Devoir Surveillé n°3

BCPST 1... ah non plutôt BCPST 2

31 janvier 2026

Merci de prendre connaissance de cet extrait de la notice du concours :

Les effaceurs correcteurs liquides (ou les rollers correcteurs) sont à éviter car ils peuvent laisser des résidus sur les vitres du scanner lors de la numérisation des copies.
Les surligneurs sont à éviter.
La rédaction se fera uniquement à l'encre bleue ou noire et l'utilisation du blanc correcteur est interdite. Les découpages et collages sur la copie sont interdits.

Le reste...
L'usage d'abaques, de tables, de calculatrice et de tout instrument électronique susceptible de permettre au candidat d'accéder à des données et de les traiter par les moyens autres que ceux fournis dans le sujet est interdit.
Ce sujet comporte 3 pages numérotées de 1 à 3.
Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.
Aucune réponse sur le sujet ne sera acceptée. L'énoncé n'est pas ramassé.
Les réponses devront être justifiées. Les résultats devront être simplifiés au mieux de vos possibilités.

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par son premier terme $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n - \arctan(u_n)$.
On définira par ailleurs la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \arctan x. \end{array}$

1. Montrer que, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) \geqslant 0$ et en déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite que l'on notera ℓ.
4. Montrer que, $\forall x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}x$.
5. En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \dfrac{1}{2^n}$.
6. Soit $\varepsilon \in]0,1[$. Déterminer un entier $n_0 \in \mathbb{N}$, tel que, $\forall n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$.

Exercice 2. On considère le polynôme

$$U(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2.$$

On considère également les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Et dans le tout le problème, pour un polynôme

$$V(X) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k X^k$$

et une matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose

$$V(M) = \sum_{k=0}^{m} \alpha_k M^k.$$

Par exemple, si $V(X) = 2 - 3X + X^2$, alors $V(M) = 2I_3 - 3M + M^2$.
L'objectif de cet exercice est de construire une décomposition des polynômes par rapport à U, puis d'utiliser cette décomposition pour calculer les puissances de la matrice A.
La partie III est indépendante des parties I et II. En admettant le résultat final de la partie I, il est tout à fait possible de traiter la partie II intégralement.

Partie I – Décomposition des polynômes

1. Soit $T \in \mathbb{R}[X]$. On cherche à montrer qu'il existe un *unique* couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que
$$T = UQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) \leqslant 2.$$
   a. Montrer que si $\deg(T) = 0$, on peut choisir $Q = 0_{\mathbb{R}[X]}$ et préciser alors R.
   b. De la même façon, donner les valeurs de Q et de R si $\deg(T) = 1$ ou $\deg(T) = 2$.
   c. Soit $n \geqslant 3$ et soit T un polynôme de degré $n+1$. En écrivant $T = aX^{n+1} + T_1$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $\deg(T_1) \leqslant n$, montrer que le polynôme
$$T - aX^{n-2}U$$
   est de degré inférieur ou égal à n.
   d. En raisonnant par récurrence forte sur le degré de T, montrer qu'il existe des polynômes Q et R tels que
$$T = UQ + R \qquad \text{avec} \qquad \deg(R) \leqslant 2.$$
   e. Supposons que l'on ait deux décompositions (Q_1, R_1) et (Q_2, R_2) telles que
$$T = UQ_1 + R_1 = UQ_2 + R_2 \qquad \text{avec} \qquad \deg(R_1) \leqslant 2 \text{ et } \deg(R_2) \leqslant 2.$$
   Montrer que $Q_1 = Q_2$ et $R_1 = R_2$.

2. Factoriser le polynôme U sur $\mathbb{R}$. Préciser ses racines et leur multiplicité.

3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note (Q_n, R_n) l'unique couple de polynômes avec R_n de degré inférieur ou égal à 2 dont on justifiera l'existence tel que
$$X^n = UQ_n + R_n.$$
   a. Montrer que $R_n(1) = 1$, $R_n(2) = 2^n$ et $R_n'(1) = n$.
   b. En écrivant $R_n = aX^2 + bX + c$, où a, b et c sont trois réels, établir un système d'équations vérifié par a, b et c.
   c. En déduire que l'expression explicite de R_n est
$$R_n = (2^n - n - 1)X^2 + (-2^{n+1} + 3n + 2)X + 2^n - 2n.$$

Partie II – Application aux matrices

4. Montrer que $U(A) = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

5. En utilisant la décomposition $X^n = UQ_n + R_n$, montrer que
$$A^n = R_n(A)$$
   pour tout $n \geqslant 1$, puis en déduire une expression explicite de A^n.

Partie III – Une autre méthode de calcul
On propose maintenant une méthode indépendante pour calculer les puissances de A.

6. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
7. Est-ce que la matrice A est diagonalisable ?
8. Montrer que la matrice A est semblable à la matrice T.
9. En déduire qu'il existe une matrice P que vous donnerez telle que $A = PTP^{-1}$ et montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$A^n = PT^nP^{-1}.$$
10. Calculer P^{-1}.
11. En utilisant la formule du binôme, calculer T^n.
12. En déduire à nouveau l'expression de A^n et comparer avec celle obtenue dans la partie précédente.