

Exercice 1: Calculer les fractions suivantes

1. $\frac{-12}{5} \div \left(\frac{-6}{5}\right)$
2. $\frac{3^{21} + 3^{22}}{3^{33} - 3^{30}}$
3. $\frac{5!}{2!3!}$ où $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.
4. $\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)}$
5. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$

1. $\frac{-12}{5} \div \left(\frac{-6}{5}\right) = \frac{-12}{5} \times \frac{5}{-6} = \frac{-12 \times 5}{5 \times (-6)} = 2$
2. $\frac{3^{21} + 3^{22}}{3^{33} - 3^{30}} = \frac{3^{21}(1 + 3)}{3^{30}(3^3 - 1)} = \frac{4 \times 3^{21}}{26 \times 3^{30}} = \frac{2}{13 \times 3^9}$.
3. $\frac{5!}{2!3!} = \frac{2 \times 3 \times 4 \times 5}{2 \times 2 \times 3} = 10$
4. $\frac{2022}{(-2022)^2 + (-2021)(2023)} = \frac{2022}{(-2022)^2 + (1 - 2022)(1 + 2022)} = \frac{2022}{2022^2 + 1 - 2022^2} = 2022$.
5. $\left(\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3} + 1}\right)^2 = \frac{25 \times 2}{(1 + \sqrt{3})^2} = \frac{50}{1 + 2\sqrt{3} + 3} = \frac{25}{2 + \sqrt{3}} = \frac{25(2 - \sqrt{3})}{4 - 3} = 25(2 - \sqrt{3})$
6. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^{n+1}}$.

Exercice 2: Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $(2x + 1)^2 = (2x + 1)(x - 3)$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (2x + 1)^2 &= (2x + 1)(x - 3) \Leftrightarrow (2x + 1)[(2x + 1) - (x - 3)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (2x + 1)(x + 4) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = -4
 \end{aligned}$$

2. $36x^2 - 49 - (6x + 7)(6x - 1) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 36x^2 - 49 - (6x + 7)(6x - 1) &= 0 \Leftrightarrow (6x - 7)(6x + 7) - (6x + 7)(6x - 1) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (6x + 7)[(6x - 7) - (6x - 1)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (6x + 7) \times (-6) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = \frac{-7}{6}
 \end{aligned}$$

3. $(-9x - 8)(8x + 8) = 64x^2 - 64$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (-9x - 8)(8x + 8) &= 64x^2 - 64 \Leftrightarrow (-9x - 8)(8x + 8) - (8x - 8)(8x + 8) \\
 &\Leftrightarrow (8x + 8)[(-9x - 8) - (8x - 8)] = 0 \\
 &\Leftrightarrow (8x + 8)(-17x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 0
 \end{aligned}$$

4. $4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 7 \geq 0$$

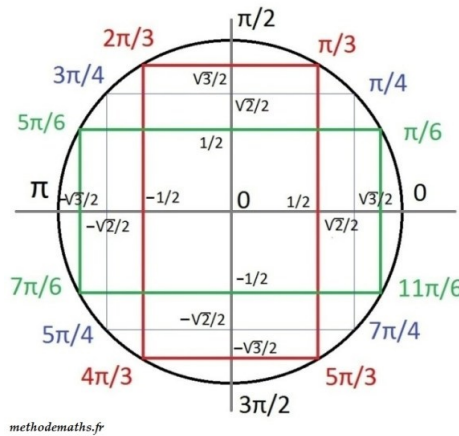
C'est un polynôme de degré 2 dont les racines donc $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{60}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{15}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2 - \sqrt{60}}{4} = \frac{-1 - \sqrt{15}}{2}$.

On sait que ce polynôme est du signe de $a = 2$ à l'extérieur des racines donc

$$4x^2 - 2x + 3 \geq 2x^2 - 4x + 10 \Leftrightarrow x \in \left] -\infty; \frac{-1 - \sqrt{15}}{2} \right] \cup \left[\frac{-1 + \sqrt{15}}{2}; +\infty \right[$$

5. $\sin(x) > -\frac{1}{2}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.



$$\sin(x) > -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{7\pi}{6} \right] + 2\pi\mathbb{Z}$$

6. $\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\cos(x) > \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} \right] + 2\pi\mathbb{Z}$$

Exercice 3: Résoudre les équations et inéquations suivantes

1. $|x| = 2$
2. $|x + 2| = 5$
3. $|3 - x| = x + 1$
4. $|x| \leq 3$
5. $|x - 3| \leq 4$
6. $2 < |x + 1| < 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. $|x| = 2 \Leftrightarrow x = 2$ ou $x = -2$.
2. $|x + 2| = 5 \Leftrightarrow x + 2 = 5$ ou $x + 2 = -5 \Leftrightarrow x = 3$ ou $x = -7$.
3. Si $x + 1 < 0$, cette équation n'a pas de solution.

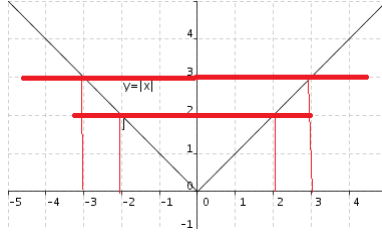
On suppose $x \geq -1$.

$$\begin{aligned} |3 - x| = x + 1 &\Leftrightarrow 3 - x = x + 1 \text{ ou } x - 3 = x + 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } -3 = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

4. $|x| \leq 3 \Leftrightarrow x \in [-3; 3]$.

5. $|x - 3| \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq x - 3 \leq 4 \Leftrightarrow x \in [-1; 7]$.

6.



$$2 < |x + 1| < 3 \Leftrightarrow 2 < x + 1 < 3 \text{ ou } -3 < x + 1 < -2 \Leftrightarrow x \in [-4; -3] \cup [1; 2]$$

Exercice 4: Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$$

Soit $a \in \mathbb{R}_+$. On raisonne par récurrence en posant $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) : "(1 + a)^n \geq 1 + na"$.

I : Pour $n = 0$,

$(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$ donc $P(0)$ est vraie.

H : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie.

$$\begin{aligned} (1 + a)^{n+1} &= (1 + a)^n \times (1 + a) \geq (1 + na)(1 + a) \\ &\geq 1 + na + a + 1 \\ &\geq 1 + (n + 1)a \end{aligned}$$

Donc $P(n + 1)$ est vraie.

C : $\forall n \in \mathbb{N}, (1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 5: Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Calculer, développer ou simplifier les expressions suivantes

1. $(a + 2)^3$
2. $a^4 - 1$
3. $\sqrt{(-a)^2}$
4. $\sqrt{(3 - a)^2}$

1. $(a + 2)^3 = a^3 + 3 \times a^2 \times 2 + 3 \times a \times 2^2 + 2^3 = a^3 + 6a^2 + 12a + 8$.

2. $a^4 - 1 = (a^2)^2 - 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1) = (a - 1)(a + 1)(a^2 + 1)$.

3. $\sqrt{(-a)^2} = |-a| = |a|$.

4. $\sqrt{(3 - a)^2} = |3 - a|$

Exercice 6: [*] Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Montrer que

$$\frac{2ab}{a + b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a + b}{2}$$

Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On va démontrer chacune des inégalités séparément.

$$\begin{aligned} & \bullet (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Leftrightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}. \\ & \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{1}{\sqrt{b}} \right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} - \frac{2}{\sqrt{ab}} + \frac{1}{b} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b+a}{ab} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}} > 0 \Leftrightarrow \frac{ab}{a+b} \leq \frac{\sqrt{ab}}{2} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \end{aligned}$$

Exercice 7: Introduction aux complexes

Soit i tel que $i^2 = -1$. Calculer les expressions suivantes.

1. i^3
2. $(-i)^4$
3. $(1+i)^2$
4. $(4-5i)(3+4i)$
5. $\frac{4-5i}{3+4i}$

$$\begin{aligned} 1. & i^3 = i \times i^2 = -i. \\ 2. & (-i)^4 = i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1. \\ 3. & (1+i)^2 = 1 + 2i + (i)^2 = 1 + 2i - 1 = 2i. \\ 4. & (4-5i)(3+4i) = 12 + 16i - 15i - 20i^2 = 12 + i + 20 = 32 + i. \\ 5. & \frac{4-5i}{3+4i} = \frac{(4-5i)(3-4i)}{9-16i^2} = \frac{12-16i-15i+20i^2}{25} = \frac{-8-31i}{25}. \end{aligned}$$

Exercice 8: Donner des exemples de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

1. $x \neq y$ et $\lfloor x \rfloor = \lfloor y \rfloor$.
 $\lfloor 0, 3 \rfloor = \lfloor 0, 7 \rfloor$ ou $\lfloor -2, 3 \rfloor = \lfloor -2, 8 \rfloor$.
2. $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor$.
 $\lfloor 1, 2+0, 5 \rfloor = \lfloor 1, 2 \rfloor$.
3. $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
 $\lfloor 1, 4+1, 5 \rfloor = \lfloor 1, 4 \rfloor + \lfloor 1, 5 \rfloor$.
4. $\lfloor x+y \rfloor \neq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$.
 $\lfloor 2, 6+1, 6 \rfloor = 4$ et $\lfloor 2, 6 \rfloor + \lfloor 1, 6 \rfloor = 3$.

Exercice 9: On veut montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$$

1. Montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$ est 1-périodique.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x+1 \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} h(x+1) &= \left\lfloor \frac{\lfloor n(x+1) \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x+1 \rfloor = \left\lfloor \frac{\lfloor nx + n \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor + n}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 \\ &= \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} + 1 \right\rfloor - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor \end{aligned}$$

La fonction h est 1-périodique sur $\mathbb{R}$. On va l'étudier sur $[0, 1[$.

2. Démontrer l'égalité souhaitée.

Soit $x \in [0, 1[$. On a $\lfloor x \rfloor = 0$. De plus,

$$0 \leq \lfloor nx \rfloor \leq nx \Rightarrow 0 \leq \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x < 1$$

Donc, pour $x \in [0, 1[$, $\left\lfloor \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = 0$.

La fonction h est nulle sur $[0, 1[$ et elle est 1-périodique. Elle est nulle sur $\mathbb{R}$ et on obtient l'égalité souhaitée.

Exercice 10: [*] Montrer que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

- $\lfloor x \rfloor \leq x$ et $\lfloor y \rfloor \leq y$ donc $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x + y$.
 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ est un entier inférieur à $x + y$ et $\lfloor x + y \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à $x + y$ donc
 $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor$.
- On a $\lfloor x + y \rfloor \leq x + y$.
De plus, $x < \lfloor x \rfloor + 1$ et $y < \lfloor y \rfloor + 1$ donc $x + y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
On a donc $\lfloor x + y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.
Or, ce sont des entiers donc $\lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.

Exercice 11: Que pensez-vous de l'ensemble suivant

$$E = \{1 + (-1)^n, n \in \mathbb{N}\}?$$

1. L'ensemble E est non vide car 2 appartient à E .
2. $E = \{0, 2\}$ donc c'est un ensemble fini.
3. Il a un plus grand élément 2 qui est donc sa borne supérieure.
4. Il a un plus petit élément 0 qui est donc sa borne inférieure.

Exercice 12:

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 < \frac{2^n}{2^n - 1} \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$1 < \frac{2^n}{2^n - 1} \leq 2 \Leftrightarrow 2^n - 1 < 2^n \leq 2(2^n - 1) \Leftrightarrow -1 < 0 < 2^n - 2$$

La dernière double inéquation est vraie dès que $n \geq 1$. Donc la première est vraie aussi.

2. On pose $A = \left\{ \frac{2^n}{2^n - 1}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Déterminer la borne inférieure et la borne supérieure de A si elles existent.

De la question précédente, on déduit que l'ensemble A est minoré par 1 et majoré par 2.

De plus, $2 \in A$ donc A est non vide.

On en déduit que A admet une borne inférieure et une borne supérieure, $\inf(A)$ et $\sup(A)$, et que

$$\sup(A) \leq 2 \text{ et } \inf(A) \geq 1.$$

2 est un majorant atteint (pour $n = 1$) donc $2 = \max(A)$. Ainsi, $\sup(A) = 2$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n - 1} = 1$ donc il y a des éléments de A aussi proche qu'on le souhaite de 1 sans jamais l'atteindre.

A n'admet donc pas de plus petit élément et $\inf(A) = 1$.

Exercice 13: [*] Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ admettant une borne supérieure. Montrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Soit $a \in A$.
 $\Rightarrow a \in B \Rightarrow a \leq \sup(B)$. Donc, $\sup(B)$ est un majorant de A .
 Or, $\sup(A)$ est le plus petit majorant de A donc $\sup(A) \leq \sup(B)$.

Exercice 14: [*] Soient A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$. On pose $A + B = \{a + b, a \in A, b \in B\}$.

1. Montrer que $A + B$ est majoré.

Pour $a \in A$, on a $a \leq \sup(A)$ et pour $b \in B$, $b \leq \sup(B)$.
 Soit $x \in A + B$. $\exists(a, b) \in A \times B$ tel que $x = a + b$. Donc, $x \leq \sup(A) + \sup(B)$.
 L'ensemble $A + B$ est donc majoré par $\sup(A) + \sup(B)$.

2. En déduire qu'il admet une borne supérieure.

Il est non vide et il admet ainsi une borne supérieure $\sup(A + B)$.

3. Montrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$

Par définition de la borne supérieure comme plus petit des majorants, on a par la question précédente, $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

On va montrer l'inégalité dans l'autre sens. Soit $b \in B$.

$$\begin{aligned} \forall a \in A, a + b &\leq \sup(A + B) \\ a &\leq \sup(A + B) - b \\ \text{donc, } \forall b \in B, \sup(A) &\leq \sup(A + B) - b \\ \forall b \in B, b &\leq \sup(A + B) - \sup(A) \\ \text{donc, } \sup(B) &\leq \sup(A + B) - \sup(A) \\ \text{d'où, } \sup(B) + \sup(A) &\leq \sup(A + B) \end{aligned}$$

Par double inégalité, on obtient $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.