Devoir Surveillé n°3

BCPST 1... ah non plutôt BCPST 2

31 janvier 2026

Merci de prendre connaissance de cet extrait de la notice du concours :

Les effaceurs correcteurs liquides (ou les rollers correcteurs) sont à éviter car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
Les surligneurs sont à éviter.
La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits.

Le reste...
L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.
Ce sujet comporte 10 pages numérotées de 1 à 10.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Aucune réponse sur le sujet ne sera acceptée. L'énoncé n'est pas ramassé.
Les réponses devront être justifiées. Les résultats devront être simplifiés au mieux de vos possibilités.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \arctan(u_n)$.
On définira par ailleurs la fonction $f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \arctan x. \end{array}$

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$ et en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

   Solution : Notons que f est la combinaison linéaire de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{x^2}{1+x^2} \geqslant 0$. Ainsi, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

   Par ailleurs, $f(0) = 0$, donc $\forall x \geqslant 0$, on a $f(x) \geqslant f(0) = 0$.

   Enfin notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $u_n \geqslant 0$ ».

   On a $u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vrai.

   Comme $u_n \in \mathbb{R}_+$, on a $f(u_n) \in \mathbb{R}_+$ vu ce qu'on vient de montrer. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$. $\square$

2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Solution : Soit $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = u_n - \arctan(u_n) - u_n = -\arctan(u_n)$. Comme $\forall x \geqslant 0$, $\arctan(x) \geqslant 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$, on a $-\arctan(u_n) \leqslant 0$.

   Ainsi, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ et ainsi, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. $\square$

3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite que l'on notera ℓ.

   Solution : On a vu que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par 0, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite finie ℓ.

   On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \arctan(u_n)$, donc par continuité de la fonction arctan, en faisant tendre n vers $+\infty$, on a $\ell = \ell - \arctan(\ell) \iff \arctan(\ell) = 0$.

   Or, la seule valeur pour laquelle la fonction arctan s'annule est 0.

   Ainsi, $\ell = 0$. On a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$. $\square$

4. Montrer que, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant \frac{1}{2}x$.

   Solution : Considérons la fonction $\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(x) - \frac{1}{2}x. \end{array}$

   Comme φ est une combinaison linéaire de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, φ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors

   $$\varphi'(x) = f'(x) - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x^2 - (1+x^2)}{2(1+x^2)} = \frac{x^2-1}{2(1+x^2)}.$$

   Ainsi, $\forall x \in [0,1]$, $\varphi'(x) \leqslant 0$, donc φ est décroissante sur $[0,1]$. De plus, $\varphi(0) = 0$, donc

   $$\forall x \in [0,1], \quad \varphi(x) \leqslant 0$$

   ce qui revient à

   $$\forall x \in [0,1], \quad f(x) \leqslant \frac{1}{2}x.$$

   $\square$

5. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$.

   Solution : Notons, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}'(n)$ la propriété « $u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$ ».

   On a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2^0} = 1$ donc $\mathcal{P}'(0)$ est vraie.

   Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé tel que $\mathcal{P}'(n)$ soit vrai.

   Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de premier terme $u_0 = \frac{1}{2}$ et positive, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   Ainsi, d'après la question précédente, on a $f(u_n) \leqslant \frac{1}{2}u_n$, autrement dit $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}u_n$. Or d'après $\mathcal{P}'(n)$, on a $u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$. Ainsi, $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$.

   Ainsi, $\mathcal{P}'(n+1)$ est vraie.

   On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$. $\square$

6. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Déterminer un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

   Solution : On a $|u_n - \ell| = |u_n - 0| = u_n$ car $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.

   Ainsi, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon \iff u_n \leqslant \varepsilon$.

   Or, d'après la question précédente, on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \frac{1}{2^n}$, donc, si $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon$, l'inégalité est vérifiée. Or $\frac{1}{2^n} \leqslant \varepsilon \iff -n\ln(2) \leqslant \ln(\varepsilon) \iff n \geqslant \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)}$.

   Comme $\varepsilon \in]0,1[$, $\ln(\varepsilon) < 0$ donc il suffit donc de prendre $n_0 = \lfloor \frac{-\ln(\varepsilon)}{\ln(2)} \rfloor + 1$ pour être sûr que $|u_n| \leqslant \varepsilon$. $\square$

Exercice 2. On considère le polynôme

$$U(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2.$$

On considère également les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et dans le tout le problème, pour un polynôme

$$V(X) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k$$

et une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose

$$V(M) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k M^k.$$

Par exemple, si $V(X) = 2 - 3X + X^2$, alors $V(M) = 2I_3 - 3M + M^2$.
L'objectif de cet exercice est de construire une décomposition des polynômes par rapport à U, puis d'utiliser cette décomposition pour calculer les puissances de la matrice A.
La partie III est indépendante des parties I et II. En admettant le résultat final de la partie I, il est tout à fait possible de traiter la partie II intégralement.

Partie I – Décomposition des polynômes

1. Soit $T \in \mathbb{R}[X]$. On cherche à montrer qu'il existe un *unique* couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que

$$T = UQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) \leqslant 2.$$

   a. Montrer que si $\deg(T) = 0$, on peut choisir $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et préciser alors R.
   Solution : On a évidemment $T = U \times 0_{\mathbb{R}[X]} + T$ avec $\deg(T) \leqslant 2$. □

   b. De la même façon, donner les valeurs de Q et de R si $\deg(T) = 1$ ou $\deg(T) = 2$.
   Solution : Cette décomposition reste vraie ! On a $T = U \times 0_{\mathbb{R}[X]} + T$ avec $\deg(T) \leqslant 2$. □

   c. Soit $n \geqslant 3$ et soit T un polynôme de degré $n+1$. En écrivant $T = aX^{n+1} + T_1$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\deg(T_1) \leqslant n$, montrer que le polynôme

$$T - aX^{n-2}U$$

   est de degré inférieur ou égal à n.
   Solution : Soit $T \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\deg(T) = n+1$. En notant a le coefficient dominant de T (celui de degré $n+1$), on a $T = aX^{n+1} + T_1$ où $\deg(T_1) \leqslant n$.
   On a alors

$$T - aX^{n-2}U = aX^{n+1} + T_1 - aX^{n-2}(X^3 - 4X^2 + 5X - 2) = T_1 + 4aX^n - 5aX^{n-1} + 2aX^{n-2}.$$

   Ainsi, on peut remarquer que $T_1 + 4aX^n - 5aX^{n-1} + 2aX^{n-2}$ est la somme de polynômes de degré inférieur ou égal à n, donc est de degré inférieur ou égal à n. □

   d. En raisonnant par récurrence forte sur le degré de T, montrer qu'il existe des polynômes Q et R tels que

$$T = UQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) \leqslant 2.$$

   Solution : Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété « pour tout $T \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg(T) = n$, il existe des polynômes Q et R tels que $T = UQ + R$ avec $\deg(R) \leqslant 2$. »
   Notons que l'initialisation a été faite pour $n = 0, 1$ et 2 lors des premières questions.
   Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$, tel que, pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, $\mathcal{P}(k)$ est vraie.

Considérons un polynôme T de degré égal à $n+1$.
D'après la question précédente, si on note a le coefficient dominant de T, on a

$$k = \deg(T - aX^{n-2}U) \leqslant n,$$

donc d'après $\mathcal{P}(k)$, il existe deux polynômes Q et R avec $\deg(R) \leqslant 2$ tels que

$$T - aX^{n-2}U = UQ + R.$$

Donc $T = U(aX^{n-2} + Q) + R$ avec $\deg(R) \leqslant 2$. Ainsi la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie avec les polynômes $aX^{n-2} + Q$ et R.
Ainsi, pour tout $T \in \mathbb{R}[X]$, il existe un couple de polynômes (Q, R) tels que $T = UQ + R$ avec $\deg(R) \leqslant 2$. $\square$

e. Supposons que l'on ait deux décompositions (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) telles que

$$T = UQ_1 + R_1 = UQ_2 + R_2 \qquad \text{avec} \qquad \deg(R_1) \leqslant 2 \text{ et } \deg(R_2) \leqslant 2.$$

Montrer que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.
Solution : Supposons l'existence de ces deux décompositions. On a alors

$$UQ_1 + R_1 = UQ_2 + R_2 \Longleftrightarrow U(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1.$$

Or $\deg(R_2 - R_1) \leqslant \max(\deg(R_1), \deg(R_2)) \leqslant 2$.
Mais par ailleurs $\deg(U(Q_1 - Q_2)) = \deg(U) + \deg(Q_1 - Q_2) = 3 + \deg(Q_1 - Q_2)$.
Ainsi, $\deg(R_2 - R_1) = \deg(U(Q_1 - Q_2))$ implique $3 + \deg(Q_1 - Q_2) \leqslant 2$.
On a donc $\deg(Q_1 - Q_2) \leqslant -1$, donc $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$.
On en conclut que $Q_1 = Q_2$.
L'égalité de départ devient $UQ_1 + R_1 = UQ_1 + R_2$ qui se simplifie alors en $R_1 = R_2$.
Ainsi, la décomposition $T = UQ + R$ est unique. $\square$

2. Factoriser le polynôme U sur $\mathbb{R}$. Préciser ses racines et leur multiplicité.

Solution : On peut remarquer que $U(1) = 0$.

Ainsi, il existe trois réels a, b et c tels que $U = (X-1)(aX^2 + bX + c)$.

Donc $U = aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c$.

Par unicité de l'écriture développée réduite, on a le système

$$\begin{cases} a &= 1 \\ -a+b &= -4 \\ -b+c &= 5 \\ -c &= -2 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -3 \\ -(-3)+2 &= 5 \\ c &= 2 \end{cases}$$

Ainsi, $U = (X-1)(X^2 - 3X + 2)$.

Par ailleurs $X^2 - 3X + 2$ admet 1 pour racine évidente, et le produit des racines faisant 2, l'autre vaut 2.

On a donc $U = (X-1)^2(X-2)$.

1 est donc racine double de U et 2 est racine d'ordre 1.

Les étudiants efficaces ont bien évidemment remarqué que 1 et 2 étaient racines évidentes, puis ont calculé $U' = 3X^2 - 8X + 5$ et ont remarqué que $U'(1) = 0$. Ils ont immédiatement compris que 1 était donc racine au moins double, et comme $\deg(U) = 3$ et que son coefficient dominant est 1, la factorisation est immédiatement $U = (X-1)^2(X-2)$. $\square$

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (Q_n, R_n) l'unique couple de polynômes avec R_n de degré inférieur ou égal à 2 dont on justifiera l'existence tel que

$$X^n = UQ_n + R_n.$$

a. Montrer que $R_n(1) = 1$, $R_n(2) = 2^n$ et $R'_n(1) = n$.

Solution : Pour $n \in \mathbb{N}$, en utilisant la décomposition précédente le polynôme X^n, on sait qu'il existe un unique couple de polynômes (Q_n, R_n) avec $\deg(R_n) \leqslant 2$ tel que $X^n = UQ_n + R_n$.
On a donc $R_n = X^n - UQ_n$.
On a donc $R_n(1) = 1 - U(1)Q_n(1)$. Or, comme $U(1) = 0$, on a $R_n(1) = 1$.
De la même façon, on a $R_n(2) = 2^n - U(2)Q_n(2) = 2^n$ car $U(2) = 0$.
Enfin, on a $R'_n = nX^{n-1} - U'Q_n - UQ'_n$ donc

$$R'_n(1) = n - U'(1)Q_n(1) - U(1)Q_n(1).$$

On a déjà vu que $U(1) = 0$ et comme 1 est une racine double de U, on a aussi $U'(1) = 0$.
Ainsi, $R'_n(1) = n$.
Notons que, même si $n = 0$, on a bien $R'_n(1) = 0$ car $R_n = X^0 = 1$ d'après la première question de cet exercice. □

b. En écrivant $R_n = aX^2 + bX + c$, où a, b et c sont trois réels, établir un système d'équations vérifié par a, b et c.

Solution : On note $R_n = aX^2 + bX + c$ avec a, b et c sont trois réels.
En utilisant la question précédente, on a

$$R_n(1) = 1 \iff a + b + c = 1$$

et, comme $R'_n = 2aX + b$, on a

$$R'_n(1) = n \iff 2a + b = n.$$

Enfin,

$$R_n(2) = 2^n \iff 4a + 2b + c = 2^n.$$

On a donc le système

$$\begin{cases} a & +b & +c & = 1 \\ 2a & +b & & = n \\ 4a & +2b & +c & = 2^n \end{cases}$$

□

c. En déduire que l'expression explicite de R_n est

$$R_n = (2^n - n - 1)X^2 + (-2^{n+1} + 3n + 2)X + 2^n - 2n.$$

Solution : Il ne reste qu'à résoudre le système précédent :

$$\begin{cases} a & +b & +c & = 1 \\ 2a & +b & & = n \\ 4a & +2b & +c & = 2^n \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_1}{\iff} \begin{cases} a & +b & +c & = 1 \\ 2a & +b & & = n \\ 3a & +b & & = 2^n - 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}{\iff} \begin{cases} a & +b & +c & = 1 \\ 2a & +b & & = n \\ a & & & = 2^n - n - 1 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_3}}{\iff} \begin{cases} & b & +c & = -2^n + n + 2 \\ & b & & = -2 \times 2^n + 3n + 2 \\ a & & & = 2^n - n - 1 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \begin{cases} c & = 2^n - 2n \\ b & = -2 \times 2^n + 3n + 2 \\ a & = 2^n - n - 1 \end{cases}$$

On a donc

$$R_n = (2^n - n - 1)X^2 + (-2^{n+1} + 3n + 2)X + 2^n - 2n.$$

□

Partie II – Application aux matrices

4. Montrer que $U(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

 Solution : On trouve rapidement $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ puis

 $A^3 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -7 & 7 & 1. \end{pmatrix}$

 Il ne reste plus qu'à calculer

$$U(A) = A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

 □

5. En utilisant la décomposition $X^n = UQ_n + R_n$, montrer que

$$A^n = R_n(A)$$

 pour tout $n \geqslant 1$, puis en déduire une expression explicite de A^n.

 Solution : En utilisant la décomposition précédente, on a $A^n = U(A)Q_n(A) + R_n(A)$ mais comme $U(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = R_n(A).$$

 En utilisant les valeurs obtenues précédemment, on a

$$R_n(A) = (2^n - n - 1)A^2 + (-2^{n+1} + 3n + 2)A + (2^n - 2n)I_3.$$

 Autrement dit

$$A^n = (2^n - n - 1)\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} + (-2^{n+1} + 3n + 2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + (2^n - 2n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

 Ce qui s'écrit

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^n + n + 1 & -n \\ -n & n+1 & -n \\ -2^n + 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

 □

Partie III – Une autre méthode de calcul

On propose maintenant une méthode indépendante pour calculer les puissances de A.

6. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

 Solution : Considérons le système homogène associé $(A - \lambda I_3)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\iff \left\{ \begin{array}{cccl} (1-\lambda)x & & -z & = 0 \\ -x & +(2-\lambda)y & -z & = 0 \\ -x & +y & +(1-\lambda)z & = 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + (1-\lambda)L_1}}{\iff} \left\{ \begin{array}{cccl} (1-\lambda)x & & -z & = 0 \\ (-2+\lambda)x & +(2-\lambda)y & & = 0 \\ \lambda(-2+\lambda)x & +y & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\underset{L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_2}{\Longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{llll} (1-\lambda)x & & -z & = 0 \\ (-2+\lambda)x & +(2-\lambda)y & & = 0 \\ & +(1-2\lambda+\lambda)^2 y & & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} -z & +(1-\lambda)x & & = 0 \\ (-2+\lambda)x & +(2-\lambda)y & & = 0 \\ & & +(1-\lambda)^2 y & = 0 \end{array} \right.$$

Le système n'est pas de rang trois si et seulement si $\lambda = 2$ ou $\lambda = 1$.

On a donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = 2$.

Pour la première valeur propre, chercher le sous-espace propre revient à résoudre $(A - \lambda_1 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc le système que nous avons vu ci-dessus en prenant $\lambda = \lambda_1 = 1$.

C'est donc équivalent à

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} -z & & & = 0 \\ -x & +y & & = 0 \\ & & 0 & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} z & = 0 \\ x & = y \end{array} \right.$$

L'ensemble solution est donc $\left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} /y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ y \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} /y \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$. (Le choix vient juste de ma matrice P choisie aléatoirement lors de la conception du sujet et pour coller avec les résultats déjà écrits pour mes élèves.)

Pour la seconde valeur propre, chercher le sous-espace propre revient à résoudre $(A - \lambda_2 I_3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc le système que nous avons vu ci-dessus en prenant $\lambda = \lambda_2 = 2$.

C'est donc équivalent à

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{llll} -z & -x & & = 0 \\ & & 0 & = 0 \\ & & -y & = 0 \end{array} \right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} x & = -z \\ y & = 0 \end{array} \right.$$

L'ensemble solution est donc $\left\{ \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} /z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} /z \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

□

7. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?

   Solution : Non. La somme des dimensions des sous-espaces propres fait 2 (ils sont très clairement de dimension 1). □

8. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice T.

   Solution : En prenant comme premier vecteur d'une nouvelle base $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, la première colonne de T est bonne.

   En prenant comme troisième vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, c'est la troisième colonne de T qui est bonne.

Il reste à trouver un vecteur $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tel que $AX = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + X$.

On trouve par exemple $X = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Il reste à vérifier que ces trois vecteurs forment une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. $\square$

9. En déduire qu'il existe une matrice P que vous donnerez telle que $A = PTP^{-1}$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = PT^nP^{-1}.$$

Solution : On utilise $P = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ la matrice représentative de la base évoquée dans la question précédente, la formule de changement de base donne $A = PTP^{-1}$.

Pour la suite, soit on justifie joliment la chose avec des compositions et des formules de changement de base soit on fait une petite récurrence.

Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $A^n = PT^nP^{-1}$ ».

On a $A_0 = I_3$ et $PT^0P^{-1} = PI_3P^{-3} = PP^{-1} = I_3$.

La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ quelconque fixé tel que $\mathcal{P}(n)$ est vrai.

On a $A^{n+1} = A^nA$ Or d'après la question précédente donne $A = PTP^{-1}$ donc en utilisant $\mathcal{P}(n)$, on a
$$A^{n+1} = PT^nP^{-1}PTP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$. $\square$

10. Calculer P^{-1}.

Solution : Considérons le système associé $P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. Ce système est équivalent à

$$\left\{\begin{array}{llll} -x & +3y & -z & = a \\ -x & +3y & & = b \\ & y & +z & = c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{llllll} & & -z & = a & -b & \\ -x & +3y & & = & b & \\ & y & +z & = & & c \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_2 \leftarrow L_3 \leftarrow L_1}{\iff} \left\{\begin{array}{llllll} -x & +3y & & = & b & \\ & y & +z & = & & c \\ & & -z & = a & -b & \end{array}\right.$$

Le système est échelonné et ses coefficients diagonaux sont non nuls, donc P est inversible et on a

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \underset{L_2 \leftarrow L_2 + L_3}{\iff} \left\{\begin{array}{llllll} -x & +3y & & = & b & \\ & y & & = a & -b & +c \\ & & -z & = a & -b & \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{llllll} -x & & & = -3a & 4b & -3c \\ & y & & = a & -b & +c \\ & & -z & = a & -b & \end{array}\right.$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \left\{\begin{array}{llll} x & = 3a & -4b & +3c \\ y & = a & -b & +c \\ z & = -a & +b & \end{array}\right.$$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Ainsi, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. □

11. En utilisant la formule du binôme, calculer T^n.

Solution : Avec les matrices introduites en première question, on a $T = D + N$.

Par ailleurs, on a $DN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$.

De même, on a $ND = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N$.

On peut donc utiliser la formule du binôme.

Ainsi, on a

$$T^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k}.$$

Or $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

On a donc $T^n = D^n + nND^{n-1} + \sum_{k=2}^{n} 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

Ainsi, $T^n = D^n + nND^{n-1}$.

Cependant, on a pu remarquer que $ND = N$, donc $ND^{n-1} = N$ (si on ne le remarque pas, ça se calcule sans difficulté).

Ainsi, on a $T^n = D^n + nN = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a donc, $\forall n \in \mathbb{N}$, $T^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$. (En toute rigueur, ça n'a pas été démontré pour $n = 0$, mais l'égalité reste vraie.) □

12. En déduire à nouveau l'expression de A^n et comparer avec celle obtenue dans la partie précédente.

Solution : Comme, $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^n = PT^nP^{-1}$, il suffit de calculer PT^n, ce qui donne

$$PT^n = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -n+3 & -2^n \\ -1 & -n+3 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Enfin, on a

$$A^n = (PT^n)P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -n+3 & -2^n \\ -1 & -n+3 & 0 \\ 0 & 1 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^n + n + 1 & -n \\ -n & n+1 & -n \\ -2^n + 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour ceux qui font les calculs en commençant par la droite, on a du trouver

$$T^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n+3 & -n-4 & n+3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix},$$

puis

$$A^n = P(T^nP^{-1}) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n+3 & -n-4 & n+3 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2^n & 2^n & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - n & -2^n + n + 1 & -n \\ -n & n+1 & -n \\ -2^n + 1 & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

□