Analyse numérique

Recherche de zéro - Calcul d'intégrales

1 Méthodes mathématiques de recherche de zéro de fonction

1.1 La méthode de la dichotomie

On se place dans la situation où on dispose des données suivantes :

— Une fonction f continue et un intervalle sur lequel elle s'annule une fois.

— Une précision souhaitée pour la valeur approchée de la solution.

On construit une suite d'intervalles emboîtés, dont la longueur tend vers 0, et contenant chacun une solution de l'équation f (x) = 0. On part d'une fonction f : $[a, b] \to \mathbb{R}$ continue, avec a < b, et $f(a).f(b) \leq 0$. On construit une suite d'intervalles emboîtés, dont la longueur tend vers 0, et contenant chacun une solution de l'équation f (x) = 0.

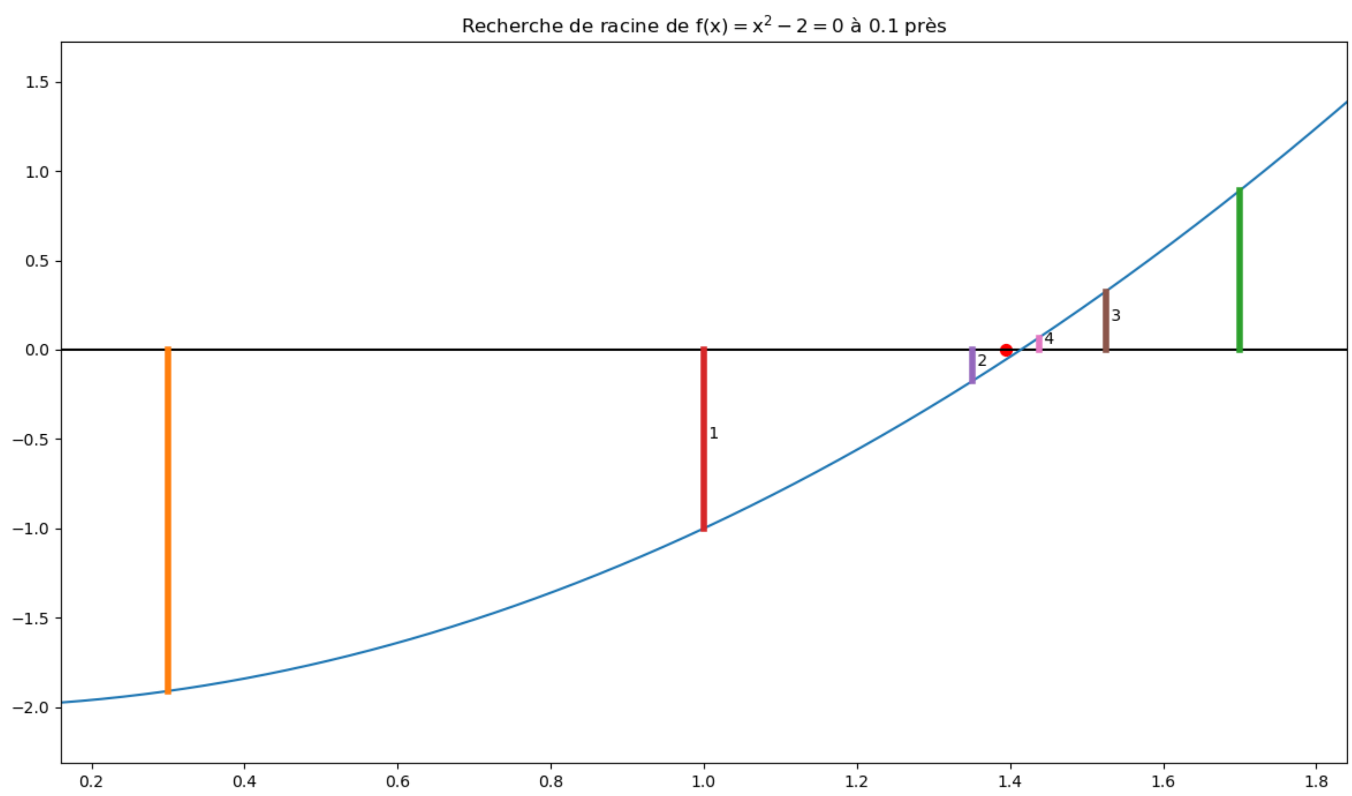
— Si $f(a).f(\dfrac{a+b}{2}) \leq 0$ alors il existe c ∈ $[a,\dfrac{a+b}{2}]$ tel que f(c) = 0

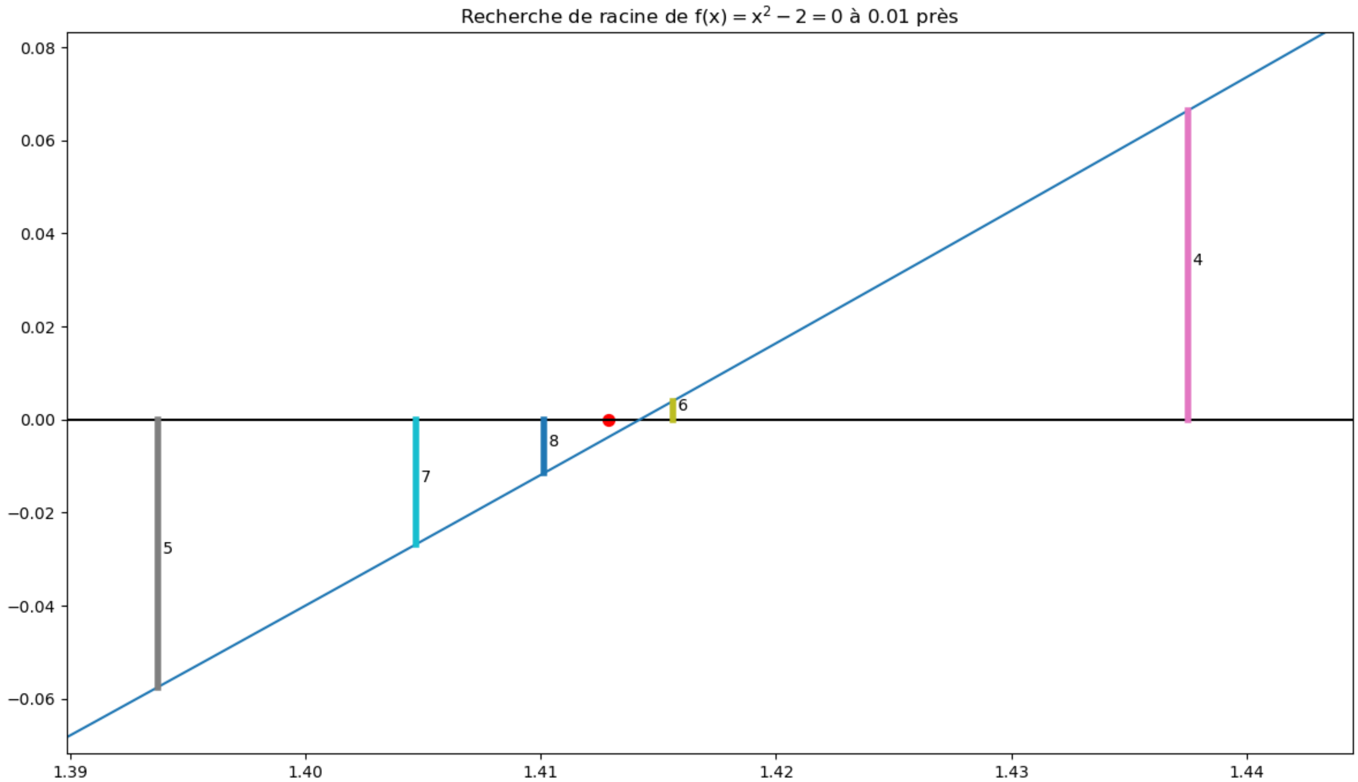
— Si $f(a).f(\dfrac{a+b}{2}) > 0$ alors on a $f(\dfrac{a+b}{2}).f(b) \leq 0$, et donc il existe c ∈ $[\dfrac{a+b}{2},b]$ tel que f(c) = 0

On a obtenu un intervalle de longueur moitié dans lequel l'équation f (x) = 0 admet une solution. On itère alors le procédé pour diviser de nouveau l'intervalle en deux, jusqu'à ce que la longueur de l'intervalle soit inférieure ou égale à la précision.

L'algorithme associé a déjà été développé.

J'illustre ci-dessous la recherche de la racine de $f(x) = x^2 - 2 = 0$ sur l'intervalle [0.3 , 1.7], avec une précision de 0.1, puis de 0.01. Le point symbolise la valeur de la racine retournée par l'algorithme. Les nombres à côté des barres verticales symbolisent le nombre d'itérations effectuées jusqu'à présent dans l'algorithme.





1.2 La méthode de Newton

1.2.1 Principe de la méthode

Le principe de la méthode de Newton est le suivant : sous des hypothèses plus ou moins fortes sur la fonction f (à voir plus tard), on part d'un point x_0, et on construit une suite récurrente convergeant vers la solution de l'équation en prenant pour x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe de f en son point d'abscisse x_n. La tangente étant « proche » de la courbe, il parait raisonnable d'imaginer que ce point sera relativement proche du point d'intersection de la courbe elle-même avec l'axe des abscisses.

On suppose dans cette partie que $f(a).f(b) \leq 0$, que f est de classe C^1 et que f' ne s'annule pas. Sous ces hypothèses, l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in [a, b]$ admet une unique solution ℓ.

On construit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décrite précédemment de la manière suivante :

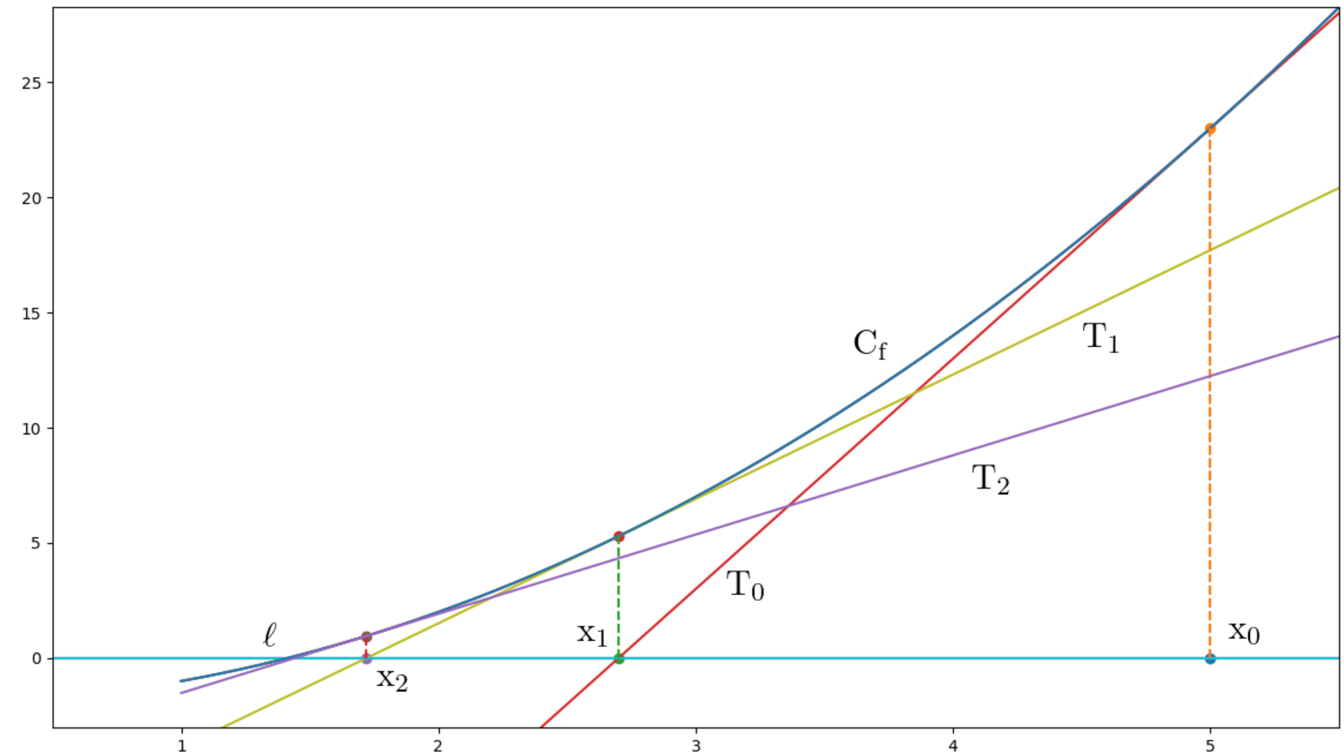
- On choisit $x_0 \in [a, b]$ (en pratique, on essaye de choisir x_0 « proche » de ℓ).
- Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose x_{n+1} l'abscisse du point d'intersection de l'axe (Ox) avec la tangente T_n à la courbe représentant f (C_f) au point d'abscisse x_n.
- On itère cette construction jusqu'à ce qu'un critère de précision soit vérifié : il faut que l'écart entre deux éléments successifs de la suite soit inférieure à une certaine précision, choisie arbitrairement.

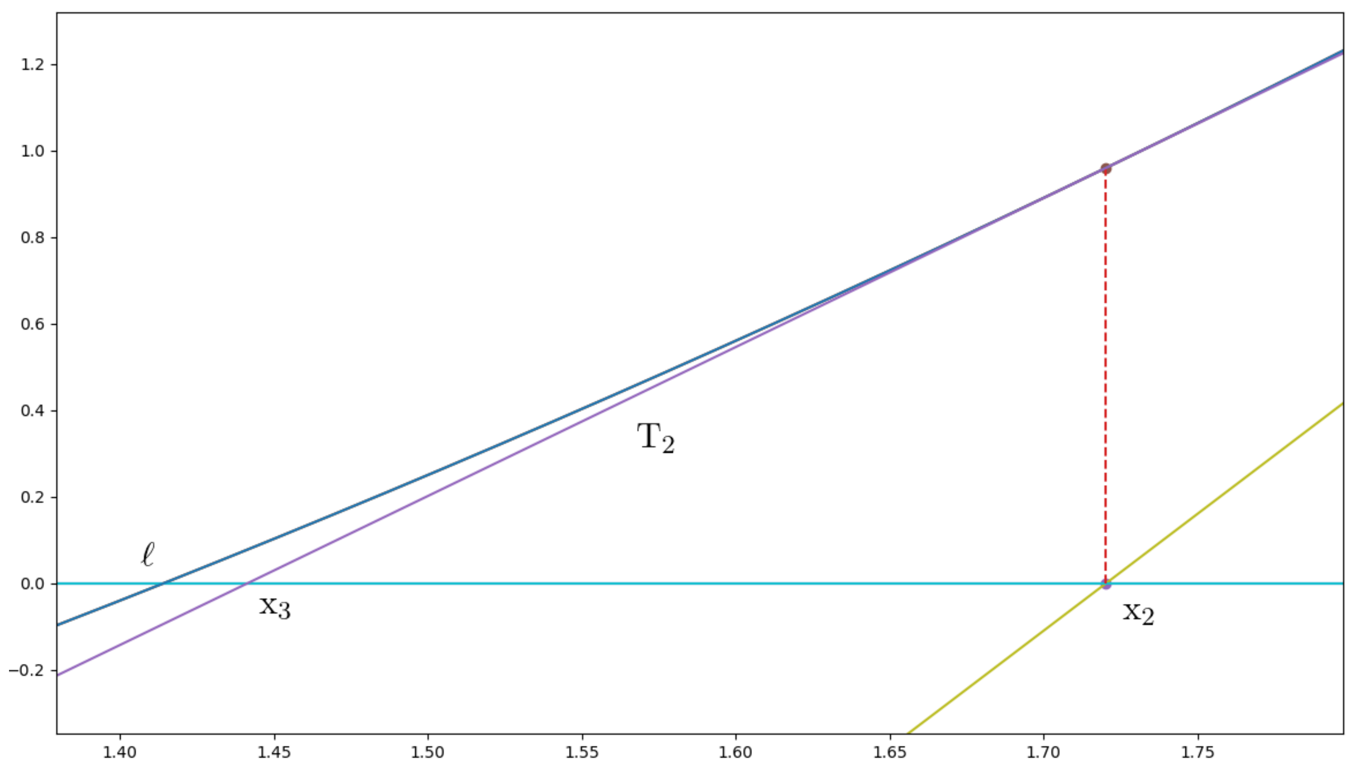
On peut démontrer facilement que l'on a $\boxed{x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}}$. Pour ce faire, il suffit de trouver l'équation de la droite tangente à C_f en x_n, et d'écrire que x_{n+1} correspond à l'abscisse telle que cette tangente croise l'axe des abscisses.

Preuve : l'équation de la tangente à la courbe C_f, soit $y = g(x)$, vérifie $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n) - y}{x_n - x}$. En écrivant que $0 = g(x_{n+1})$, on a $f'(x_n) = \dfrac{f(x_n)}{x_n - x_{n+1}}$.

On en déduit immédiatement que $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Cette suite est illustrée ci-dessous, dans le cas de la recherche de la racine de $f(x) = x^2 - 2 = 0$ sur l'intervalle [1. , 5.], avec $x_0 = 5.$. Dans cette illustration, l'arrêt est décidé arbitrairement, pour des raisons de lisibilité. La notion de précision sera par contre fondamentale dans la programmation, car elle définira la condition d'arrêt du processus itératif.





On remarque la convergence rapide de la suite (x_n) vers ℓ.

1.2.2 Calcul numérique de la dérivée d'une fonction

La méthode de Newton nécessite la connaissance de la dérivée de la fonction f(x). Cette dérivée peut très souvent être calculée explicitement. Cependant, le calcul peut être vite fastidieux. On se propose alors de trouver une méthode numérique permettant d'estimer au mieux une valeur numérique aproximée de f'(x). Pour cela, on utilise la formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

On écrit le développement limité en 0 à l'ordre 2 de la fonction r : $h \to f(x+h)$ en fonction de f :

$$f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1!}f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x) + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$$

$$f(x-h) = f(x) - \frac{h}{1!}f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{2!}f^{(2)}(x) + \underset{h\to 0}{o}(h^2)$$

On a alors :

$$\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \underset{h\to 0}{O}(h^2) \text{ ou } \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f^{(1)}(x) + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Donc, $\boxed{\text{à l'ordre 1, on assimile f'(x) et } \frac{\mathrm{f(x+h)-f(x-h)}}{\mathrm{2h}} \text{ lorsque h tend vers 0}}$.

1.2.3 Implémentation informatique de la méthode de Newton

Vous allez écrire les fonctions nécessaires à l'utilisation de la méthode de Newton, dans le cas de la recherche de la racine positive de $\mathrm{f(x) = x^2 - 2 = 0}$.

Activité 1 **Ecriture d'une fonction**

nom : `f`

arguments : x (float)

effet : renvoie la valeur numérique de $\mathrm{x^2 - 2}$

Activité 2 **Ecriture d'une fonction**

nom : `derivee`

arguments : f,x,dx (fonction, float, float)

effet : renvoie une estimation numérique de f'(x). Le paramètre dx correspond au terme h dans le développement mathématique.

Activité 3 **Ecriture d'une fonction**

nom : `Newton`

arguments : x,f,dx,precision (float, fonction, float, float)

effet : renvoie la valeur numérique de la racine de la fonction f par la méthode de Newton, en partant de la valeur de x, avec une certaine précision. Le paramètre dx correspond au terme h dans le développement mathématique pour le calcul numérique de la dérivée de f.

Testez votre algorithme, en partant de x = 5, avec une précision de 10^{-4} et un paramètre h valant 10^{-6}. Vous pouvez faire varier ces paramètres, et voir leur influence. Vous pouvez aussi illustrer, si vous avez le temps, le nombre d'itérations nécessaires à la convergence de la méthode.

2 Calcul d'intégrales

2.1 But - Méthodologie générale

Le but de ce chapitre est d'étudier quelques algorithmes permettant un calcul approché efficace d'intégrales. Ce chapitre est le premier chapitre d'une série de chapitres d'analyse numérique, dont le but est d'obtenir des méthodes approchées pour la résolution de certains problèmes mathématiques. L'intérêt en est que d'une part, les solutions exactes ne sont pas toujours faciles à obtenir mathématiquement, voire impossibles, et que d'autre part, dans de nombreuses disciplines scientifiques (physique, ingéniérie...), une bonne valeur approchée de la solution est souvent largement suffisante. Évidemment, pour des études de ce type, il est important de savoir évaluer le temps de calcul d'une part, combiné d'autre part à la précision du résultat. Ce n'est que cette maîtrise de la précision du résultat qui rend la méthode valide.

Le principe général du calcul des intégrales est simple : l'idée est d'approcher la surface sous la courbe d'une fonction f(x) par une somme de surfaces élémentaires dont l'aire est facile à calculer, par exemple des rectangles, ou des trapèzes. Ainsi :

- À partir de l'intervalle d'intégration [a, b], on crée une **liste de n points** $(\mathrm{x_i})_{\mathrm{i=0...n-1}}$, qui ne sont pas nécessairement régulièrement espacés. On a donc généré **(n-1) intervalles** sur l'intervalle d'intégration.
- on approche l'intégrale entre $\mathrm{x_i}$ et $\mathrm{x_{i+1}}$ (c'est-à-dire la surface sous la portion de courbe entre ces deux valeurs) par une aire facile à calculer, notée $\mathrm{S_i}$.
- On recolle les morceaux par sommation, en utilisant de façon sous-jacente la relation de Chasles.
- Lorsque le pas de la subdivision tend vers 0 (ou le nombre de points élevé), l'approximation devient bonne.

Point fondamental : f est une fonction qui peut être **connue de manière explicite, ou pas** :

- ◇ Si f est connue de manière analytique, alors les termes $f(x_i)$ sont calculables. En faisant tendre $x_{i+1} - x_i$ vers 0, alors on peut estimer l'intégrale de manière suffisamment précise.
- ◇ Si f n'est pas connue explicitement, cela signifie que les $f(x_i)$ sont, pour nous, connus par l'expérience. Alors, la bonne estimation de l'intégrale est liée au bon échantillonnage des mesures effectuées.

Dans tous les cas, on a par sommation sur les n-1 intervalles, et en notant I l'approximation de l'intégrale :

$$\boxed{\mathrm{I} = \int_{\mathrm{a}}^{\mathrm{b}} \mathrm{f(x)dx} \approx \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-2}} \mathrm{S_i}}$$

2.2 Méthode des rectangles

L'idée est de fabriquer des surfaces élémentaires qui sont des **rectangles** qui doivent permettre d'approximer au mieux, par leur somme, l'aire sous la courbe de f(x). Il existe une multitude (même une infinité) de découpage. Je présente les trois classiques, qui donnent leur nom à la méthode numérique associée.

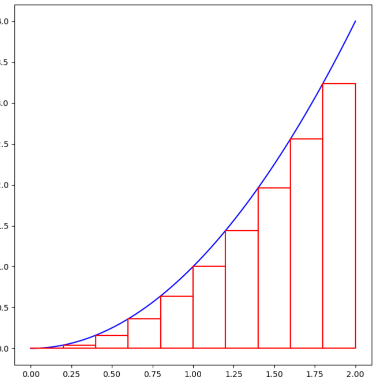
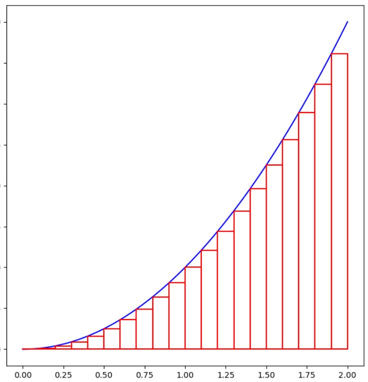
2.2.1 Méthode des rectangles à gauche

On définit le rectangle par une base de longueur $\mathrm{x_{i+1} - x_i}$, et de hauteur $\mathrm{f(x_i)}$, pour $\mathrm{i} \in [[0, \mathrm{n} - 2]]$ (il y a bien (n-1) intervalles).

On a donc :

$$\boxed{\mathrm{I} \approx \sum_{\mathrm{i=0}}^{\mathrm{n-2}} [\mathrm{x_{i+1} - x_i}].\mathrm{f(x_i)}}$$

Je représente ci-dessous ce découpage pour la fonction $\mathrm{f(x) = x^2}$ pour n = 11 points équirépartis sur [0,2] (on a bien 10 intervalles). Je fais de même avec 21 points équirépartis.

Il apparaît deux constatations évidentes :

— La somme des aires donnera une meilleure approximation de l'intégrale de la fonction avec un plus grand nombre de points.

— Dans le cas de cette fonction positive et strictement croissante, l'intégrale est systématiquement estimée inférieure à la valeur exacte.

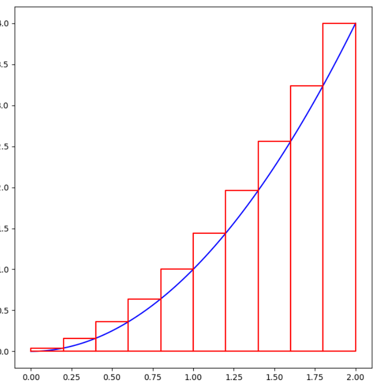
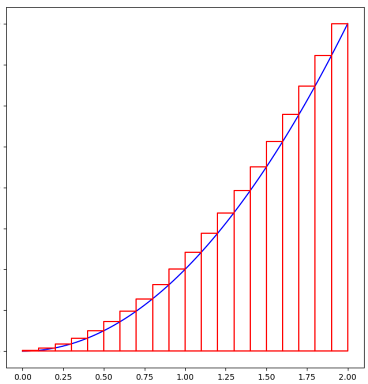
2.2.2 Méthode des rectangles à droite

On définit le rectangle par une base de longueur $x_{i+1} - x_i$, et de hauteur $f(x_{i+1})$, pour $i \in [[0, n-2]]$ (il y a bien (n-1) intervalles).

On a donc :

$$\boxed{I \approx \sum_{i=0}^{n-2} [x_{i+1} - x_i].f(x_{i+1})}$$

Je représente ci-dessous ce découpage pour la fonction $f(x) = x^2$ pour $n = 11$ points équirépartis sur [0,2] (on a bien 10 intervalles). Je fais de même avec 21 points équirépartis.

Il apparaît deux constatations évidentes :

— La somme des aires donnera une meilleure approximation de l'intégrale de la fonction avec un plus grand nombre de points.

— Dans le cas de cette fonction positive et strictement croissante, l'intégrale est systématiquement estimée supérieure à la valeur exacte.

2.2.3 Méthode du point médian

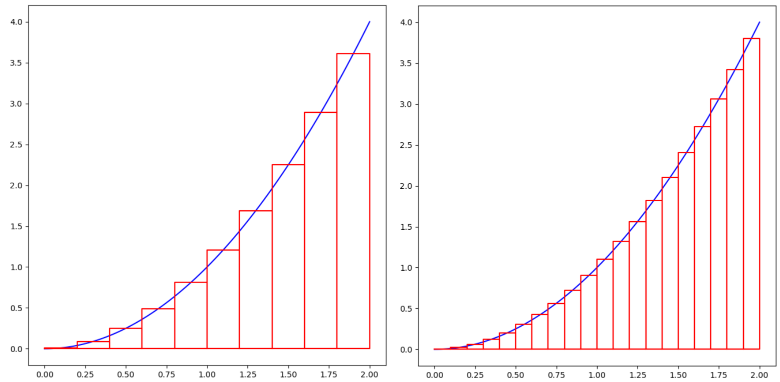
L'idée évidente pour palier aux défauts des deux méthodes précédentes est de ne plus prendre $f(x_i)$ ou $f(x_{i+1})$ pour hauteur du rectangle, mais $f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$. Ainsi, on espère avoir une meilleure approximation numérique de la valeur de I (on peut démontrer que c'est effectivement le cas). Cette méthode fait cependant partie de la famille de la méthode des rectangles, par construction même.

On définit le rectangle par une base de longueur $x_{i+1} - x_i$, et de hauteur $f\left(\dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)$, pour $i \in [[0, n-2]]$ (il y a bien (n-1) intervalles).

On a donc :

$$\boxed{I \approx \sum_{i=0}^{n-2}[x_{i+1} - x_i].f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right)}$$

Je représente ci-dessous ce découpage pour la fonction $f(x) = x^2$ pour $n = 11$ points équirépartis sur [0,2] (on a bien 10 intervalles). Je fais de même avec 21 points équirépartis.



Il apparaît deux constatations évidentes :

— La somme des aires donnera une meilleure approximation de l'intégrale de la fonction avec un plus grand nombre de points.

— L'intégrale est mieux estimée que par la méthode des rectangles à gauche ou à droite.

2.3 Méthode des trapèzes

L'idée est de fabriquer des surfaces élémentaires qui sont des **trapèzes** qui doivent permettre d'approximer au mieux, par leur somme, l'aire sous la courbe de f(x).

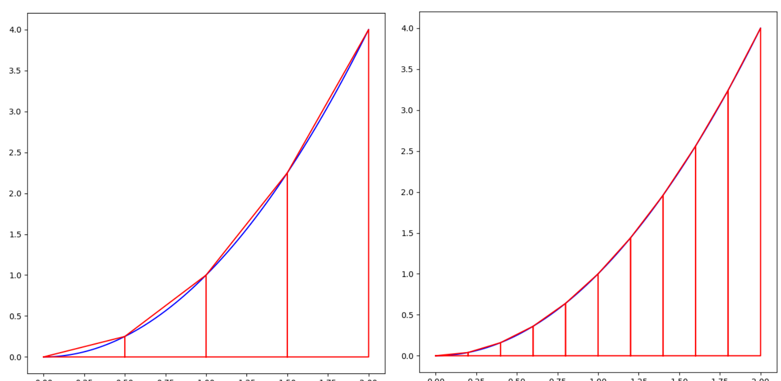
Le principe général est exactement le même que celui de la méthode des rectangles, mais on approche cette fois-ci la courbe sur le segment $[x_i, x_{i+1}]$ par le segment de droite reliant les deux points de la courbe d'abscisses x_i et x_{i+1}, ce qui revient bien à calculer une somme d'aires de trapèzes pour approcher l'intégrale.

On démonter aisément que l'aire d'un tel trapèze s'exprime par $S_i = [x_{i+1} - x_i].\left(\dfrac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right)$.

On a donc :

$$\boxed{I \approx \sum_{i=0}^{n-2}[x_{i+1} - x_i].\left(\frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2}\right)}$$

Pour plus de lisibilité, je modifie les paramètres numériques utilisés pour la méthode des rectangles. Je représente ci-dessous ce découpage pour la fonction $f(x) = x^2$ pour $n = 5$ points équirépartis sur [0,2] (on a bien 4 intervalles). Je fais de même avec 11 points équirépartis.



Il apparaît deux constatations évidentes :

— La somme des aires donnera une meilleure approximation de l'intégrale de la fonction avec un plus grand nombre de points.

— À nombre de points égal, l'intégrale est mieux estimée par la méthode des trapèzes que par la méthode des rectangles à gauche ou à droite, ou la méthode du point médian (car la fonction est mieux approximée sur chaque intervalle).

2.4 Implémentation informatique des méthodes

Le but de cette section est de coder les différentes méthodes d'intégration abordées précédemment, et de vérifier par l'exemple les constatations énoncées en fin de chaque section.

Activité 4 **Ecriture d'une fonction**

nom : `rectangle_gauche`

arguments : f,a,b,n (fonction, float, float, int)

effet : renvoie la valeur numérique de l'intégration de la fonction f par la méthode des rectangles à gauche entre a et b, avec l'intervalle [a,b] découpé en n points.

Coder la fonction ci-dessus, et illustrer les constatations énoncées à la fin de la section **2.2.1** à la page 6.

Activité 5 **Ecriture d'une fonction**

nom : `rectangle_droite`

arguments : f,a,b,n (fonction, float, float, int)

effet : renvoie la valeur numérique de l'intégration de la fonction f par la méthode des rectangles à droite entre a et b, avec l'intervalle [a,b] découpé en n points.

Coder la fonction ci-dessus, et illustrer les constatations énoncées à la fin de la section **2.2.2** à la page 6.

Activité 6 **Ecriture d'une fonction**

nom : `rectangle_milieu`

arguments : f,a,b,n (fonction, float, float, int)

effet : renvoie la valeur numérique de l'intégration de la fonction f par la méthode du point médian entre a et b, avec l'intervalle [a,b] découpé en n points.

Coder la fonction ci-dessus, et illustrer les constatations énoncées à la fin de la section **2.2.3** à la page 7.

Activité 7 **Ecriture d'une fonction**

nom : `trapeze`

arguments : f,a,b,n (fonction, float, float, int)

effet : renvoie la valeur numérique de l'intégration de la fonction f par la méthode des trapèzes entre a et b, avec l'intervalle [a,b] découpé en n points.

Coder la fonction ci-dessus, et illustrer les constatations énoncées à la fin de la section **2.3** à la page 8.