

Prénom :

Interrogation n°2 : Calculs et raisonnements

Nom :

1. Simplifier chacune des expressions suivantes :

2,5

• Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \neq 1$. $A = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$

• $B = (-5)^3 \times (5)^{-5}$

• $C = \frac{3^{20} - 3^{21}}{3^{31} + 3^{30}}$

• $D = 10^3 \times 10^5 - 10^3$

2. Soient A et B deux assertions mathématiques.

1 (a) Donner la définition de la contraposée de $A \Rightarrow B$.

(b) Rappeler les liens qui peuvent exister entre une implication et sa contraposée.

3. Traduire avec des quantificateurs les énoncés suivants :

2 (a) La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

(b) Il existe un entier dont le carré vaut -16 .

(c) Pour qu'un réel x soit inférieur à 5, il faut qu'il soit inférieur à -12 .

4. Dire si les propriétés sont vraies ou fausses, en justifiant

1,5 (a) $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 1$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \cos(x) = 1$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}_+, x = \sqrt{y}$.

3 5. Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^n + 1$ est pair.

1) $A = \frac{n-1}{n(n-1)} - \frac{n}{n(n-1)} = \boxed{\frac{-1}{n(n-1)}}$

$$B = -5^3 \times 5^{-5} = -5^{-2} = \frac{-1}{5^2} = \boxed{\frac{-1}{25}}$$

$$C = \frac{3^{20}(1-3)}{3^{30}(3+1)} = \frac{1}{3^{10}} \times \frac{-2}{4} = \boxed{\frac{-1}{3^{10} \times 2}}$$

$$D = 10^3(10^5 - 1) = 10^3 \times 99999 = \boxed{99999000}$$

2) (a) $\boxed{\neg B \Rightarrow \neg A}$

(b) Elles sont équivalentes.

3) (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / f(x) \neq f(y)$.

(b) $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 = -16$.

③ $\forall x \in \mathbb{R}, x < 5 \Rightarrow x < -12$.

4) (a) Faux, $\cos(\pi/2) = 0$.

(b) Vrai, $\cos(0) = 1$.

(c) Faux. Prenons $x = 2$ et $y = 3$. $2 \neq \sqrt{3}$.

5) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$: " $3^n + 1$ est pair".

(I) Pour $n = 0$:

$3^0 + 1 = 2$ et 2 est pair donc $P(0)$ est vraie

(H) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ soit vrai.

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} / 3^k + 1 = 2l$

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} / 3^{k+1} + 3 = 2 \times 3l$

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} / 3^{k+1} + 1 = 2(3l - 1)$

Donc, $P(k+1)$ est vrai.

(C) Par le principe de récurrence,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 3^n + 1 \text{ est pair.}}$

Prénom :

Nom :

Interrogation n°2 : Calculs et raisonnements

1. Simplifier chacune des expressions suivantes :

2,5 • Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $A = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

• $B = (-7)^3 \times (-7)^{-5}$

• $C = \frac{3^{22} - 3^{21}}{3^{33} + 3^{30}}$

• $D = 10^3 \times 10^5 - 10^4$

2. Soient A et B deux assertions mathématiques.

(a) Donner la définition de la réciproque de $A \Rightarrow B$.

(b) Rappeler les liens qui peuvent exister entre une implication et sa réciproque.

3. Traduire avec des quantificateurs les énoncés suivants :

(a) La fonction f n'est pas constante sur $\mathbb{R}$.

(b) Il existe un entier dont le carré vaut 16.

(c) Pour qu'un réel x soit inférieur à 5, il suffit qu'il soit inférieur à -12.

4. Dire si les propriétés sont vraies ou fausses. *en justifiant.*

(a) $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 1$.

(b) $\exists x \in \mathbb{R}, \sin(x) = 1$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}_+, x = \sqrt{y}$.

5. Démontrer que pour tout entier naturel n , $3^n - 1$ est pair.

1) $A = \frac{n+1}{n(n+1)} - \frac{n}{n(n+1)} = \boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$

$B = (-7)^{3-5} = (-7)^{-2} = \frac{1}{(-7)^2} = \boxed{\frac{1}{49}}$

$C = \frac{3^{21}(3-1)}{3^{30}(3^3+1)} = \frac{1}{3^9} \times \frac{2}{28} = \boxed{\frac{1}{3^9 \times 14}}$

$D = 10^8 - 10^4 = 10^4(10^4 - 1) = 10^4 \times 9999 = \boxed{99\,990\,000}$

2) (a) $\boxed{B \Rightarrow A}$

(b) Il n'y en a pas.

3) (a) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} / f(x) \neq f(y)$

(b) $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 = 16$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}, x < -12 \Rightarrow x < 5$.

4) (a) Faux, car $\sin(0) = 0$.

(b) Vrai, car $\sin(\pi/2) = 1$.

(c) Faux. Pour $x = -1$, il n'y a pas de y qui convient.

5) $\forall n \in \mathbb{N}, P(n): "3^n - 1 \text{ est pair}"$

(I) Pour $n=0$:

$3^0 - 1 = 0$ et 0 est pair donc $P(0)$ est vrai.

(H) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(k)$ soit vrai.

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} / 3^k - 1 = 2l$

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} / 3^{k+1} - 3 = 2 \times 3l$

$\Rightarrow \exists l \in \mathbb{N} / 3^{k+1} - 1 = 2(3l + 1)$

Donc, $P(k+1)$ est vrai.

(C) Par le principe de récurrence,

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, 3^n - 1 \text{ est pair.}}$