Exercice 1: Calculer les fractions suivantes

1. $\dfrac{-12}{5} \div \left(\dfrac{-6}{5}\right)$
2. $\dfrac{3^{21}+3^{22}}{3^{33}-3^{30}}$
3. $\dfrac{5!}{2!3!}$ où $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$.
4. $\dfrac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)}$
5. $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{1}{2^n} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$

Exercice 2: Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $(2x+1)^2 = (2x+1)(x-3)$
2. $36x^2 - 49 - (6x+7)(6x-1) = 0$
3. $(-9x-8)(8x+8) = 64x^2 - 64$
4. $4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10$
5. $\sin(x) > -\dfrac{1}{2}$
6. $\cos(x) > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 3: Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|x| = 2$
2. $|x+2| = 5$
3. $|3-x| = x+1$
4. $|x| \leq 3$
5. $|x-3| \leq 4$
6. $2 < |x+1| < 3$

Exercice 4: Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (1+a)^n \geq 1 + na$$

Exercice 5: Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Calculer, développer ou simplifier les expressions suivantes

1. $(a+2)^3$
2. $a^4 - 1$
3. $\sqrt{(-a)^2}$
4. $\sqrt{(3-a)^2}$

Exercice 6: [*] Soit $(a,b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$$

Exercice 7: *Introduction aux complexes*
Soit $\mathbf{i}$ tel que $\mathbf{i}^2 = -1$. Calculer les expressions suivantes.

1. $\mathbf{i}^3$
2. $(-\mathbf{i})^4$
3. $(1+\mathbf{i})^2$
4. $(4-5\mathbf{i})(3+4\mathbf{i})$
5. $\dfrac{4-5\mathbf{i}}{3+4\mathbf{i}}$

Exercice 8: Donner des exemples de couples $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

1. $x \neq y$ et $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
2. $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
3. $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
4. $\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.

Exercice 9: On veut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in \mathbb{R},\ \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.
2. Démontrer l'égalité souhaitée.

__**Exercice** 10:__ [*] Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

__**Exercice** 11:__ Que pensez-vous de l'ensemble suivant
$E = \{1 + (-1)^n,\ n \in \mathbb{N}\}$?

__**Exercice** 12:__

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 1 < \dfrac{2^n}{2^n - 1} \leq 2$.
2. On pose $A = \left\{ \dfrac{2^n}{2^n - 1},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$.
   Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de A si elles existent.

__**Exercice** 13:__ [*] Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure.
Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.

__**Exercice** 14:__ [*] Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$.
On pose $A + B = \{a + b,\ a \in A,\ b \in B\}$.

1. Montrer que $A + B$ est majoré.
2. En déduire qu'il admet une borne supérieure.
3. Montrer que $\sup(A + B)$=$\sup(A)$+$\sup(B)$