Chapitre 1 : Logique et raisonnements

Table des matières

1 Rudiments de logiques

1.1 Assertions mathématiques

Définition 1.

On appelle assertion mathématique un énoncé portant sur les propriétés de certains objets mathématiques.
Elle peut être vraie ou fausse.

Exemple 2 :

- Le nombre 3 est pair.
- le nombre π est un irrationnel.
- il existe un nombre réel x tel que $x^2 = -1$.

Définition 3.

On appelle conjecture une assertion mathématique dont on soupçonne la véracité mais qui n'a pas été démontrée.

1.2 Connecteurs logiques

Définition 4.

Soit A une assertion mathématique.
La négation de A, notée NON A, est l'assertion qui prend toujours la valeur contraire à celle de A.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	NON A
V	
F	

Exemple 5 :

1. La négation de **tous les frères de Paul sont blonds** est

   ....

2. La négation de **chaque élève a au moins lu un des livres au programme** est

   ....

Théorème 6.

Soit A une assertion mathématique.

$$\text{NON}(\text{NON}A) = A$$

Définition 7.

Soient A et B deux assertions mathématiques.
L'assertion A ET B est vraie seulement lorsque A et B sont vraies.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	A ET B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Définition 8.

Soient A et B deux assertions.
L'assertion A OU B est vraie dès que A ou B est vraie.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	A OU B
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemple 9 : Pour A= « 3 est pair » et B= « 6 est pair » , la proposition A OU B est vraie.

Théorème 10.

Soient A et B deux assertions mathématiques. On a les liens logiques suivants :

1. A ET $A = A$
2. A ET $B = B$ ET A — *Commutativité de et*
3. A OU $A = A$
4. A OU $B = B$ OU A — *Commutativité de ou*
5. A ET (NON A) est toujours fausse.
6. A OU (NON A) est toujours vraie.
7. NON (A ET B) = (NON A) OU (NON B). — *Négation de ET*
8. NON (A OU B) = (NON A) ET (NON B). — *Négation de OU*

Exemple 11 : La négation de la proposition **Sophie a 3 frères et 2 sœurs** est
....
....

Théorème 12.

Soient A,B et C trois assertions mathématiques. On a les liens logiques suivants :

1. A OU (B OU C)=(A OU B) OU C = A OU B OU C — *Associativité de OU*
2. A ET (B ET C)=(A ET B) ET C = A ET B ET C — *Associativité de ET*
3. A OU (B ET C)=(A OU B) ET (A OU C) — *Distributivité de OU sur ET*
4. A ET (B OU C)=(A ET B) OU (A ET C) — *Distributivité de ET sur OU*

1.3 Implications et équivalences

Définition 13.

Soient A et B deux assertions mathématiques.
L'assertion A implique B, notée $A \Rightarrow B$, n'est fausse que si A est vraie et B est fausse.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant.

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemple 14 : Avec $A(x)$: « x est un multiple de 6 » et $B(x)$: « x est un multiple de 2 », la proposition $A(x) \Rightarrow B(x)$ est vraie tandis que la proposition $B(x) \Rightarrow A(x)$ est fausse.

Définition 15.

Soient A et B deux propositions.
La réciproque de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication $B \Rightarrow A$.

Exemple 16 : La réciproque de « Si n est un multiple de 6 alors n est un multiple de 2 » est « Si n est un multiple de 2 alors n est un multiple de 6 ».

Définition 17.

Soient A et B deux assertions.
La contraposée de l'implication $A \Rightarrow B$ est l'implication NON $B \Rightarrow$ NON A.

Exemple 18 : La contraposée de « Si n est un multiple de 6 alors n est un multiple de 2 » est la proposition « Si n n'est pas un multiple de 2 alors n n'est pas un multiple de 6 ».

Théorème 19.

Soient A et B deux assertions.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa réciproque $B \Rightarrow A$ ne sont pas toujours vraies en même temps.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa contraposée NON$B \Rightarrow$ NON A sont toujours vraies en même temps.

Définition 20.

Soient A et B deux assertions mathématiques.
La proposition A est équivalente à B, notée $A \Leftrightarrow B$, est la proposition définie par $(A \Rightarrow B)$ ET $(B \Rightarrow A)$.
La table de vérité est donnée par le tableau suivant

A	B	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow A$	$A \Leftrightarrow B$
V	V			
V	F			
F	V			
F	F			

Exemple 21 : Pour trois réels positifs a, b et c, un triangle de côtés de longueur a, b et c est rectangle si, et seulement si, $a^2 + b^2 = c^2$.

2 Quantificateurs

2.1 Définitions

Définition 22.

Le quantificateur $\underline{\in}$ traduit l'appartenance à un ensemble.
Le quantificateur $\underline{\notin}$ traduit la non appartenance à un ensemble.

Définition 23.

Le quantificateur universel $\underline{\forall}$ se lit quel que soit ou pour tout.

Exemple 24 : Tous les carrés de nombres réels sont négatifs se traduit par

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 \leq 0.$$

Remarque 25 : Pour démontrer une propriété de la forme $\forall x \in E, \ A(x)$, on doit montrer que pour toute valeur de x, la propriété $A(x)$ est vraie.
On commencera souvent par *Soit* $x \in E$.

Définition 26.

Le quantificateur existentiel $\underline{\exists}$ se lit il existe.
Il signifie il existe au moins un élément tel que ...

Exemple 27 : Il existe un réel dont le carré vaut $\sqrt{2}$ se traduit par

$$\exists \, x \in \mathbb{R} \ , \ x^2 = \sqrt{2}.$$

Remarque 28 : Pour démontrer une propriété de la forme $\exists x \in E, \ A(x)$, on doit justifier l'existence d'un tel élément, en un proposant un par exemple.

Exemple 29 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Comment traduire n **est impair** ?
....

Définition 30.

Le quantificateur $\underline{\exists!}$ se lit il existe un unique.
Il signifie il existe exactement un élément tel que ...

Exemple 31 : Il existe un unique réel dont le double vaut la moitié se traduit par

$$\exists! \ x \in \mathbb{R} \ , \ 2x = \frac{x}{2}.$$

Remarque 32 : Pour démontrer une propriété de la forme $\exists! x \in E, \ A(x)$, on doit justifier l'existence d'un tel élément et son unicité.

Exemple 33 : Que pensez-vous des propositions suivantes ?

- $\forall \, x \in \mathbb{R}, \ \cos(x) = 0$
- $\exists \, x \in \mathbb{R}, \ \cos(x) = 0$
- $\exists! \ x \in \mathbb{R}, \ \cos(x) = 0$

2.2 Ordre des quantificateurs

Exemple 34 : Comment traduire **Tous les points de E ont un antécédent par f dans A** ?

....

Remarque 35 : L'ordre des quantificateurs est **très** important.

- Tous les ours ont un lit.
- C'est le même lit pour tous les ours.

Exemple 36 : Comparer les propositions suivantes.

- $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x^2 = y$
- $\exists y \in \mathbb{R},\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2 = y$

Théorème 37.

Lorsqu'on utilise plusieurs fois le même quantificateur, on peut inverser l'ordre.
Lorsqu'on utilise des quantificateurs différents, on ne peut pas inverser l'ordre.

Exemple 38 : On peut écrire « $\forall a \in A,\ \forall b \in B,\ \ldots$ » ou bien « $\forall b \in B,\ \forall a \in A,\ \ldots$ » ou encore « $\forall (a, b) \in A \times B,\ \ldots$ ».

2.3 Quantificateurs et opérations logiques

Théorème 39.

Soit $A(x)$ une proposition portant sur un réel x.

1. La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ A(x)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \text{NON } A(x)$ ».
2. La négation de « $\exists x \in \mathbb{R},\ A(x)$ » est « $\forall x \in \mathbb{R},\ \text{NON } A(x)$ ».

Théorème 40.

Soient $A(x, y)$ une proposition portant sur deux réels x et y.
La négation de « $\forall x \in \mathbb{R},\ \exists y \in \mathbb{R},\ A(x, y)$ » est « $\exists x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \text{NON } A(x, y)$ ».

3 Différents modes de raisonnement

3.1 Raisonnement par récurrence

Il s'agit d'un raisonnement qui convient pour démontrer que propositions de la forme suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ P(n).$$
$$\forall n \geq n_0,\ P(n).$$

Théorème 41.

Soit P une assertion définie sur $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ P(n_0)$ est vraie.
- $\forall\, n \geq n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Alors, la propriété P est vraie sur $\mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0,\ P(n)$.

Exemple 42 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exemple 43 : Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ 10^n - 1$ est un multiple de 9.

Remarque 44 : Il se peut que $P(n)$ ne suffise pas pour obtenir $P(n+1)$. On fait alors une récurrence forte.

Théorème 45.

Soient P une assertion définie sur $\mathbb{N}$. Si les deux conditions suivantes sont vérifiées

- $\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ sont vraies.
- $\forall\, n \geq n_0,\ P(n)$ ET $P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$

Alors, la propriété P est vraie sur tout $\mathbb{N}$: $\forall n \in \mathbb{N},\ P(n)$.

Exemple 46 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = u_1 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$
Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = 3^n - 2^{n+1}$.

3.2 Démontrer une implication

Methode 1.

Pour démontrer une implication de la forme $A \Rightarrow B$,

- On suppose que l'assertion A est vraie
- On montrer qu'elle implique A_1, qui implique A_2, ...
- on arrive à l'assertion B

Exemple 47 : Démontrer que Si 6 divise n alors n est pair.

Théorème 48.

Soient A et B deux assertions.
L'implication $A \Rightarrow B$ et sa contraposée NON$B \Rightarrow$ NONA sont équivalentes.

Exemple 49 : Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^2$ pair $\Rightarrow n$ pair .

3.3 Démontrer une équivalence

Methode 2.

Pour démontrer une équivalence $A \Leftrightarrow B$,

- on montre une double implication $A \Rightarrow B$ et $B \Rightarrow A$.
- on montrer que A est équivalente à A_1, qui est équivalente à A_2, ..., qui est équivalente à B.

Exemple 50 : Démontrer qu'un produit de deux entiers est impair si, et seulement si, les deux entiers sont impairs.

3.4 Trouver un contre-exemple

Lorsqu'on veut démontrer qu'une assertion de la forme "$\forall x \in E, \dots$" est fausse, on utilise un contre-exemple.

Exemple 51 : On s'intéresse à la proposition suivante :
Tout entier naturel non nul est la somme de trois carrés d'entiers naturels.

1. Traduire cet énoncé avec des quantificateurs.
2. Démontrer qu'il est faux.

3.5 Démonstration par l'absurde

On suppose qu'une certaine propriété est fausse et on arrive à une contradiction.
On en déduit que la proposition initiale est vraie.

Exemple 52 : Démontrer, par l'absurde, que 0 n'est pas d'inverse.