Chapitre 2 : Nombres réels (prof)

Table des matières

1 Identités remarquables

Théorème 1.

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2)\end{aligned}$$

Démonstration : Pour chacune des expressions, on développe le produit et on obtient l'autre expression. ■

Exemple 2 : Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad xy \leq \dfrac{x^2 + y^2}{2}$.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} \Leftrightarrow 2xy \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 2xy + y^2 \Leftrightarrow 0 \leq (x-y)^2$$

La dernière inégalité est vraie donc la première aussi.

Exemple 3 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Factoriser $a^3 + 1$.

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$a^3 + 1 = a^3 - (-1)^3 = (a - (-1))(a^2 - a + (-1)^2) = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

2 Manipulation d'inégalités

Théorème 4.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

1. Additionner ou soustraire la même quantité aux deux membres d'une inégalité conserve le sens de l'inégalité.

$$\forall z \in \mathbb{R}, \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

2. Multiplier une inégalité par une quantité strictement positive conserve le sens de l'inégalité

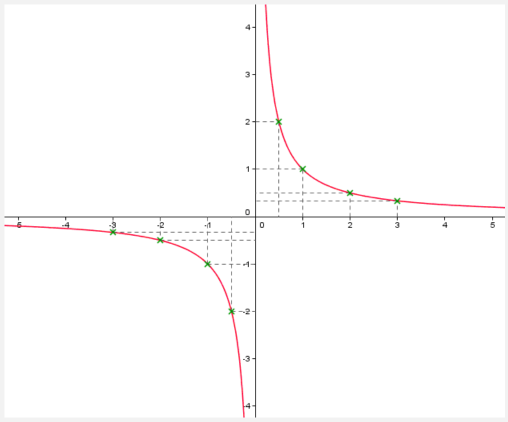
$$\forall z \in \mathbb{R}_+, \ x \leq y \Rightarrow xz \leq yz$$

3. Multiplier une inégalité par une quantité strictement négative change le sens de l'inégalité

$$\forall z \in \mathbb{R}_-, \ x \leq y \Rightarrow xz \geq yz$$

Théorème 5.

Soit $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ deux réels non nuls.



- Si $0 < x < y$ alors $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.
- Si $x < y < 0$ alors $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x} < 0$.
- Si $x < 0 < y$ alors $\dfrac{1}{x} < 0 < \dfrac{1}{y}$.

Théorème 6.

Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

1. On peut ajouter membre à membre deux inégalités de même sens.

$$x \leq y \text{ et } z \leq t \Rightarrow x + z \leq y + t$$

2. On peut multiplier membre à membre deux inégalités de même sens **si tous les termes sont positifs**.

$$0 \leq x \leq y \text{ et } 0 \leq z \leq t \Rightarrow xz \leq yt$$

Démonstration :

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $x \leq y$ et $z \leq t$.
   $\Rightarrow x + z \leq y + z$ et $y + z \leq y + t$.
   $\Rightarrow x + z \leq y + t$ par transitivité.
2. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $0 \leq x \leq y$ et $0 \leq z \leq t$.
   $\Rightarrow xz \leq yz$ et $yz \leq yt$.
   $\Rightarrow xz \leq yt$ par transitivité. ■

3 Résolutions d'équations et d'inéquations

Théorème 7.

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $a \neq 0$. On note (E) l'équation $ax^2 + bx + c = 0$.

1. (a) Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ alors l'équation admet 2 solutions réelles $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
   (b) Si $\Delta < 0$ alors il n'y a aucune solution réelle.

   Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$.
2. La courbe de f est une parabole dont le maximum est atteint en $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Le signe de f est celui de $-a$ entre les racines et celui de a à l'extérieur des racines.

Démonstration :

On utilise la forme factorisée de l'expression $ax^2 + bx + c$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right)$$

1. (a) Si $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ alors $-\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} > 0$ donc $\left(\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) > 0$.
   Le polynôme ne s'annule jamais.

   (b) Si $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ alors $\dfrac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(\dfrac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$ donc

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right) \\ &= a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) \\ &= a\left(x - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) \end{aligned}$$

   Les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ sont donc $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

2. Le maximum est atteint là où la dérivée s'annule.
3. On repart de la forme factorisée.

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

   Si $x \in [x_1; x_2]$ alors $x - x_1 \geq 0$ et $x - x_2 \leq 0$ donc $f(x)$ est du signe de $-a$.
   Sinon, $(x - x_1)(x - x_2) \geq 0$ donc $f(x)$ est du signe de a. ■

Exemple 8 : Résoudre l'inéquation $-x^2 + 4x < 4$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$-x^2 + 4x < 4 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 > 0 \Leftrightarrow (x - 2)^0 > 0$$

Donc l'inégalité est tout le temps vraie.

Exemple 9 : Résoudre l'inéquation $\dfrac{3}{x} \leq x + 2$.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \Leftrightarrow 3 \leq x(x + 2) \Leftrightarrow 0 \leq x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow 0 \leq (x - 1)(x + 3)$$

Or, le polynôme $x^2 + 2x - 3$ est positif en dehors des racines donc

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \text{ ET } x > 0 \Leftrightarrow x \in [1; +\infty[$$

Soit $x \in \mathbb{R}_-^*$.

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \Leftrightarrow 3 \geq x(x + 2) \Leftrightarrow 0 \geq x^2 + 2x - 3 \Leftrightarrow 0 \geq (x - 1)(x + 3)$$

Or, le polynôme $x^2 + 2x - 3$ est négatif en dehors des racines donc

$$\frac{3}{x} \leq x + 2 \text{ ET } x < 0 \Leftrightarrow x \in [-3; 0]$$

Finalement, $S = [-3; 0] \cup [1; +\infty[$

Exemple 10 : On considère la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{1}{2}x + 1$ et la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2 - \dfrac{3}{2}x - 1$.
Déterminer le point d'intersection de $\mathcal{D}$ et de $\mathcal{P}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}x + 1 = x^2 - \frac{3}{2}x - 1 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = x^2 - x - 1 \\ &\Leftrightarrow \quad x = \frac{2+\sqrt{12}}{2} \text{ ou } x = \frac{2-\sqrt{12}}{2} \end{aligned}$$

Donc $S = \left\{1+\sqrt{3}\ ,\ 1-\sqrt{3}\right\}$.

4 Fonctions puissances et racines

4.1 Fonctions puissances

Définition 11.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Soit $n \in \mathbb{Z}$.
Pour n positif, on appelle puissance $n-$ième de x le réel $x^n = \underbrace{x \times \cdots \times x}_{n \text{ fois}} = \prod_{k=1}^{n} x$.
Pour n négatif, on appelle puissance $n-$ième de x le réel $x^n = \dfrac{1}{x^{-n}}$.

Théorème 12 (Règles de calculs)**.**

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}^*)^2$ et $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$.

$$(xy)^n = x^n y^n, \quad x^{n+m} = x^m.x^n, \quad (x^n)^m = x^{nm}$$

4.2 Racines carrées

Définition 13.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$.
On appelle racine carrée de x l'unique réel **positif** a tel que $a^2 = x$.
On note $a = \sqrt{x}$.

Théorème 14 (Règles de calculs)**.**

Soient $(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2$.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \quad \sqrt{x^2} = |x|$$

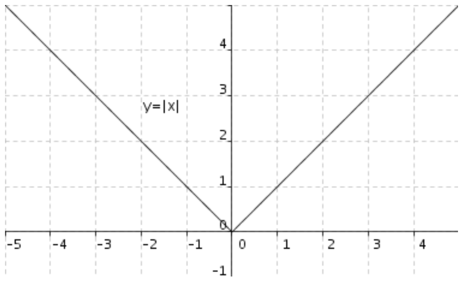
5 Valeur absolue

5.1 Définition

Définition 15.

Soit $x \in \mathbb{R}$.
On appelle la valeur absolue de x le nombre réel, noté $|x|$, défini par

$$|x| = \max\{x, -x\} = \begin{cases} x \text{ si } x \geq 0 \\ -x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$$



Théorème 16.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. **Positivité :** $|x| \geq 0$.
2. **Compatibilité avec le produit :** $|xy| = |x||y|$ et $|x^n| = |x|^n$.
3. **Compatibilité avec le quotient :** Si $y \neq 0$ alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$.

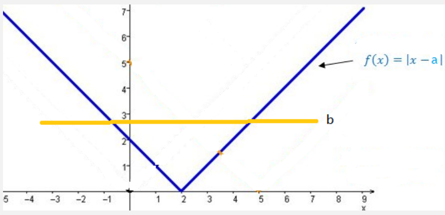
Remarque 17 : Soit $x \in \mathbb{R}$. Le réel $|x|$ représente la distance entre x et 0.

5.2 Equations et inéquations avec la valeur absolue

Théorème 18.

Soit $(x, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$.

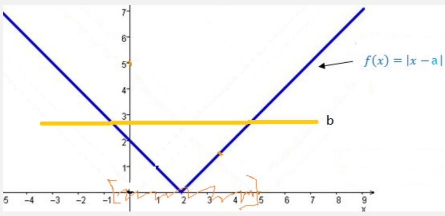
1. $|x| = b \Leftrightarrow x = b$ ou $x = -b$.
2. $|x - a| = b \Leftrightarrow x = a + b$ ou $x = a - b$.



Théorème 19.

Soit $(x, a, b) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^*$.

1. $|x| \leq b \Leftrightarrow -b \leq x \leq b$.
2. $|x - a| \leq b \Leftrightarrow a - b \leq x \leq a + b$.



5.3 Inégalités triangulaires

Théorème 20 (Inégalité triangulaire)**.**

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$|x + y| \leq |x| + |y|$$

Démonstration : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} (|x+y|)^2 & = & (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = |x|^2 + 2xy + |y|^2 \\ (|x| + |y|)^2 & = & |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \end{array}$$

Or, $xy \leq |xy|$ donc $(|x + y|)^2 \leq (|x[+[y[)^2$.
Par passage à la racine carrée, on retrouve l'inégalité souhaitée. ∎

Théorème 21.

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x + y| \leq |x| + |y|$$

Démonstration : Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{array}{rcl} |x| = |x + y - y| & \leq & |x + y| + |-y| \\ & \leq & |x + y| + |y| \\ |x| - |y| \leq |x + y| & & \end{array}$$

De même,

$$\begin{array}{rcl} |y| = |y + x - x| & \leq & |y + x| + |-x| \\ & \leq & |x + y| + |x| \\ |y| - |x| \leq |x + y| & & \end{array}$$

Finalement, $\big||x| - |y|\big| \leq |x + y|$. ∎

6 Partie entière

Définition 22.

Soit x un nombre réel. On appelle <u>partie entière de x</u> le plus grand entier inférieur ou égal à x. On la note $\lfloor x \rfloor$.

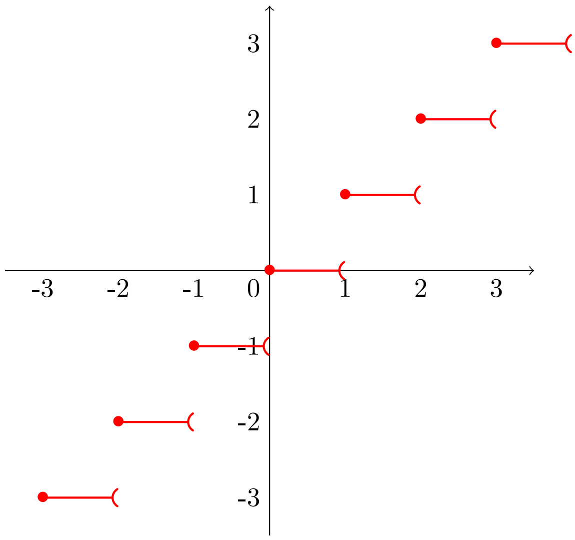
$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{N},\ n \leq x\}$$

<u>**Exemple 23**</u> **:** $E(\mathbf{e}) = 2$, $E(-\pi) = -4$.

Théorème 24.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x$$



Remarque 25 : La fonction partie entière est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{Z}$. Elle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Théorème 26.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$.

1. $x \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \lfloor x \rfloor$.
2. $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$.

Remarque 27 : Le deuxième point est faux dans le cas général.

7 Intervalles

Définition 28.

Un intervalle de $\mathbb{R}$ a une des formes suivantes pour un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

- L'ensemble vide : $\varnothing$
- Un segment : $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x \leq b\}$
- Un intervalle borné, semi-ouvert : $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x \leq b\}$ ou $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x < b\}$
- Un intervalle borné, ouvert : $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x < b\}$
- Un intervalle semi-ouvert, non borné : $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a \leq x\}$ ou $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \setminus x \leq b\}$
- Un intervalle ouvert non borné : $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \setminus a < x\}$ ou $]-\infty, b[= \{x \in \mathbb{R} \setminus x < b\}$
- $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

Les réels a et b sont appelés <u>les bornes</u> de l'intervalle.

Remarque 29 :

1. Chaque intervalle est associé à une ou deux inégalités.
2. Les bornes n'appartiennent pas toujours à l'intervalle.

Définition 30 (Hors-programme)**.**

Soit I une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que I est un intervalle de $\mathbb{R}$ lorsque I est l'ensemble vide ou lorsque

$$\forall (x,y) \in I^2,\ x \leq y \Rightarrow [x,y] \subset I$$

8 Parties minorées, majorées et bornées dans $\mathbb{R}$

8.1 Majorant, minorant

Définition 31.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A est minorée lorsqu'il existe un réel a plus petit que tous les éléments de A.

$$A \text{ minorée } : \ \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A,\ a \leq x$$

On dit que a est un minorant de A.

On dit que A est majorée lorsqu'il existe un réel a plus grand que tous les éléments de A.

$$A \text{ majorée } : \ \exists a \in \mathbb{R} \ / \ \forall x \in A,\ a \geq x$$

On dit que a est un majorant de A.

On dit que A est bornée lorsqu'elle est minorée et majorée.

$$A \text{ bornée } : \ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2 \ / \ \forall x \in A,\ a \leq x \leq b$$

Exemple 32 :

- Les intervalles $[a,b]$ et $]a,b[$ sont bornés.
- L'intervalle $]a,+\infty[$ est minoré mais pas majoré.
- L'ensemble $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est minoré par 0 et majorée par 1 avec $0 \notin A$ et $1 \in A$.

8.2 Maximum, minimum

Définition 33.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
On dit que A admet un plus petit élément (ou un minimum) lorsque :

$$\exists\ m \in A,\ \forall x \in A,\ m \leq x.$$

On dit que A admet un plus grand élément (ou un maximum) lorsque :

$$\exists\ M \in A,\ \forall x \in A,\ x \leq M.$$

Remarque 34 : Un plus petit élément est un minorant, un plus grand élément est un majorant.

Théorème 35.

Soit A une partie de $\mathbb{R}$.
Si A admet un plus petit (resp. plus grand) élément alors il est unique et on le note $\min(A)$ (resp. $\max(A)$).

Démonstration : Pour démontrer l'unicité, on suppose qu'il y en a deux.
Soient a et b deux plus petits éléments de A.

$$\begin{aligned} \forall x \in A,\ a \leq x \quad &\Rightarrow \quad a \leq b \\ \forall x \in A,\ b \leq x \quad &\Rightarrow \quad b \leq a \end{aligned}$$

Par double inégalité, $a = b$ et le plus petit élément est bien unique. ■

Exemple 36 :

- Pour l'intervalle $[a, b]$, a est le plus petit élément et donc un minorant.
- Pour l'intervalle $]a, b[$, b est un majorant mais pas le plus grand élément.
- Pour $A = \left\{\frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, 0 est un minorant mais pas le plus petit élément et 1 est le plus grand élément donc un majorant.

8.3 Borne supérieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 37.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Lorsqu'il existe, on appelle borne supérieure de A le plus petit des majorants de A.
On le note $\sup(A)$.

Exemple 38 : $\mathbb{Z}$ n'admet pas de borne supérieure.

Supposons par l'absurde que $\mathbb{Z}$ admette une borne supérieure. C'est donc un majorant de $\mathbb{Z}$.
Or, $\mathbb{Z}$ n'est pas borné donc c'est absurde.

Théorème 39.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet une borne supérieure alors elle est unique.
2. Si A admet un plus grand élément alors A admet une borne supérieure et
$$\sup(A) = \max(A).$$

Démonstration : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A admet deux bornes supérieures, on les note A et B.
Ce sont toutes les deux les plus petits majorants donc $A \leq B$ et $B \leq A$.
Par double inégalité, $A = B$.
2. Puisque $\max(A)$ est un majorant de A alors $\sup(A) \leq \max(A)$.
Puisque $\max(A) \in A$ alors $\max(A) \leq \sup(A)$
Par double inégalité, $\sup(A) = \max(A)$. ■

Exemple 40 : $\sup([1, 2]) = 2,\ \sup([1, 2[) = 2$.

Théorème 41 (Admis).

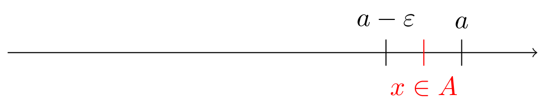
Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure.

Théorème 42 (Admis).

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée $a \in \mathbb{R}$.

$$a = \sup(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ a - \varepsilon < x \leq a$$

Remarque 43 : Cela signifie que pour $\varepsilon > 0$, le réel $a - \varepsilon$ n'est pas un majorant de A.



8.4 Borne inférieure d'une partie de $\mathbb{R}$

Définition 44.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.
Lorsqu'il existe, on appelle borne inférieure de A le plus grand des minorants de A.
On le note $\inf(A)$.

Exemple 45 : $\mathbb{Z}$ n'admet pas de borne inférieure.

Théorème 46.

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si A admet une borne inférieure alors elle est unique.
2. Si A admet un plus petit élément alors elle admet une borne inférieure et
$$\inf(A) = \min(A).$$

Démonstration : Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. On suppose que A admet deux bornes inférieures, on les note a et b.
   Ce sont toutes les deux les plus grands minorants donc $a \leq b$ et $b \leq a$.
   Par double inégalité, $a = b$.
2. Puisque $\inf(A)$ est un minorant de A alors $\min(A) \leq \inf(A)$.
   Puisque $\min(A) \in A$ alors $\inf(A) \leq \min(A)$
   Par double inégalité, $\inf(A) = \min(A)$.

■

Exemple 47 : $\inf([1,2]) = 1,\ \inf(]1,2]) = 1$.

Théorème 48 (Admis).

Toute partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.

Exemple 49 : Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0,\ |a| \leq \varepsilon$. Alors $a = 0$.
On raisonne par l'absurde. Supposons que $a \neq 0$.

- Si $a > 0$, $\exists\, \varepsilon > 0$ tel que $a > \varepsilon > 0$.
  Donc, $|a| > \varepsilon$. C'est absurde.
- Si $a < 0$, $\exists\, \varepsilon < 0$ tel que $a < \varepsilon < 0$.
  Donc, $|a| > |\varepsilon|$. C'est absurde.

Finalement, $a = 0$.

Théorème 50 (Admis)**.**

Soit A une partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée par $a \in \mathbb{R}$.

$$a = \inf(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists x \in A,\ a + \varepsilon > x \geq a$$

Remarque 51 : Cela signifie que pour $\varepsilon > 0$, le réel $a + \varepsilon$ n'est pas un minorant de A.