1)) = \frac{(n-1)(n-2)}{4}$ et $E(X(X-1)) = E(X^2) - E(X)$.

   On a donc en utilisant la loi de Koenig-Huygens,

$$V(X_n) = E(X_n^2) - E(X_n)^2 = E(X_n(X_n-1)) + E(X_n) - E(X_n)^2.$$

   Autrement dit,

$$\begin{aligned} V(X_n) &= \frac{(n-1)(n-2)}{4} + \frac{n-1}{2} - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \\ &= \frac{n-1}{4}\left((n-2)+2-(n-1)\right) \\ &= \frac{n-1}{4}. \end{aligned}$$

   On a donc, $V(X_n) = \frac{n-1}{4}$. $\square$

**Exercice 14.** 1. Si on note $\Omega$ l'ensemble des $k$-listes de $[\![1, n]\!]$, alors $(X_k = 1)$ représente l'ensemble des $k$-listes dont tous les termes sont égaux. Il y en a donc $n$.

   Ainsi, en prenant $P$ la probabilité uniforme sur $\Omega$, on a

$$P(X_k = 1) = \frac{n}{n^k} = \frac{1}{n^{k-1}}.$$

   $\square$

2. Si $k > n$, c'est nul. Sinon, toujours dans le même contexte de dénombrement, on a $(X_k = k)$ qui est l'ensemble des $k$-listes sans répétitions. On a donc

$$P(X_k = k) = \frac{n!}{n^k(n-k)!}.$$

   $\square$

3. On notera que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $X_k(\Omega) = [\![1, n]\!]$ (en réalité, c'est $[\![1, \min(k, n)]\!]$) quitte à prendre certaines probabilités nulles.

   Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, en appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à $X_k$, événements , on a

$$\begin{aligned} P(X_{k+1} = i) &= \sum_{j=1}^{n} P(X_{k+1} = i | X_k = j)P(X_k = j) \\ &= P(X_{k+1} = i | X_k = i-1)P(X_k = i-1) + P(X_{k+1} = i | X_k = i)P(X_k = i). \end{aligned}$$

   Puisque les autres termes sont nuls (il n'est pas possible d'avoir que 0 ou 1 boules distinctes de plus qu'au rang $k$ au rang $k+1$).

Ensuite, $P(X_{k+1} = i | X_k = i-1) = \dfrac{n-i+1}{n}$ puisque cela revient à avoir pioché une des boules qui n'ont pas été déjà obtenues alors que $P(X_{k+1} = i | X_k = i) = \dfrac{i}{n}$ puisque là il faut avoir pioché une boule déjà obtenue.

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$P(X_{k+1} = i) = \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1) + \frac{i}{n} P(X_k = i).$$

□

4. On a

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) = & \sum_{i=1}^{n} i P(X_{k+1} = i) \\ = & \sum_{i=1}^{n} i \left( \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1) + \frac{i}{n} P(X_k = i) \right) \\ = & \sum_{i=1}^{n} i \frac{n-i+1}{n} P(X_k = i-1) + \sum_{i=1}^{n} i \frac{i}{n} P(X_k = i). \end{aligned}$$

On pose alors $j = i-1$ dans la première somme, et on a

$$E(X_{k+1}) = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \frac{n-j}{n} P(X_k = j) + \sum_{i=1}^{n} i \frac{i}{n} P(X_k = i).$$

On remarque que dans la première, le terme en $j = 0$ est nul (donc on l'isole) et on peut ajouter le terme en $j = n$ qui est nul aussi pour obtenir les mêmes bornes dans les deux sommes. En renommant $j$ en $i$, on a

$$\begin{aligned} E(X_{k+1}) = & \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)(n-i)}{n} P(X_k = i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n} P(X_k = i) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+1)(n-i) + i^2}{n} P(X_k = i) \\ = & \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)i + n}{n} P(X_k = i) \\ = & \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^{n} i P(X_k = i) + \sum_{i=1}^{n} P(X_k = i) \\ = & \frac{n-1}{n} E(X_k) + 1. \end{aligned}$$

Ainsi, on a bien pour tout $k \geqslant 1$, $E(X_{k+1}) = \dfrac{n-1}{n} E(X_k) + 1$. □

5. On reconnait une suite arithético-géométrique. Ainsi, en posant $\ell$ tel que

$$\ell = \frac{n-1}{n} \ell + 1$$

on obtient $\ell = n$.

On pose ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = E(X_k) - n$.

On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$v_{k+1} = E(X_{k+1}) - n = \frac{n-1}{n} E(X_k) + 1 - n = \frac{n-1}{n} (v_k + n) + 1 - n$$

et donc $v_{k+1} = \frac{n-1}{n} v_k$.

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} v_1$.

Or $v_1 = E(X_1) - n = 1 - n$. Ainsi, $v_k = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1} (1-n) = -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}$.

Or $E(X_k) = v_k + n$, ainsi, $E(X_k) = -n\left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} + n$, soit

$$E(X_k) = n\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}\right].$$

□

6. Comme $\frac{n-1}{n} \in ]-1, 1[$, on a $\lim_{k\to\infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} = 0$, donc $\lim_{k\to+\infty} E(X_k) = n$.

   Autrement, au bout d'un grand nombre de tirage, on aura en moyenne tiré toutes les boules, ce qui n'est pas très étonnant. □

7. On a $1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k} = 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k}$.

   Or $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ et, en 0, $1 - (1-x)^k \sim kx$.

   Ainsi, en $n \to +\infty$, $1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{k} \sim k\frac{1}{n}$.

   On a donc, en $n \to +\infty$ ;

$$n\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k}\right] \sim k.$$

   On peut donc en conclure que $\lim_{n\to+\infty} E(X_k) = k$.

   Avec un très grand nombre de boules différentes, on ne tirera en moyenne que des boules différentes. □

# 22 Etude locale de fonctions

## 1. Limites, équivalents, développements limités et asymptotiques

**Exercice 1** (Exercice fondamental utilisant les développements limités)**.** 1. On a, en 0, $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$. Nous aurions pu nous arrêter à l'ordre 3, mais avec sinus, le 4ème est gratuit.

Ainsi, en 0, pour $x \neq 0$, on a

$$f(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + o(x^3).$$

Il est donc clair que $f$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) = 1$. Par ailleurs, on a $\frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{x}{6} + o(x)$, donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Par ailleurs, vu le développement limité obtenu, nous avons une tangente horizontale en 0 d'équation $y = 1$ et la courbe est sous la tangente.

Remarquons que nous aurions pu nous contenter de garder le DL de sinus à l'ordre 3. $\square$

2. On a, en 0, $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$. Nous aurions pu nous arrêter à l'ordre 2, pour avoir la dérivabilité et la tangente, mais il est indispensable d'avoir l'ordre suivant pour la position relative.

   Ainsi, en 0, pour $x \neq 0$, on a

$$g(x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + o(x^2).$$

   Il est donc clair que $g$ est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 1$. Par ailleurs, on a $\dfrac{g(x) - g(0)}{x} = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{x}{3} + o(x)$, donc $g$ est dérivable en 0 et $g'(0) = -\dfrac{1}{2}$. Par ailleurs, vu le développement limité obtenu, nous avons une tangente en 0 d'équation $y = 1 - \dfrac{x}{2}$ et la courbe est sur la tangente.

   $\square$

**Exercice 2.** 1. On a, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $2x + 2x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, donc on a par substitution,

$$\ln(1 + 2x + 2x^2) \underset{0}{\sim} 2x + 2x^2 = 2x(1+x) \underset{0}{\sim} 2x.$$

   On peut donc en conclure que $\ln(1 + 2x + 2x^2) \underset{0}{\sim} 2x$. $\square$

2. On voit bien que $\dfrac{1 + x + x^2}{1 - 2x} \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, donc on a très envie d'utiliser $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ à condition de mettre ça sous la forme appropriée.

   Comme c'est un quotient de polynôme, on peut écrire $\dfrac{1 + x + x^2}{1 - 2x} = 1 + \dfrac{1 + x + x^2}{1 - 2x} - 1$ et arranger la deuxième partie.

   Mais utilisons les DL. On a $\dfrac{1}{1 - 2x} = 1 + 2x + o(x)$.

   Ainsi, on a $\dfrac{1 + x + x^2}{1 - 2x} = (1 + x + x^2)(1 + 2x + o(x)) = 1 + 3x + o(x)$.

   On peut donc écrire, $\ln\left(\dfrac{1 + x + x^2}{1 - 2x}\right) = \ln(1 + 3x + o(x)) \underset{0}{\sim} 3x + o(x) \underset{0}{\sim} 3x$.

   On trouve $f(x) \underset{0}{\sim} 3x$. $\square$

3. Le piège est d'essayer de faire des équivalents parce que ça pousse à ajouter des équivalents (et je vous rappelle que c'est mal...).

   Par contre, on sait que, en 0, $e^x = 1 + x + o(x)$.

   Ainsi, $e^{3x} - 1 + 2x^2 = 1 + 3x - 1 + 2x^2 + o(x) = 3x + o(x)$. On trouve $f(x) \underset{0}{\sim} 3x$. $\square$

4. On a, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $\dfrac{3}{x} \xrightarrow[x\to +\infty]{} 0$, donc on a par substitution,

$$\ln\left(1 + \frac{3}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{3}{x}.$$

   $\square$

5. On a, $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ et $-\dfrac{x+1}{x^2-1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, donc on a par substitution,

$$\ln\left(1-\frac{x+1}{x^2-1}\right) \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x+1}{x^2-1}.$$

Or, on a l'habitude de montrer que $-\dfrac{x+1}{x^2-1} \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$.

On trouve $f(x) \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{x}$. □

6. On a $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, or $\dfrac{1}{x+1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ainsi, on a par substitution,

$$\exp\left(\frac{1}{x+1}\right) - 1 \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On trouve $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{x}$. □

7. Un peu plus difficile, posons $X = \dfrac{1}{x}$ et essayons de faire un DL à l'ordre 2 de $f$ lorsque $X$ tend vers 0. Pourquoi 2 ? Au cas où les termes d'ordre 1 s'annulent.

On a

$$\exp\left(\frac{x}{x^2+1}\right) - \frac{x+1}{x+2} = \exp\left(\frac{X^{-1}}{X^{-2}+1}\right) - \frac{X^{-1}+1}{X^{-1}+2} = \exp\left(\frac{X}{X^2+1}\right) - \frac{1+X}{1+2X}.$$

Or on a $\dfrac{1}{1+X^2} = 1 - X^2 + o(X^2)$, donc $\dfrac{X}{X^2+1} = X - X^3 + o(X^3) = X + o(X^2)$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\exp\left(\frac{X}{X^2+1}\right) &= \exp(X + o(X^2)) \\ &= 1 + X + \frac{1}{2}X^2 + o(X^2)\end{aligned}$$

Et $\dfrac{1}{1+2X} = 1 - 2X + 4X^2 + o(X^2)$, donc

$$\frac{1+X}{1+2X} = (1+X)(1-2X+4X^2+o(X^2)) = 1 - X + 2X^2 + o(X^2).$$

Ainsi,

$$\exp\left(\frac{X}{X^2+1}\right) - \frac{1+X}{1+2X} = 2X - \frac{3}{2}X^2 + o(X^2) = \frac{2}{x} - \frac{3}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

On trouve $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{2}{x}$. □

**Exercice 3.** 1. On a, en 0, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = x+1$ comme tangente en 0 et la courbe est localement au-dessus de la tangente. □

2. Posons $X = x - 2$. On a, lorsque $X$ tend vers 0, $e^x = e^{X+2} = e^2 e^X = e^2(1 + X + \frac{X^2}{2} + o(X^2))$.

   Autrement dit, $e^x = e^2 + e^2(x-2) + e^2\frac{(x-2)^2}{2} + o((x-2)^2)$. La courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = e^2 + e^2(x-2) = e^2x - e^2$ comme tangente en 2 et la courbe est localement au-dessus de la tangente. □

3. On a, en 0, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$. Donc la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente en 0 et la courbe est localement au-dessous de la tangente. □

4. Posons $X = x - 1$. On a alors, lorsque $X$ tend vers 0, $\ln(x) = \ln(1+X) = X - \frac{X^2}{2} + o(X^2)$.

   Soit $\ln(x) = -1 + x - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)$.

   Ainsi, la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = x - 1$ comme tangente en 1 et la courbe est localement au-dessous de la tangente. □

5. On a pas franchement besoin d'aller chercher toutes nos nouvelles connaissances pour répondre à cette question, mais on a $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, donc la courbe représentative de cos admet une tangente horizontale d'équation $y = 1$ en 0 et elle est localement dessous (en fait toujours). □

6. On a $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, donc la courbe représentative de sin admet une tangente d'équation $y = x$ en 0 et la courbe est localement dessus si $x < 0$, au dessous si $x > 0$. □

7. Posons $X = x - 2\pi$. On a $f(x) = \cos(X + 2\pi) - 1 = \cos(X) - 1 = -\frac{X^2}{2} + o(X^2)$.

   Ainsi, $f(x) = -\frac{(x-2\pi)^2}{2} + o((x-2\pi)^2)$. Et donc la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = 0$ comme tangente en $2\pi$ et la courbe est localement au-dessous de la tangente. □

8. On a $f(x) = xe^x = x(1+x+o(x)) = x+x^2+o(x^2)$. Ainsi, en 0, la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = x$ comme tangente et la courbe est localement au-dessus de la tangente. □

9. Comme $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$, on a

$$f(x) = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

   Ainsi, en 0, la courbe représentative de $f$ admet la droite d'équation $y = 1 + \frac{x}{2}$ comme tangente et la courbe est localement au-dessus de la tangente. □

**Exercice 4.** 1. On a, en remarquant que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, et le fait que, en 0, $(1+x)^p = 1 + px + o(x)$,

$$
\begin{aligned}
(n+1)^p-(n-1)^p = &\ n^p\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^p-\left(1-\frac{1}{n}\right)^p\right] \\
= &\ n^p\left[1+p\frac{1}{n}-\left(1-p\frac{1}{n}\right)+o\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
= &\ 2pn^p\left(\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\
\sim &\ 2pn^{p-1}.
\end{aligned}
$$

□

2. Commençons par factoriser par le terme le plus gros. On a

$$e^{(n+1)^p}-e^{(n-1)^p}=e^{(n+1)^p}(1-e^{(n-1)^p-(n+1)^p}).$$

Or, on a vu que $(n+1)^p-(n-1)^p \sim 2pn^{p-1}$,
donc si $p>1$, on a

$$(n-1)^p-(n+1)^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty,$$

donc

$$e^{(n-1)^p-(n+1)^p} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Ainsi,

$$e^{(n+1)^p}-e^{(n-1)^p} \sim e^{(n+1)^p}.$$

Si $p=1$, on a $(n-1)-(n+1)=-2$, donc, on ne peut pas dire bien mieux que

$$e^{(n+1)}-e^{(n-1)}=e^{n+1}(1-e^{-2})=(e-e^{-1})e^n.$$

Enfin, si $p<1$, on a $(n+1)^p-(n-1)^p \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Or $e^x-1 \underset{0}{\sim} x$, donc

$$1-e^{(n-1)^p-(n+1)^p} \underset{+\infty}{\sim} -((n-1)^p-(n+1)^p) \underset{+\infty}{\sim} 2pn^{p-1}.$$

Ainsi, dans ce dernier cas, $e^{(n+1)^p}-e^{(n-1)^p} \sim 2pn^{p-1}e^{(n+1)^p}$. □

**Exercice 5.** 1. On a $\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, donc par substitution,

$$\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{x}.$$

On a donc $x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1$.
Ou encore $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=1$. □

2. En fait, on l'a déjà faite, car

$$x(\ln(x+1)-\ln(x))=x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

et on retrouve une question précédente. On a donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x(\ln(x+1)-\ln(x))=1$. □

3. On a $e^x - x^2 = e^x(1 - x^2e^{-x}) \underset{+\infty}{\sim} e^x$ par croissances comparées car $x^2e^{-x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   On a donc, $\lim_{x\to+\infty} e^x - x^2 = +\infty$. □

4. On rappelle simplement que $x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ et que ça ne pose plus aucun problème. Par composition, on obtient $\lim_{x\to+\infty} x^{-x} = 0$. □

5. On rappelle simplement que $x^{-x} = e^{-x\ln(x)}$ et ensuite que par croissance comparées, $x\ln(x) \xrightarrow[x\to 0]{} x\ln(x) = 0$. Par composition, avec exponentielle qui est continue en 0, on obtient $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^{-x} = 1$. □

6. On a $\ln(x) - x = -x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$. Or par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Ainsi, $\ln(x) - x \underset{+\infty}{\sim} -x$ et on en conclue $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) - x = -\infty$. □

7. On a
$$\ln(1+x) - x = -x\left(1 - \frac{\ln(1+x)}{x}\right) = -x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x}\right).$$
   Or par croissances comparées, $\dfrac{\ln(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et par quotient $\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
   Ainsi, $\ln(1+x) - x \underset{+\infty}{\sim} -x$, et donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x} = -1$. □

8. En 0, on a $\ln(1+x) = x + o(x)$. Ainsi, $\frac{\ln(1+x)-x}{x} = \frac{o(x)}{x} = o(1)$. Autrement dit, $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x) - x}{x} = 0$. □

9. Sans trop de détails, parce que vous connaissez, on a
$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$
   par croissance comparées.
   Ainsi, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = +\infty$. □

10. On a, en 0, $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)$. Ainsi
$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \frac{1}{2} + o(1).$$
    On a donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = \dfrac{1}{2}$. □

11. Sans trop de détails, parce que vous connaissez, on a
$$\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{+\infty}{\sim} -\frac{x}{x^2} = -\frac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0.$$
    $\lim_{x\to-\infty} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} = 0$. □

12. En voilà une encombrante. Le plus simple est peut-être de poser $X = x - 1$. Auquel cas, on a
$$\frac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{e^{x+1} - e^{4x-2}} = \frac{e^{(X+1)^2+X+1} - e^{2X+2}}{e^{X+2} - e^{4X+2}} = \frac{e^{X^2+3X} - e^{2X}}{e^X - e^{4X}}$$
en simplifiant par $e^2$. Ensuite, comme $X \to 0$, on peut faire des développements limités d'ordre 1. On a
$$\frac{e^{X^2+3X} - e^{2X}}{e^X - e^{4X}} = \frac{1 + 3X - 1 - 2X + o(X)}{1 + X - 1 - 4X + o(X)} = \frac{1 + o(1)}{-3 + o(1)}.$$
Ainsi, on a $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x^2+x} - e^{2x}}{e^{x+1} - e^{4x-2}} = -\dfrac{1}{3}$. $\square$

13. On a, en 0, $e^x = 1 + x + o(x)$. Ainsi,
$$\frac{\ln(e^x + x)}{x} = \frac{\ln(1 + 2x + o(x))}{x}.$$
Mais comme, en 0, $\ln(1 + x) = x + o(x)$, on a
$$\frac{\ln(e^x + x)}{x} = \frac{2x + o(x)}{x} = 2 + o(1).$$
On a donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(e^x + x)}{x} = 2$. $\square$

14. On peut s'en sortir avec une quantité conjuguée et une factorisation habile, mais utilisons nos connaissances nouvellement acquises. On a, comme $x < 0$
$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = -x\sqrt{1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + x.$$
Ainsi, en posant $X = \dfrac{1}{x}$, on trouve
$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = \frac{1}{X}\left(1 - \sqrt{1 + 3X + 2X^2}\right).$$
Faisons un développement limité à l'ordre 1 avec $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$, ce qui nous donne
$$\sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = \frac{1}{X}\left(1 - 1 - \frac{3}{2}X + o(X)\right) = -\frac{3}{2} + o(1).$$
Ainsi, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + 3x + 2} + x = -\dfrac{3}{2}$. $\square$

15. Faisons un développement limité de chaque fonction du numérateur à l'ordre 2. En 0, on a
$$\frac{\ln(1 + x) - \sin(x)}{x^2} = \frac{x - \frac{x^2}{2} - x + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} + o(1).$$
Ainsi, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1 + x) - \sin(x)}{x^2} = -\dfrac{1}{2}$. $\square$

16. Même esprit, mais il faut aller à l'ordre 4. En 0, on a $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{8}x^2 + o(x^2)$, et donc

$$\frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4\right) + o(x^4)}{x^4} = \frac{\frac{1}{6}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{6} + o(1).$$

On a donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4} = \dfrac{1}{6}$. □

17. On a

$$(2^x + 3^x - 5^x)^{1/x} = \exp\left(\frac{1}{x}\ln(2^x + 3^x - 5^x)\right).$$

Or $2^x + 3^x - 5^x = e^{x\ln(2)} + e^{x\ln(3)} - e^{x\ln(5)}$, donc en utilisant le classique développement limité d'exponentielle à l'ordre 1, on obtient

$$2^x + 3^x - 5^x = 1 + x\ln(2) + 1 + x\ln(3) - 1 - x\ln(5) + o(x) = 1 + \ln\left(\frac{2\times 3}{5}\right)x + o(x).$$

$\ln(1+x) = x + o(x)$, donc $\ln\left(1 + \ln\left(\dfrac{2\times 3}{5}\right)x + o(x)\right) = \ln\left(\dfrac{2\times 3}{5}\right)x + o(x)$.

Ainsi,

$$\frac{1}{x}\ln(2^x + 3^x - 5^x) = \ln\left(\frac{2\times 3}{5}\right) + o(1).$$

On a donc

$$(2^x + 3^x - 5^x)^{1/x} = \exp\left(\ln\left(\frac{2\times 3}{5}\right) + o(1)\right).$$

Comme la fonction exponentielle est continue, on a

$$\lim_{x\to 0}(2^x + 3^x - 5^x)^{1/x} = \exp\left(\ln\left(\frac{2\times 3}{5}\right)\right) = \frac{2\times 3}{5}.$$

$\lim\limits_{x\to 0}(2^x + 3^x - 5^x)^{1/x} = \dfrac{2\times 3}{5}$.

Je sais bien que $\frac{2\times 3}{5} = \frac{6}{5}$, mais je les ai laissés pour bien faire apparaître les chiffres qui composaient la fonction de l'énoncé... □

18. On a

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = \exp\left(x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)\right).$$

Soit encore

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = \exp\left(x\ln(x)\ln\left(\frac{\ln(x) + \ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right)\right).$$

Ce qu'on arrange en

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = \exp\left(x\ln(x)\ln\left(1 + \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right)\right).$$

Or, $\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, et comme $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, on a

$$\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}.$$

Ainsi,

$$x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} x\ln(1+\frac{1}{x}).$$

Et comme $\dfrac{1}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$, le même équivalent permet de récupérer,

$$x\ln(x)\ln\left(1+\frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln(x)}\right) \underset{+\infty}{\sim} 1.$$

Ainsi, on avait

$$\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = \exp\left(1+o(1)\right).$$

Ce qui nous donne, par composition avec exponentielle continue en 1,

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(1+x)}{\ln(x)}\right)^{x\ln(x)} = e.$$

□

19. Posons $X = \dfrac{1}{x}$. Ainsi, on pourra faire des développements limités en 0, et on a

$$x\left(\frac{1}{e}-\exp\left(x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\right) = \frac{1}{X}\left(\frac{1}{e}-\exp\left(\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{1+X}\right)\right)\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{1}{1+X}\right) = \ln(1-X+X^2+o(X^2)) = -X+X^2-\frac{(X-X^2)^2}{2}+o(X^2) = -X+\frac{1}{2}X^2+o(X^2).$$

Donc

$$\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{1+X}\right) = -1+\frac{X}{2}+o(X).$$

On a donc

$$\frac{1}{X}\left(\frac{1}{e}-\exp\left(\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{1+X}\right)\right)\right) = \frac{1}{X}\left(\frac{1}{e}-\exp\left(-1+\frac{X}{2}+o(X)\right)\right).$$

Factorisons par $\dfrac{1}{e}$ pour faire apparaitre un développement limité bien connu

$$\frac{1}{X}\left(\frac{1}{e}-\exp\left(\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{1+X}\right)\right)\right) = \frac{1}{eX}\left(1-\exp\left(\frac{X}{2}+o(X)\right)\right).$$

Or $\exp\left(\frac{X}{2}+o(X)\right)=1+\frac{X}{2}+o(X)$, ce qui donne

$$\frac{1}{X}\left(\frac{1}{e}-\exp\left(\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{1+X}\right)\right)\right)=\frac{1}{eX}\left(1-\left(1+\frac{X}{2}+o(X)\right)\right).$$

Et enfin, en version simplifiée :

$$\frac{1}{X}\left(\frac{1}{e}-\exp\left(\frac{1}{X}\ln\left(\frac{1}{1+X}\right)\right)\right)=\frac{1}{eX}\left(-\frac{X}{2}+o(X)\right)=-\frac{1}{2e}+o(1).$$

Et pour revenir à l'expression de départ :

$$x\left(\frac{1}{e}-\exp\left(x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\right)=-\frac{1}{2e}+o(1).$$

On en conclue donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{1}{e}-\exp\left(x\ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)\right)=-\frac{1}{2e}$. □

## 2. Suites implicites

**Exercice 6.** 1. Remarquons que $f$ est la somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc dérivable et que

$$\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\qquad f'(x)=1+\frac{1}{x}>0.$$

Ainsi $f$ est strictement croissante. Par ailleurs,

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty.$$

Ainsi, $f$ est une fonction strictement croissante et continue, donc établit une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$. Ainsi, $f^{-1}$ sa réciproque est une fonction strictement croissante avec

$$\lim_{x\to-\infty} f^{-1}(x)=0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=+\infty.$$

A partir de là tout devient beaucoup plus simple : en effet, $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=f^{-1}(n)\in\mathbb{R}_+^*$ ce qui assure l'existence et l'unicité de $u_n$.

□

2. Comme $f^{-1}$ est strictement croissante, $n<n+1$ implique $f^{-1}(n)<f^{-1}(n+1)$ donc $u_n<u_{n+1}$ ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante. □

3. On a $u_n=f^{-1}(n)\xrightarrow[n\to+\infty]{}+\infty$. □

4. On a, en $+\infty$, $x+\ln(x)\sim x$, car $x+\ln(x)=x\left(1+\frac{\ln(x)}{x}\right)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$ par croissances comparées. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$, donc

$$u_n+\ln(u_n)\sim u_n.$$

Mais comme $u_n+\ln(u_n)=n$, on a en fait démontré que $u_n\sim n$. □

5. On a $\frac{u_n-n}{\ln(n)}=\frac{-\ln(u_n)}{\ln(n)}$. Or $u_n=n-\ln(u_n)$ donc

$$\frac{u_n-n}{\ln(n)}=-\frac{\ln(n-\ln(u_n))}{\ln(n)}.$$

Ainsi, en factorisant par $n$, on a

$$\frac{u_n - n}{\ln(n)} = -\frac{\ln(n) + \ln(1 - \frac{\ln(u_n)}{n})}{\ln(n)} = -1 + \frac{\ln(1 - \frac{\ln(u_n)}{n})}{\ln(n)}.$$

Or $\dfrac{\ln(u_n)}{n} = \dfrac{n - u_n}{n} = 1 - \dfrac{u_n}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$ car $u_n \sim n$.

Ainsi, on a donc, $\dfrac{\ln(1 - \frac{\ln(u_n)}{n})}{\ln(n)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, ce qui assure enfin que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n - n}{\ln(n)} = -1.$$

□

**Exercice 7.** 1. a. $f_n$ est une fonction polynôme donc dérivable. On a alors

$$f_n'(x) = (n+1)x^n - nx^{n-1} = x^{n-1}[(n+1)x - n].$$

Ainsi, sur $\mathbb{R}_+$, $f_n$ est du signe de $(n+1)x - n$, donc on en déduit le tableau de variation suivant avec de la monotonie stricte lorsque $f_n$ est monotone, la dérivée ne s'annulant qu'en un point.

| $x$ | $0$ | | $\frac{n}{n+1}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f_n(x)$ | $0$ | $\searrow$ | $f_n\left(\frac{n}{n+1}\right)$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

La limite en $+\infty$ n'étant pas bien compliquée puisque

$$f_n(x) = x^{n+1}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \underset{+\infty}{\sim} x^{n+1}.$$

□

b. Sur $\left[0, \dfrac{n}{n+1}\right]$, $f_n$ est décroissante et $f_n(0) = 0$, donc

$$f_n\left(\frac{n}{n+1}\right) \leqslant 0 < 1.$$

Ainsi, l'équation ne peut pas admettre de solution sur cet intervalle.

Sur $\left[\dfrac{n}{n+1}, +\infty\right[$, $f_n$ est strictement croissante, avec $f_n\left(\dfrac{n}{n+1}\right) \leqslant 0 < 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$. Comme $f_n$ est continue, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, 1 admet un unique antécédent par $f_n$ que l'on note $\alpha_n$.

Ainsi, $f_n(x) = 1$ admet une unique solution $\alpha_n$ sur $\mathbb{R}_+$.

□

c. On a $f_n(1) = 0$ et $f_n(2) = 2^{n+1} - 2^n = 2^n(2-1) = 2^n$.

Ainsi, comme $f_n$ est continue sur $[1,2]$, il existe un antécédent à 1 sur $[1,2]$. Comme il n'en existait qu'un sur $\mathbb{R}_+$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\alpha_n \in [1,2]$. □

2. a. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, et $\forall x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = x^{n+2} - x^{n+1} - (x^{n+1} - x^n) = x^n(x^2 - 2x + 1) = x^n(x-1)^2 \geqslant 0.$$

Ainsi, en appliquant cette inégalité à $\alpha_n$, on a

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f_n(\alpha_n).$$

Or $f_n(\alpha_n) = 1 = f_{n+1}(\alpha_{n+1})$, donc

$$f_{n+1}(\alpha_n) \geqslant f_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$

Or, sur $[1,2]$, $f_{n+1}$ est croissante, et comme $\alpha_n$ et $\alpha_{n+1}$ sont dans cet intervalle, on a forcément $\alpha_{n+1} \leqslant \alpha_n$.
La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc décroissante.
□

b. La suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante minorée par 1 donc elle converge vers une limite $\ell \in [1,2]$. □

c. Supposons $\ell \neq 1$, donc $\ell > 1$ puisque $\ell \in [1,2]$.
On a $f_n(\alpha_n) = \alpha_n^n(\alpha_n - 1)$. Ainsi, on a $\alpha_n - 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - 1 > 0$ et

$$\alpha_n^n = e^{n\ln(\alpha_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

par produit puis composition.
Ainsi, on a $f_n(\alpha_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Or $f_n(\alpha_n) = 1$, ce qui pose problème...
Ainsi, on a forcément $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. □

3. a. On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_n) = 1$, ce qui se réécrit en factorisant en

$$\alpha_n^n(\alpha_n - 1) = 1.$$

On a $\alpha_n = u_n + 1$ ce qui transforme les choses en

$$(1 + u_n)^n u_n = 1.$$

□

b. On a $(1+u_n)^n = e^{n\ln(1+u_n)}$, or $(1+u_n)^n u_n = 1$, ce qui se transforme immédiatement en

$$u_n = e^{-n\ln(1+u_n)}.$$

□

c. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$, donc en prenant le logarithme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$.
Or $\ln(u_n) = -n\ln(1+u_n)$. Or $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$ donc $\ln(1+u_n) \sim u_n$.
Ainsi, on a $\ln(u_n) = -n\ln(1+u_n) \sim -nu_n$.
On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -nu_n = -\infty$, autrement dit

$$\lim_{n\to+\infty} nu_n = +\infty.$$

□

d. On a vu que $-nu_n \sim \ln(u_n)$, donc $nu_n \sim -\ln(u_n)$, soit encore

$$u_n \sim -\frac{\ln(u_n)}{n}.$$

□

e. A partir d'un certain rang, les suites sont forcément toutes deux strictement positives, donc on peut bien prendre les logarithmes. On sait qu'il existe $(x_n)$ une suite telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = 1$ et $v_n = x_n w_n$.

Ainsi, $\ln(v_n) = \ln(x_n) + \ln(w_n) = \ln(w_n)\left(1 + \frac{\ln(x_n)}{\ln(w_n)}\right)$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(x_n)}{\ln(w_n)} = 0$, donc on a bien $\ln(v_n) \sim \ln(w_n)$. □

f. On a $n \sim \frac{-\ln(u_n)}{u_n}$. Or d'après la question précédente, cela veut implique

$$\ln(n) \sim \ln\left(\frac{-\ln(u_n)}{u_n}\right).$$

Or

$$\ln\left(\frac{-\ln(u_n)}{n}\right) = \ln(-\ln(u_n)) - \ln(u_n) = -\ln(u_n)\left(1 - \frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)}\right).$$

Or $-\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$, donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 0.$$

Ainsi, on a $\ln\left(\frac{-\ln(u_n)}{n}\right) \sim -\ln(u_n)$.

Or on avait $\ln(n) \sim \ln\left(\frac{-\ln(u_n)}{u_n}\right)$, ce qui donne

$$\ln(n) \sim -\ln(u_n).$$

En reprenant $u_n \sim -\frac{\ln(u_n)}{n}$, on récupère

$$u_n \sim \frac{\ln(n)}{n}.$$

□

g. On a $u_n \sim \frac{\ln(n)}{n} \iff u_n - \frac{\ln(n)}{n} = o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$.

Or $u_n = \alpha_n - 1$, ce qui se transforme en

$$\alpha_n = 1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

□

**Exercice 8.** 1. $f_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a $f_n'(x) = 2nx^{2n-1} + 3x^2 = x^2(2nx^{2n-3} + 3)$. Si on note $x_n = \left(-\frac{3}{2n}\right)^{1/(2n-3)}$, on a $f$ est décroissante sur $\left]-\infty, \left(-\frac{3}{2n}\right)^{1/(2n-3)}\right]$

puis croissante sur $\left[\left(-\dfrac{3}{2n}\right)^{1/(2n-3)}, +\infty\right[$. Par ailleurs, en $+\infty$ et $-\infty$, $f$ tend vers $+\infty$ car $f(x) \sim x^{2n}$.

| $x$ | $-\infty$ | $x_n$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f_n'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f_n(x)$ | $+\infty$ $\searrow$ | $f_n(x_n)$ | $\nearrow$ $+\infty$ |

$\square$

2. Il suffit de remarquer que $f_n\left(\left(-\dfrac{3}{2n}\right)^{1/(2n-3)}\right) \leqslant f_n(0) = -1$ car $f_n$ est croissante entre les deux.

   On peut appliquer le théorème de la bijection sur $\left]-\infty, \left(-\dfrac{3}{2n}\right)^{1/(2n-3)}\right]$ puis sur $\left[\left(-\dfrac{3}{2n}\right)^{1/(2n-3)}, +\infty\right[$ à $f_n$ qui est strictement monotone et continue sur chacun de ces intervalles pour assurer que $f_n$ s'annule au plus une fois sur chaque intervalle. Ensuite, comme $f_n(0) = -1$ et comme en $+\infty$ et $-\infty$, $f_n$ tend vers $+\infty$, on peut en conclure, toujours avec le théorème des valeurs intermédiaires, qu'une solution est positive et l'autre négative $\square$

3. a. On a $f_n(0) = -1$ et $f_n(1) = 1$, et comme $f_n$ est continue sur $[0,1]$, $f_n$ s'annule sur $]0,1[$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, donc $\alpha_n \in ]0,1[$. $\square$

   b. Tout simplement :

```
def alpha(n):
    a=0
    b=1
    while b-a>10**(-9):
        c=(a+b)/2
        if (a**(2*n)+a**3-1)*(c**(2*n)+c**3-1)<=0:
            b=c
        else:
            a=c
    return c
```

   $\square$

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$, comme $\alpha_n \in ]0,1[$, $\alpha_n^{2n+2} \leqslant \alpha_n^{2n}$, et donc

$$\alpha_n^{2n+2} + \alpha_n^3 - 1 \leqslant \alpha_n^{2n} + \alpha_n^3 - 1 = 0.$$

   Autrement dit,

$$f_{n+1}(\alpha_n) \leqslant 0 = f_{n+1}(\alpha_{n+1}).$$

   Comme $f_{n+1}$ est croissante sur $]0,1[$, on doit avoir $\alpha_n \leqslant \alpha_{n+1}$ pour que l'inégalité précédente soit vraie.
   La suite $(\alpha_n)$ est croissante.
   De plus, $(\alpha_n)$ est majorée par 1 donc convergente vers $\ell \in [0,1]$.

Si elle convergeait vers $\ell < 1$, comme $f_n(\alpha_n) = e^{2n\ln(\alpha_n)} + \alpha_n^3 - 1$ on aurait par composition, $\lim_{n\to+\infty} f_n(\alpha_n) = \ell^3 - 1 \neq 0$. Or $\forall n \geqslant 2$, $f_n(\alpha_n) = 0$, donc cette limite est impossible. Ainsi, la seule limite envisageable est 1.
On a donc $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 1$. □

d. A partir d'un certain rang, les suites sont forcément toutes deux strictement positives, donc on peut bien prendre les logarithmes. On sait qu'il existe $(x_n)$ une suite telle que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1$ et $v_n = x_n w_n$.
Ainsi, $\ln(v_n) = \ln(x_n) + \ln(w_n) = \ln(w_n)\left(1 + \dfrac{\ln(x_n)}{\ln(w_n)}\right)$.
Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(x_n)}{\ln(w_n)} = 0$, donc on a bien $\ln(v_n) \sim \ln(w_n)$. □

e. On a $\alpha_n^{2n} = 1 - \alpha_n^3 = (1-\alpha_n)(1+\alpha_n+\alpha_n^2)$.
En utilisant l'écriture $u_n$, on a

$$(1-u_n)^{2n} = u_n(2 - u_n + (1-u_n)^2).$$

En prenant le logarithme de cette quantité, on trouve

$$2n\ln(1-u_n) = \ln(u_n) + \ln(3 - 3u_n + u_n^2) \sim \ln(u_n)$$

car $\ln(3 - 3u_n + u_n^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln(3)$ alors que $\ln(u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Comme $\ln(1-u_n) \sim -u_n$ car $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$, on a

$$-2nu_n \sim \ln(u_n).$$

□

f. Puis en prenant le logarithme d'après la question précédente, on a

$$\ln(2) + \ln(n) + \ln(u_n) \sim \ln(-\ln(u_n)).$$

En divisant tout par $\ln(u_n)$, on a

$$\frac{\ln(2)}{\ln(u_n)} + \frac{\ln(n)}{\ln(u_n)} + 1 \sim \frac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)}.$$

Or $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(-\ln(u_n))}{\ln(u_n)} = 0$ par composition car, $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ (croissances comparées) et $\lim_{n\to+\infty} \ln(u_n) = -\infty$.
Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{\ln(u_n)} + \dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)} + 1 = 0$, autrement dit
$\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{\ln(u_n)} = -1$ puisque $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(2)}{\ln(u_n)} = 0$.
On a donc $\ln(n) \sim -\ln(u_n)$.
Or, on avait démontré que $-2nu_n \sim \ln(u_n)$, on a donc $-2nu_n \sim -\ln(n)$.
En combinant ces deux résultats, on a donc

$$u_n \sim \frac{\ln(n)}{2n}.$$

□

4. a. On a $f_n(-2) = 2^{2n} - 7 > 0$ car $n \geqslant 2$ et $f_n(-1) = -1$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à $f$ continue, on obtient que $f$ s'annule sur $]-2,-1[$, donc $\beta_n \in ]-2,-1[$. $\square$

   b. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.
   Comme $\beta_n^2 \geqslant 1$, on a
   $$\beta_n^{2n} \leqslant \beta_n^{2n+2}$$
   donc
   $$\beta_n^{2n} + \beta_n^3 - 1 \leqslant \beta_n^{2n+2} + \beta_n^3 - 1.$$
   Autrement dit, $f_n(\beta_n) \leqslant f_{n+1}(\beta_n)$.
   Puis on remarque que $f_n(\beta_n) = 0 = f_{n+1}(\beta_{n+1}) \leqslant f_{n+1}(\beta_n)$.
   Or comme $f_n$ est décroissante sur cet intervalle, cela implique que $\beta_{n+1} \geqslant \beta_n$ donc $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante. $\square$

   c. Comme $(\beta_n)_{n\geqslant 2}$ est croissante et majorée par $-1$, elle converge vers un réel $\ell \leqslant -1$.
   Si $\ell < -1$, on aurait $f_n(\beta_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par composition.
   On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \beta_n = -1$. $\square$

## 23 Fonctions réelles de deux variables réelles

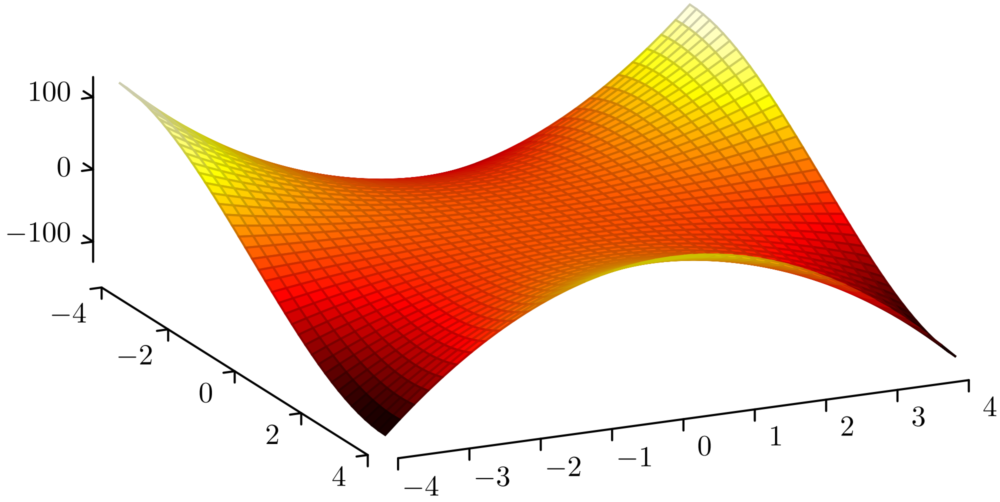
**Exercice 1.** Remarquons que $f$ est $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. On a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x^3 - 2(x-y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 4y^3 + 2(x-y).$$
On a donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$, donc $(0,0)$ est un point critique.
Par ailleurs, on a $f(x,x) = 2x^4$. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x,x) \geqslant f(0,0)$, donc $f$ n'atteint pas de maximum en $(0,0)$.
De plus, $f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2-1)$. Ainsi, $\forall x \in [-1,1]$, $f(x,0) \leqslant 0 = f(0,0)$. Ainsi, $f$ n'atteint pas de minimum en $(0,0)$. C'est un point critique, mais ni un maximum, ni un minimum. $\square$

**Exercice 2.** 1. $f$ est un polynôme donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$, et on a
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 3y^2 \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -6xy.$$
$\square$

2. Soit $(x,y)$ un tel couple. Les conditions sont alors équivalentes à
$$\begin{cases} 3x^2 - 3y^2 = & 0 \\ -6xy = & 0 \end{cases}$$
C'est équivalent à
$$\begin{cases} (x-y)(x+y) = & 0 \\ xy = & 0 \end{cases}$$
Ainsi, soit $x$ soit $y$ est nul mais $x = -y$ ou $x = y$. Ainsi, le seul couple qui vérifie ces conditions est $(0,0)$. $\square$

3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,$f(x,x) = -2x^3$. Ainsi, $f(x,x)$ change de signe autour de $f(0,0) = 0$. Donc il ne s'agit ni d'un maximum, ni d'un minimum. $\square$

4. Ça ressemble à une selle, mais une bien particulière.




Est-ce qu'un singe tiendrait confortablement sur une selle destinée à un être humain ? Ce qui explique les trois « trous » et trois « montées ». □

**Exercice 3.** 1. $f$ est bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ puisqu'il s'agit du produit entre un polynôme et une exponentielle composée avec un polynôme.

On trouve $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x^2ye^{x(y^2+1)}$. Ainsi, $(x,y)$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & 0 \end{cases}$$

ce qui revient à

$$\begin{cases} (1+x(y^2+1))e^{x(y^2+1)} = & 0 \\ 2x^2ye^{x(y^2+1)} = & 0 \end{cases}$$

Ce qui se simplifie en

$$\begin{cases} 1+xy^2+x = & 0 \\ xy = & 0 \end{cases}$$

Et donc :

$$\begin{cases} 1+x = & 0 \\ xy = & 0 \end{cases}$$

Ce qui nous permet d'assurer que le seul point critique est $(-1,0)$. □

2. La fonction est assez simple pour qu'on puisse le démontrer en faisant la différence et qu'on distingue selon le signe de $x$. Mais la méthode classique est d'étudier, à $x$ fixé, la fonction $h : y \mapsto xe^{x(y^2+1)}$. Elle est bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, puisque c'est une application partielle de $f$ qui l'était.

Ensuite, on a $h'(y) = 2x^2ye^{x(1+y^2)}$. Ainsi $h$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$, donc minimale en 0.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall y \in \mathbb{R}$, on a $f(x,y) \geqslant h(0) = xe^x$. □

3. Cette fonction $g$ est bien $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ par produit, et on a

$$g'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x.$$

Ainsi, $g$ est décroissante sur $]-\infty, -1]$ et croissante sur $[-1, +\infty[$. On a donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant g(-1) = -e^{-1}$. □

4. On a démontré que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) \geqslant g(x) \geqslant -e^{-1} = f(-1,0)$. $f$ est donc minorée par $-e^{-1}$ et elle l'atteint. $f$ atteint bien un minimum global en $(-1,0)$. □

**Exercice 4.** 1. $f$ est un polynôme donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 3y + 4$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -3x + 4y - 2$. □

2. $(x,y)$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = & 0 \end{cases}$$

ce qui revient à

$$\begin{cases} 2x - 3y = & -4 \\ -3x + 4y = & 2 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow 2L_2 + 3L_1$, on a

$$\begin{cases} 2x - 3y = & -4 \\ -y = & -8 \end{cases}$$

Ce qui pour finir,

$$\begin{cases} 2x = & 20 \\ y = & 8 \end{cases}$$

Le seul point critique est donc $(10,8)$. □

3. On a $f(10,8) = 15$, puis $f(x,y) - f(10,8) = x^2 - 3xy + 2y^2 + 4x - 2y - 12$.

Ensuite, soit on part du résultat et on développe, soit on utilise une forme canonique. On a alors

$$f(x,y) - f(10,8) = \left(x - \frac{3}{2}y + 2\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}y + 2\right)^2 + 2y^2 - 2y - 12.$$

En développant on trouve

$$f(x,y) - f(10,8) = \left(x - \frac{3}{2}y + 2\right)^2 - \frac{1}{4}y^2 + 4y - 16.$$

On reconnait enfin une identité remarquable.

□

4. Non, car on a $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f(x,8) \geqslant f(10,8)$ donc il ne s'agit pas d'un maximum.

Par ailleurs, on a $\forall y \in \mathbb{R}$, $f\left(\dfrac{3}{2}y - 2, y\right) \leqslant f(10,8)$ en remarquant que, si $y = 8$ on a $\dfrac{3}{2}y - 2 = 10$. Ainsi, on n'a pas de minimum en $(10,8)$.

Il s'agit d'un point selle ou un point col. □

**Exercice 5.** 1. a. $g$ est bien une fonction dérivable comme il s'agit d'un polynôme. On a $g'(y) = 2y - 2x - 2 = 2(y - x - 1)$. Ainsi, $g$ est décroissante sur $]-\infty, x+1]$ et croissante sur $[x+1, +\infty[$.
On a donc $g$ minimale en $x+1$. Ainsi, $\forall y \in \mathbb{R}$, $g(y) \geqslant g(x+1)$.
On a donc $t(x) = x + 1$. □

b. Pas de miracle, il faut développer. On a $f(x, t(x)) = 2x^2 + (x+1)^2 - 2x(x+1) + 8x - 2(x+1) + 8$, ce qui donne

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x, t(x)) = x^2 + 6x + 7.$$

□

c. Remarquons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x, t(x)) = (x+3)^2 - 2$ qui est minimal en $x = -3$.
On a donc montré que $\forall x, y$,

$$f(x, y) \geqslant f(x, x+1) \geqslant f(-3, -2) = -2.$$

$f$ atteint un minimum en $(-3, -2)$ qui est $-2$. □

2. a. $f$ est un polynôme donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x - 2y + 8$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 2x - 2$. □

b. $(x, y)$ est un point critique si et seulement si

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = & 0 \end{cases}$$

ce qui revient à

$$\begin{cases} 4x - 2y = & -8 \\ -2x + 2y = & 2 \end{cases}$$

On le simplifie en

$$\begin{cases} 2x - y = & -4 \\ -x + y = & 1 \end{cases}$$

En faisant $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$, on récupère $x = -3$ puis $y = -2$. Ainsi, le seul point critique est $(\alpha, \beta) = (-3, -2)$. □

c. On a $f(-3, -2) = -2$ (on l'a calculé ci-dessus). On a donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) - f(\alpha, \beta) = 2x^2 + y^2 - 2xy + 8x - 2y + 8 + 2.$$

Ainsi, on a

$$f(x, y) - f(\alpha, \beta) = (y - x - 1)^2 - (x+1)^2 + 2x^2 + 8x + 8 + 2.$$

Et donc

$$f(x, y) - f(\alpha, \beta) = (y - x - 1)^2 + x^2 + 6x + 9.$$

On a donc, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) - f(-3, -2) = (y - x - 1)^2 + (x+3)^2 \geqslant 0.$$

Autrement dit, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x, y) \geqslant f(-3, -2).$$

$f$ atteint bien un minimum en $(-3, -2)$. □

**Exercice 6.** 1. La première égalité permet d'affirmer qu'il existe une fonction $g$ qui ne dépend que de $y$ telle que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + g(y).$$

En dérivant cette égalité par rapport à $y$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2y + g'(y).$$

Ainsi, on doit avoir $g'(y) = 0$, soit $g$ constante.

Ainsi, on voit que si $f$ satisfait les deux égalités, on doit avoir, l'existence d'un $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2y^2 + k$.

On vérifie alors que ces fonctions satisfont évidemment les égalités demandées. □

2. La première égalité permet d'affirmer qu'il existe une fonction $g$ qui ne dépend que de $y$ telle que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + g(y)$.

   En dérivant cette égalité par rapport à $y$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + g'(y).$$

   Ainsi, on doit avoir $g'(y) = 0$, soit $g$ constante.

   Ainsi, on voit que si $f$ satisfait les deux égalités, on doit avoir, l'existence d'un $k \in \mathbb{R}$ tel que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + k$. A noter que l'on peut en réalité élargir les conditions à $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. □

3. La première égalité permet d'affirmer qu'il existe une fonction $g$ qui ne dépend que de $y$ telle que, pour tout $(x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + g(y)$.

   En dérivant cette égalité par rapport à $y$, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + g'(y).$$

   Ainsi, on doit avoir $g'(y) = -\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, mais ça dépend de $x$.

   Ainsi, une telle fonction n'existe pas ! □

**Exercice 7.** On considère un nuage de points $(x_i, y_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ tels qu'il existe $(i,j) \in [\![1,n]\!]$ tel que $x_i \neq x_j$. (On veut que le nuage ne soit pas sur une droite verticale, auquel cas tout ça n'a aucun intérêt.)
On notera $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto ax + b$.
Le but de cet exercice est de déterminer $a$ et $b$ pour que la somme des carrés des distances entre $(x_i, y_i)$ et $(x_i, f(x_i))$ soit minimale. On appelle l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés ou droite de régression linéaire la courbe représentative de $f$ pour les choix de $a$ et $b$ qui minimisent la quantité :

$$d(a,b) = \sum_{i=1}^{n} ((ax_i + b) - y_i)^2.$$

On notera $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$, la moyenne de $(x_1, \ldots, x_n)$.

De plus, on notera $y = (y_1, \ldots, y_n)$, $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ la moyenne de $(y_1, \ldots, y_n)$.

De plus, on notera $\mathrm{cov}(x, y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$ et $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$, autrement dit la covariance empirique et la variance empirique.

1. Commençons par quelques considérations pour simplifier nos futurs calculs.

   a. On a $V(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2$. Or $V(x)$ ne peut être nul que si si $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $x_i = \overline{x}$, ce qui implique que tous les $x_i$ sont égaux, ce qui est exclu d'après les hypothèses. Ainsi, on a $V(x) > 0$. $\square$

   b. On a
$$\begin{aligned} V(x) = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \\ = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2\overline{x}x_i + \overline{x}^2) \\ = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}n\overline{x}^2 \\ = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\overline{x}\overline{x} + \overline{x}^2. \\ = & \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \overline{x}^2 \end{aligned}$$

   $\square$

   c. On a
$$\begin{aligned} \mathrm{cov}(x, y) = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) \\ = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i y_i - \overline{x}y_i - \overline{x}y_i + \overline{xy}) \\ = & \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i - \overline{y}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}n\overline{xy} \\ = & \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{xy} - \overline{yx} + \overline{xy}. \\ = & \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{xy} \end{aligned}$$

   $\square$

2. On remarque tout simplement que $d$ est un polynôme en ses variables $a$ et $b$, donc $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

   Ainsi, on a $\frac{\partial d}{\partial a}(a, b) = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(ax_i + b - y_i)$.

   On arrange ça un peu en développant pour obtenir
$$\frac{\partial d}{\partial a}(a, b) = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2b\sum_{i=1}^{n} x_i - 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

   En utilisant les notations de l'énoncé, on a

$\dfrac{\partial d}{\partial a}(a,b) = 2(nV(x) + n\overline{x}^2)a + 2n\overline{x}b - 2n(\mathrm{cov}(x,y) + \overline{xy})$.

Et on a $\dfrac{\partial d}{\partial b}(a,b) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)$.

On a alors

$$\frac{\partial d}{\partial b}(a,b) = 2a\sum_{i=1}^{n} x_i + 2nb - 2\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

On peut ainsi, le réécrire en

$$\frac{\partial d}{\partial b}(a,b) = 2n\overline{x}a + 2nb - 2n\overline{y}.$$

Ainsi, $(a_0, b_0)$ est un point critique si et seulement si on a

$$\begin{cases} 2(nV(x) + n\overline{x}^2)a + 2n\overline{x}b - 2n(\mathrm{cov}(x,y) + \overline{xy}) = & 0 \\ 2n\overline{x}a + 2nb - 2n\overline{y} = & 0. \end{cases}$$

En simplifiant un peu

$$\begin{cases} (V(x) + \overline{x}^2)a + \overline{x}b = & \mathrm{cov}(x,y) + \overline{xy} \\ \overline{x}a + b = & \overline{y}. \end{cases}$$

En faisant $L_1 \leftarrow L_1 - \overline{x}L_2$, on récupère

$$\begin{cases} V(x)a = & \mathrm{cov}(x,y) \\ \overline{x}a + b = & \overline{y}. \end{cases}$$

Le système est échelonné (donc on a un unique couple solution) si et seulement si $V(x) \neq 0$ ce qui est bien le cas d'après la toute première question.

$\square$

3. C'est exactement la deuxième égalité ! $\square$

4. Montrer que le coefficient directeur de cette droite est $a_0 = \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}$. C'est exactement la première égalité ! $\square$

5. C'est la droite passant par $(\overline{x}, \overline{y})$ et de coefficient directeur $\dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}$. C'est donc la droite d'équation $y = \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}(x - \overline{x}) + \overline{y}$.

   Ou encore $y = \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}x + \overline{y} - \dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{V(x)}\overline{x}$.

   Pour votre culture, le coefficient de corrélation dont vous cherchez s'il est proche de 1, est en réalité $\dfrac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sqrt{V(x)V(y)}}$. $\square$

6. Désormais, il faut voir si on n'arrive bien à un minimum.

   A $a$ fixé, cherchons pour quelle valeur de $b$ on minimise $d(a,b)$.

   Notons ainsi, $f : b \mapsto d(a,b)$. Il s'agit d'un polynôme en $b$ et on a

   $$f'(b) = \frac{\partial d}{\partial b}(a,b) = 2n(\overline{x}a + b - \overline{y}).$$

   Ainsi, $f$ est décroissante sur $]-\infty, \overline{y} - a\overline{x}]$, puis croissante sur $[\overline{y} - a\overline{x}, +\infty[$.

   Ainsi, $f$ est minimale en $b_0(a) = \overline{y} - a\overline{x}$.

   Notons alors $g$ la fonction $a \mapsto d(a, \overline{y} - a\overline{x})$.

   On a ainsi,

   $$\begin{aligned} g(a) &= \sum_{i=1}^{n}((ax_i + \overline{y} - a\overline{x}) - y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}((x_i - \overline{x})a - (y_i - \overline{y}))^2 \\ &= a^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 - 2a\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y}) + \sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})^2 \\ &= nV(x)a^2 - 2an\operatorname{cov}(x,y) + nV(y) \\ &= n(V(x)a^2 - 2a\operatorname{cov}(x,y) + V(y)). \end{aligned}$$

   Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le coefficient dominant est strictement positif. Donc cette quantité est minimale pour $a_0 = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}$.

   Et on a $b_0 = \overline{y} - a_0\overline{x} = \overline{y} - \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}\overline{x}$

   □

7. On vient de démontrer que la fonction $d$ admet un minimum global en $(a_0, b_0)$ avec $a_0 = \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}$ et $b_0 = \overline{y} - a_0\overline{x} = \overline{y} - \dfrac{\operatorname{cov}(x,y)}{V(x)}\overline{x}$.

   Or il s'agissait du point critique trouvé ci-dessus. Et cela nous donne l'équation de la droite de régression linéaire.

   Allons voir le cours d'informatique pour savoir comment implémenter cette méthode.
   □