

Exercice 1: Traduire mathématiquement les phrases suivantes :

1. La fonction f est constante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.
3. Pour chaque entier, on peut trouver un entier plus grand.
4. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il suffit qu'il soit supérieur à 1.
5. Pour qu'un réel soit supérieur à 2, il faut qu'il soit supérieur à 1.
6. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier soit supérieur à 3 est qu'il soit strictement supérieur à 2.

Exercice 2: Ecrire les négations des propositions suivantes :

1. $\forall N \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N}, n \leq N$.
2. $\exists! x \in \mathbb{R}, x = x^2$.

Exercice 3: Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y^2 = 1$.

Exercice 4: Démontrer les deux résultats suivants :

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exists z \in \mathbb{R} / z > x + y$.
2. $\exists! x \in \mathbb{R}_+ / x^2 = 1$

Exercice 5: Démontrer les résultats suivants :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 6$ divise $5n^3 + n$.
2. Montrer que la propriété "8 divise $9^n + 1$ " est héréditaire.
Que peut-on en conclure ?

Exercice 6: Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

Exercice 7: Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels définie par

$$u_0 = 3, \quad u_1 = 7 \quad \forall n \geq 2, \quad u_n = 5u_{n-1} - 6u_{n-2}$$

Démontrer, à l'aide d'une **réurrence double**, que
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^{n+1} + 3^n$.

Exercice 8: **[**]** Démontrer qu'un entier ne peut pas être à la fois pair et impair.

Exercice 9: **[**]** Démontrer que l'ensemble des nombres premiers est infini.

Exercice 10: **[**]** Démontrer que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.

Exercice 11: **[**]** Existe-t-il un réel x tel que $x = \sqrt{x} + 6$?

Exercice 12: **[**]** Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 1, x \neq -2, \quad \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+2}$$