Devoir Surveillé n°1

BCPST 1

11 octobre 2025

Merci de prendre connaissance de cet extrait de la notice du concours :

Les effaceurs correcteurs liquides (ou les rollers correcteurs) sont à éviter car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
Les surligneurs sont à éviter.

L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.
Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, le candidat doit alerter au plus tôt le surveillant qui vérifiera et, éventuellement, remplacera le sujet.
Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Aucune réponse sur le sujet ne sera acceptée. L'énoncé n'est pas ramassé.
Les réponses devront être justifiées. Les résultats devront être simplifiés au mieux de vos possibilités.

Exercice 1. Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

1. $|x| \leqslant x^2$.

   Solution : Distinguons deux cas, $x \geqslant 0$ et $x < 0$.

   Si $x \geqslant 0$, l'inéquation devient $x \leqslant x^2 \iff x(x-1) \geqslant 0$. L'inéquation est vérifiée si et seulement si les deux termes du produit sont de même signe, donc dans le cas où $x \geqslant 1$ ou $x \leqslant 0$.

   Ainsi, puisque $x \geqslant 0$, l'ensemble solution est $\{0\} \cup [1, +\infty[$.

   Si $x < 0$, l'inéquation devient $-x \leqslant x^2 \iff x(x+1) \geqslant 0$. L'inéquation est vérifiée si et seulement si les deux termes du produit sont de même signe, donc dans le cas où $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 0$.

   Ainsi, puisque $x < 0$, l'ensemble solution est $]-\infty, -1]$.

   En conclusion, l'ensemble solution de cette inéquation est $]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[$. □

2. $mx^2 - (m+1)x + 1 = 0$ où $m \in \mathbb{R}$. On discutera selon les valeurs de m.

   Solution : Il s'agit d'un trinôme du second degré lorsque $m \neq 0$.

   Commençons donc par le cas $m = 0$. Dans ce cas l'équation est $-x + 1 = 0 \iff x = 1$. Ainsi, dans ce cas, il n'y a qu'une solution 1.

   Dans le cas où $m \neq 0$, le discriminant est $\Delta = (-(m+1))^2 - 4 \times m \times 1 = m^2 + 2m + 1 - 4m = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$. On a donc $\Delta \geqslant 0$. Le trinôme admet donc deux solutions (éventuellement confondues), $\dfrac{(m+1)-(m-1)}{2m} = \dfrac{1}{m}$ ou $\dfrac{(m+1)+(m-1)}{2m} = 1$.

   En résumé l'équation admet toujours 1 comme solution, et lorsque $m \neq 0$, elle en admet une deuxième $\dfrac{1}{m}$ (éventuellement confondue lorsque $m = 1$). □

3. $\sqrt{3x^2-7x+3}=1-x$. On pourra utiliser $\sqrt{13}\simeq 3,6...$ si le besoin s'en fait sortir (mais ce n'est pas indispensable selon le raisonnement utilisé).

Solution : On peut raisonner par implication. On a

$$\begin{array}{rcr} \sqrt{3x^2-7x+3}=1-x & \Longrightarrow & (\sqrt{3x^2-7x+3})^2=(1-x)^2 \\ & \Longrightarrow & 3x^2-7x+3=1-2x+x^2 \\ & \Longrightarrow & 2x^2-5x+2=0 \end{array}$$

Il s'agit d'un trinôme du second degré dont le discriminant est $\Delta=25-4\times 2\times 2=9$.

Il admet deux racines $\dfrac{5-3}{4}=\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{5+3}{4}=2$.

Comme nous avons raisonné par implication, il faut vérifier nos solutions.

On a $\sqrt{3\left(\dfrac{1}{2}\right)^2-7\times\dfrac{1}{2}+3}=\sqrt{\dfrac{3-14+12}{4}}=\dfrac{1}{2}$ et $1-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$.

Ainsi, $\dfrac{1}{2}$ est bien solution.

Cependant, $\sqrt{3\times 2^2-7\times 2+3}\geqslant 0$ alors que $1-2<0$, donc 2 n'est pas solution.

La seule solution est donc $\dfrac{1}{2}$.

On aurait pu raisonner par équivalence en se plaçant sur l'ensemble sur lequel l'équation a du sens donc lorsque $3x^2-7x+3\geqslant 0$.

Le discriminant de ce trinôme est $\Delta'=(-7)^2-4\times 3\times 3=13$. Ainsi, ce trinôme est positif lorsque $x\leqslant\dfrac{7-\sqrt{13}}{6}$ ou $x\geqslant\dfrac{7+\sqrt{13}}{6}$ puis en réalisant que pour conserver l'équivalence, il fallait aussi que $1-x\geqslant 0$, autrement dit $x\leqslant 1$. Ensuite la technique précédente permet de garder l'équivalence mais il faut que les solutions soient dans l'ensemble de définition et soient inférieures ou égales à 1, ce qui ne laisse que $\dfrac{1}{2}$. $\square$

4. $\lfloor 2x+\dfrac{1}{2}\rfloor=3$.

Solution : On a $\lfloor 2x+\dfrac{1}{2}\rfloor=3\Longleftrightarrow 3\leqslant 2x+\dfrac{1}{2}<4\Longleftrightarrow\dfrac{5}{4}\leqslant x<\dfrac{7}{4}$.

Ainsi, l'ensemble solution est $\left[\dfrac{5}{4},\dfrac{7}{4}\right[$. $\square$

Exercice 2. Soit $x\in\mathbb{R}$. Montrer que l'équation $\lfloor x+\dfrac{1}{2}\rfloor=\lfloor x-\dfrac{1}{2}\rfloor$ n'admet aucune solution.

Solution : Tout simplement, on a $\lfloor x+\dfrac{1}{2}\rfloor=\lfloor x-\dfrac{1}{2}+1\rfloor=\lfloor x-\dfrac{1}{2}\rfloor+1$.

Ainsi, on ne peut pas avoir $\lfloor x+\dfrac{1}{2}\rfloor=\lfloor x-\dfrac{1}{2}\rfloor$. $\square$

Exercice 3. 1. a. Déterminer deux réels a et b tels que, $\forall k\in\mathbb{N}$,

$$\frac{1}{(k+1)(k+3)}=\frac{a}{k+1}+\frac{b}{k+3}.$$

Solution : Soit $k\in\mathbb{N}$. On a

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{1}{(k+1)(k+3)}=\dfrac{a}{k+1}+\dfrac{b}{k+3} & \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{(k+1)(k+3)}=\dfrac{a(k+3)+b(k+1)}{(k+1)(k+3)} \\ & \Longleftrightarrow & \dfrac{1}{(k+1)(k+3)}=\dfrac{(a+b)k+(3a+b)}{(k+1)(k+3)}. \end{array}$$

Ainsi, on aimerait avoir

$$\left\{\begin{array}{lll} a & +b & =0 \\ 3a & +b & =1 \end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2-L_1}{\Longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{lll} a & +b & =0 \\ 2a & & =1 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} a & =\dfrac{1}{2} \\ b & =-\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi, $\forall k\in\mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(k+1)(k+3)}=\dfrac{1}{2(k+1)}-\dfrac{1}{2(k+3)}$. $\square$

b. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+3)} = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2(k+1)} - \frac{1}{2(k+3)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+1)} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2(k+3)}. \end{aligned}$$

Posons $i = k+1$ dans la première somme et $j = k+3$ dans la seconde. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2i} - \sum_{j=3}^{n+3} \frac{1}{2j} \\ &= \left(\frac{1}{2\times 1} + \frac{1}{2\times 2} + \sum_{i=3}^{n+1} \frac{1}{2i}\right) - \left(\sum_{j=3}^{n+1} \frac{1}{2j} + \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{2(n+3)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2(n+2)} - \dfrac{1}{2(n+3)}$.

Les amateurs de factorisation trouveront $S_n = \dfrac{3n^2 + 11n + 8}{4(n+2)(n+3)}$ puis $S_n = \dfrac{(n+1)(3n+8)}{4(n+2)(n+3)}$ mais ce n'était pas demandé. □

2. On souhaite calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$.

a. Dans un premier temps, en considérant $[1-(-1)]T_n$, déterminer une valeur de T_n.

Solution : On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (1-(-1))T_n &= (1-(-1)) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k = \sum_{k=0}^{n} \left((-1)^k k - (-1)(-1)^k k\right) \\ \iff 2T_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} k. \end{aligned}$$

Posons $\ell = k+1$ dans la seconde somme. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} 2T_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k - \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^\ell (\ell - 1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k - \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^\ell \ell + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^\ell \\ &= 0 + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k - \left(\sum_{\ell=1}^{n} (-1)^\ell \ell + (-1)^{n+1}(n+1)\right) + (-1) \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell-1} \\ &= -(-1)^{n+1}(n+1) - \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell-1} \end{aligned}$$

On pose $k = \ell - 1$ et on a

$$\begin{aligned} 2T_n &= (-1)^n(n+1) - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \\ &= (-1)^n(n+1) - \frac{1-(-1)^{n+1}}{1-(-1)} \\ &= (-1)^n(n+1) - \frac{1-(-1)^{n+1}}{2} \\ &= \frac{2(-1)^n(n+1) - 1 + (-1)^{n+1}}{2} \\ &= \frac{(-1)^n(2(n+1)-1) - 1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, $T_n = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$. $\square$

b. Dans un second temps, montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$.

Solution : Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $T_n = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$ ».

Pour $n = 0$, on a $T_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{0}(-1)^k k = 0$ et $\dfrac{(-1)^0(2\times 0+1)-1}{4} = 0$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.
On a

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k k \\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k k + (-1)^{n+1}(n+1) \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)-1}{4} + (-1)^{n+1}(n+1) \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1)-1+4(-1)^{n+1}(n+1)}{4} \\
&= \frac{(-1)^n(2n+1-4(n+1))-1}{4} \\
&= \frac{(-1)^n(-2n-3)-1}{4} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2n+3)-1}{4} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(2(n+1)+1)-1}{4}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Par récurrence, on a donc démontré que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{(-1)^n(2n+1)-1}{4}$. $\square$

3. Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}|k-n| = n(n+1)$. S'il est possible de faire une récurrence, mais ce n'est pas forcément recommandé.

Solution : Utilisons la relation de Chasles pour découper la somme selon si $k - n \geqslant 0$ ou non.
On a

$$\begin{aligned}
U_n &= \sum_{k=0}^{n-1}|k-n| + |n-n| + \sum_{k=n+1}^{2n}|k-n| \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(n-k) + 0 + \sum_{k=n+1}^{2n}(k-n) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} n - \sum_{k=0}^{n-1} k + \sum_{\ell=1}^{n} \ell \text{ en posant } \ell = k-n \text{ dans la deuxième somme} \\
&= n^2 - \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2} \\
&= \frac{n[2n-(n-1)+(n+1)]}{2} \\
&= \frac{n(2n+2)}{2} \\
&= n(n+1).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = n(n+1)$.

La preuve par récurrence est plus difficile parce qu'il est moins facile que prévu de faire apparaitre la propriété de récurrence au rang n. Notons, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $U_n = n(n+1)$ ».

Pour $n=0$, on a $U_0=\sum_{k=0}^{0}|k-0|=0$ et $0\times(0+1)=0$, ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n\in\mathbb{N}$ quelconque fixé. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a

$$\begin{aligned}
U_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2(n+1)} |k-(n+1)| \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2} |k-1-n| \\
&= \sum_{\ell=-1}^{2n+1} |\ell-n| \text{ en posant } \ell=k-1 \\
&= |-1-n| + \sum_{\ell=0}^{2n} |\ell-n| + |2n+1-n| \text{ en isolant les termes extrêmes} \\
&= (n+1)+n(n+1)+(n+1) \text{ d'après } \mathcal{P}(n) \\
&= (n+1)(1+n+1) \\
&= (n+1)(n+2).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Par récurrence, on a donc démontré que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $U_n=n(n+1)$. □

4. Soit $n\in\mathbb{N}$, calculer $V_n=\sum_{k=0}^{n}\sum_{\ell=k}^{n}\frac{2^k\ell}{2^{\ell+1}-1}$. On pourra penser à échanger l'ordre de sommation.

Solution : Il ne semble pas du tout évident de calculer la somme $\sum_{\ell=k}^{n}\frac{2^k\ell}{2^{\ell+1}-1}$. Essayons d'inverser l'ordre des sommes.

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{0\leqslant k\leqslant \ell\leqslant n} \frac{2^k\ell}{2^{\ell+1}-1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n}\sum_{k=0}^{\ell} \frac{2^k\ell}{2^{\ell+1}-1} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\ell}{2^{\ell+1}-1}\sum_{k=0}^{\ell} 2^k \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\ell}{2^{\ell+1}-1}\,\frac{1-2^{\ell+1}}{1-2} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{\ell}{2^{\ell+1}-1}(2^{\ell+1}-1) \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \ell.
\end{aligned}$$

Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $V_n=\frac{n(n+1)}{2}$. □

Exercice 4. On note trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{ch}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x+e^{-x}}{2} \end{array}; \qquad \mathrm{sh}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x-e^{-x}}{2} \end{array}; \qquad \mathrm{th}: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} \end{array}.$$

On admettra $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{sh}(x)=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{ch}(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to+\infty}\mathrm{th}(x)=1$.

1. Étudier la parité de ces trois fonctions ch, sh et th.

   Solution : Notons que ces trois fonctions sont définie sur $\mathbb{R}$ et que $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 (autrement dit $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$).

   De plus, on a pour $x \in \mathbb{R}$,

   $\operatorname{ch}(-x) = \dfrac{e^{-x} + e^{-(-x)}}{2} = \operatorname{ch}(x)$ donc ch est paire.

   On a $\operatorname{sh}(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{-(-x)}}{2} = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\operatorname{sh}(x)$ donc sh est impaire.

   Enfin, on a $\tanh(-x) = \dfrac{\operatorname{sh}(-x)}{\operatorname{ch}(-x)} = \dfrac{-\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)} = -\tanh(x)$ ainsi, tanh est impaire. $\square$

2. Justifier que sh et ch sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et déterminer, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x)$ et $\operatorname{sh}'(x)$.

   Solution : Les fonctions sh et ch sont des combinaisons linéaires de fonctions de références qui sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc elles sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

   De plus, on a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}'(x) = \dfrac{e^{x} + (-e^{-x})}{2} = \operatorname{sh}(x)$ et $\operatorname{sh}'(x) = \dfrac{e^{x} - (-e^{-x})}{2} = \operatorname{ch}(x)$. $\square$

3. Dresser le tableau de variation de sh en faisant figurer la valeur de sh(0) ainsi que les limites.

   Solution : Comme ch est une somme d'exponentielles, elle toujours strictement positive. sh est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus $\operatorname{sh}(0) = 0$, donc $\operatorname{sh}(x) < 0$ pour $x \in \mathbb{R}_-$ et $\operatorname{sh}(x) > 0$ pour $x \in R_+$. On complète les limites en utilisant la parité. En résumé :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\operatorname{ch}(x)$		$+$	
sh	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

   $\square$

4. En déduire le tableau de variation de ch.

   Solution : La dérivée de ch est sh que nous venons d'étudier. ch est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. On complète les limites en utilisant la (im)parité. On a

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\operatorname{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
ch	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

   $\square$

5. a. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = 1$.

   Solution : On peut faire une étude de fonction et montrer que $x \longmapsto \operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x)$ est dérivable, de dérivée nulle donc constante et évaluer sa valeur en 0 pour conclure. Mais remarquons tout simplement que, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{ch}^2(x) - \operatorname{sh}^2(x) = \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^{x} + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = 1.$$

   $\square$

b. Montrer que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x)$.

Solution : La fonction th est le quotient de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule jamais, ainsi th est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\text{th}'(x) = \frac{\text{sh}'(x)\,\text{ch}(x) - \text{sh}(x)\,\text{ch}'(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \frac{1}{\text{ch}^2(x)}.$$

□

c. En déduire le tableau de variation de th.

Solution : On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{th}'(x) > 0$, donc th est strictement croissante.
Ainsi, on a, en complétant les limites par imparité de la fonction th, on a

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\text{th}'(x)$		$+$	
th	-1	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	1

□

6. Est-ce que la fonction $\text{ch} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{ch}(x) \end{array}$ est injective ? Justifier.

Solution : Non, on a par exemple $\text{ch}(1) = \text{ch}(-1)$. □

7. Est-ce que la fonction $\text{ch} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \text{ch}(x) \end{array}$ est surjective ? Justifier.

Solution : Non, aucun réel strictement inférieur à 1 n'a d'antécédent d'après l'étude des variations. □

8. Montrer que la fonction $\text{th} : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-1,1[\\ x & \longmapsto & \text{th}(x) \end{array}$ est bijective en déterminant sa réciproque, notée Argth. On pourra éventuellement poser $X = e^x$ si le besoin s'en fait sentir.

Solution : Soit $y \in]-1,1[$. Cherchons s'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $\text{th}(x) = y$. On a

$$\begin{aligned}
\text{th}(x) = y &\iff y = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} \\
&\iff y = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \\
&\iff y = \frac{X - \frac{1}{X}}{X + \frac{1}{X}} \text{ en posant } X = e^x \\
&\iff y = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 1} \text{ car } X \neq 0 \\
&\iff y(X^2 + 1) = X^2 - 1 \\
&\iff X^2(y - 1) = -y - 1 \\
&\iff X^2 = \frac{-y - 1}{y - 1} \text{ car } y \neq 1 \\
&\iff X^2 = \frac{1 + y}{1 - y}
\end{aligned}$$

Comme $y \in]-1,1[$, on a $\dfrac{1+y}{1-y} > 0$ donc

$$\text{th}(x) = y \iff |X| = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}}$$

Et comme $X = e^x > 0$, on a $\text{th}(x) = y \iff X = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}}$.

Il ne reste plus qu'à retrouver x, donc $\text{th}(x) = y \iff e^x = \sqrt{\dfrac{1+y}{1-y}} \iff x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$.

Ainsi, chaque élément de $]-1,1[$ admet un unique antécédent par th, donc il s'agit d'une bijection et sa réciproque est la fonction $\text{Argth} : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right). \end{array}$ □

Exercice 5. On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = (\cos(x) + \sin(x) - 1)e^x.$$

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = (2\cos(x) - 1)e^x$.

   Solution : Notons que $x \mapsto \cos(x) + \sin(x) - 1$ est une combinaison linéaire de fonctions de référence dérivables sur $\mathbb{R}$, donc est dérivable sur $\mathbb{R}$. Par produit avec la fonction exponentielle, elle aussi dérivable sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$,

   $$f'(x) = (-\sin(x) + \cos(x))e^x + (\cos(x) + \sin(x) - 1)e^x = (2\cos(x) - 1)e^x.$$

   □

2. Donner l'ensemble des solutions de l'équation $2\cos(x) - 1 = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

   Solution : On a $2\cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = \dfrac{1}{2} \iff \cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

   Ainsi, $2\cos(x) - 1 = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} x & = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} & \\ x & = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$

   L'ensemble solution est donc $\left\{\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi, -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$. □

3. En déduire l'ensemble solution de $2\cos(x) - 1 \geqslant 0$ sur $[-\pi, \pi]$.

   Solution : Remarquons que la fonction cosinus est croissante sur $[-\pi, 0]$ et décroissante sur $[0, \pi]$. Multiplier par 2 et retirer 1 ne change pas le sens de variation, donc il en est de même pour la fonction $x \longmapsto 2\cos(x) - 1$.

   Les deux solutions de l'équation $2\cos(x) - 1 = 0$ dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$ sont $-\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.

   Plaçons le tout sur un tableau de variation.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$2\cos(x) - 1$	-3	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-3
$2\cos(x) - 1$		$-$	0		$+$		0	$-$	

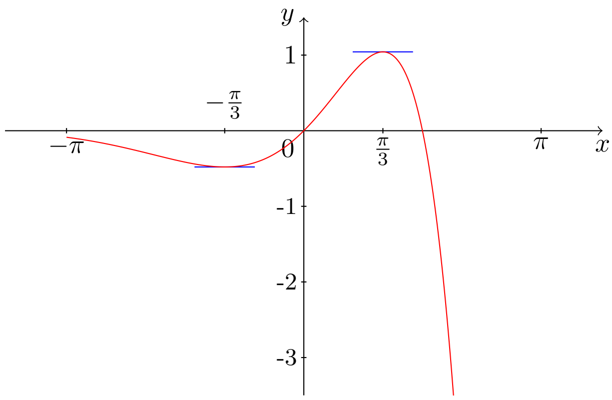
   On en déduit que, sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$, on a $2\cos(x) - 1 \geqslant 0$ lorsque $x \in \left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$. □

4. Donner le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et tracer l'allure du graphe de f.

   Solution : Comme $\forall x \in [-\pi, \pi]$, $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $2\cos(x) - 1$. Ainsi, on peut immédiatement en déduire le tableau de variations de f.

x	$-\pi$		$-\dfrac{\pi}{3}$		0		$\dfrac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$	0		$+$		0	$-$	
f	$-3e^{-2}$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$		$\searrow$	

On en déduit le graphe suivant :



□

5. Montrer qu'une primitive de la fonction $\varphi : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \cos(x)e^x \end{array}$ est la fonction

$$\Phi : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))e^x. \end{array}$$

Solution : Si on ne connait pas le résultat, on considère, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \cos(t)e^t\,\mathrm{d}t$.

Posons u et v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ définies par, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} u(t) = \cos(t); & u'(t) = -\sin(t) \\ v'(t) = e^t; & v(t) = e^t \end{array}$$

Ainsi, on a

$$\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \left[\cos(t)e^t\right]_0^x - \int_0^x -\sin(t)e^t\,\mathrm{d}t = \cos(x)e^x - 1 + \int_0^x \sin(t)e^t\,\mathrm{d}t.$$

Faisons une nouvelle intégration par parties pour l'intégrale restante.
Posons u et v deux nouvelles fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ définies par, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} u(t) = \sin(t); & u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = e^t; & v(t) = e^t \end{array}$$

Ainsi, on a

$$\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \cos(x)e^x - 1 + \left(\left[\sin(t)e^t\right]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^t\,\mathrm{d}t\right).$$

Ce qui se simplifie en

$$\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \cos(x)e^x + \sin(x)e^x - 1 - \int_0^x \varphi(t)e^t\,\mathrm{d}t.$$

Autrement dit,

$$2\int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = (\cos(x)+\sin(x))e^x - 1 \iff \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))e^x - \frac{1}{2}.$$

Ainsi, une primitive de φ est la fonction $\Phi : \begin{array}{ll} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto \dfrac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))e^x. \end{array}$

Si on connait le résultat, on peut considérer $\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))e^x \end{array}$ et remarquer qu'il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, (car $x \longmapsto \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))$ est une combinaison linéaire de fonctions dérivables dont on considère le produit avec une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi'(x) = \frac{1}{2}(-\sin(x)+\cos(x))e^x + \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))e^x = \cos(x)e^x$. □

6. À l'aide d'une intégration par parties, déterminer une primitive de la fonction

$$\psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(x)e^x. \end{array}$$

Solution :

Considérons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sin(t)e^t\,\mathrm{d}t$.

Posons u et v deux fonctions $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ définies par, $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{array}{ll} u(t) = \sin(t); & u'(t) = \cos(t) \\ v'(t) = e^t; & v(t) = e^t \end{array}$$

Ainsi, on a

$$\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = \left[\sin(t)e^t\right]_0^x - \int_0^x \cos(t)e^t\,\mathrm{d}t = \sin(x)e^x - \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, d'après la question précédente, on a

$$\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x)e^x - [\Phi(t)]_0^x = \sin(x) - \left[\frac{1}{2}(\cos(t)+\sin(t))e^t\right]_0^x.$$

On a donc,

$$\int_0^x \psi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\sin(x)-\cos(x))e^x + \frac{1}{2}.$$

Ainsi, une primitive de ψ est la fonction $\Psi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{1}{2}(\sin(x)-\cos(x))e^x. \end{array}$ □

7. En déduire une primitive de f et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Solution : On a, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (\cos(x)+\sin(x)-1)e^x = \varphi(x)+\psi(x)-e^x$.

Une primitive F de f est donc la fonction définie par, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \Phi(x)+\Psi(x)+e^x = \frac{1}{2}(\cos(x)+\sin(x))e^x + \frac{1}{2}(\sin(x)-\cos(x))e^x - e^x = (\sin(x)-1)e^x.$$

Ainsi, $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \left[(\sin(x)-1)e^t\right]_{-\pi}^{\pi} = -e^{\pi} + e^{-\pi}$.

En utilisant les notations de l'exercice précédent, on trouve $\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = -2\,\mathrm{sh}(\pi)$. □