Chapitre 3 : Ensembles (prof)

Table des matières

1 Ensemble et appartenance

1.1 Définitions d'un ensemble

Définition 1.

Lorsqu'un ensemble E est défini en faisant la liste des objets mathématiques qu'il contient, on dit que l'on a défini cet ensemble par extension.

$$E = \{x_1, \ldots, x_n\}$$

Ces objets mathématiques sont appelés éléments de l'ensemble E.

Lorsqu'il n'y a qu'un seul élément, on parle de singleton : $\{x_1\}$.
Lorsqu'il n'y a aucun élément, on parle de l'ensemble vide. On le note $\varnothing$.

On dit que y appartient à E lorsque y est un des éléments de E.

$$y \in E \Leftrightarrow \exists\, i \in [\![1, n]\!],\ y = x_i$$

Exemple 2 : $E = \{1, 7, 12, 85\}$ est défini par extension.

Définition 3.

Lorsqu'un ensemble E est défini par une propriété que vérifient les éléments d'un autre ensemble F, on dit que l'ensemble E est défini par compréhension.

$$E = \{x \in F \ \text{ tel que } P(x)\}$$

On dit que y appartient à E lorsque $P(y)$ est vraie.

$$y \in E \Leftrightarrow P(y)$$

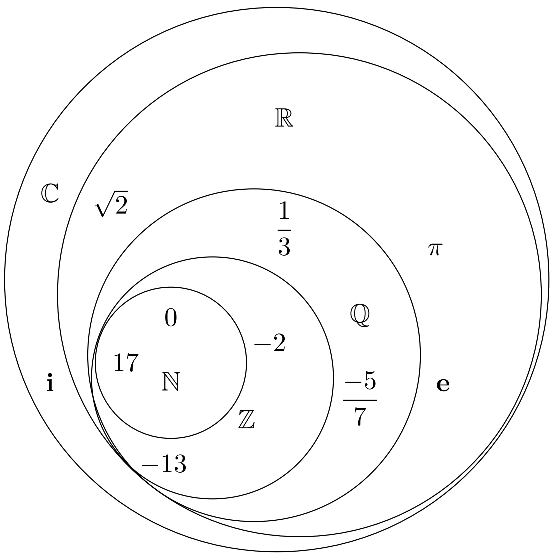
Exemple 4 : Prenons $E = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x(x+2) = -12\}$. Il est défini par compréhension.
Donner sa définition par extension.

On résout l'équation $x^2 + 2x + 12 = 0$. Le discriminant est négatif donc il n'y a pas de solution donc $E = \varnothing$.

1.2 Les ensembles usuels

Les ensembles usuels sont

- $\mathbb{N}$, l'ensemble des entiers naturels
- $\mathbb{Z}$, l'ensemble des entiers relatifs
- $\mathbb{Q}$, l'ensemble des rationnels
- $\mathbb{R}$, l'ensemble des réels
- $\mathbb{C}$, l'ensemble des complexes



- On note E^* lorsqu'on veut exclure 0.
- On note E_+ pour ne conserver que les éléments positifs.
- On note E_- pour ne conserver que les éléments négatifs.

2 Inclusion

Définition 5.

Soient E et F deux ensembles. On dit que <u>E est inclus dans F</u> lorsque tous les éléments de E appartiennent à F. On note $E \subset F$ ou $F \supset E$.

$$E \subset F \Leftrightarrow \forall x \in E\ ,\ x \in F$$

Remarque 6 : Pour montrer qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F, on devra démontrer que tous les éléments de E sont inclus dans F.

1. Soit $x \in E$.
2. ...
3. donc $x \in F$.

Exemple 7 : On note $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ /\ 2x - y = 1\right\}$ et $F = \{(t+1, 2t+1), t \in \mathbb{R}\}$.

1. Donner deux éléments de chaque ensemble.

   $(0, -1) \in E$, $\left(\dfrac{1}{2}, 0\right) \in E$.
   $(1, 1) \in F$ et $(0, -1) \in F$.
2. Montrer que $F \subset E$.
   Soit $t \in \mathbb{R}$ quelconque. Cela revient au même que de choisir un point quelconque $(t+1, 2t+1)$ dans F.
   $2(t+1) - (2t+1) = 1$ donc $(t+1, 2t+1) \in E$.
   Donc, $F \subset E$.

Remarque 8 : Il faut bien distinguer les symboles $\in$ et $\subset$.

- $x \in E$: l'élément x appartient à l'ensemble E.
- $A \subset E$: l'ensemble A est inclus dans l'ensemble E.

Remarque 9 : L'ensemble vide est inclus dans tous les ensembles.

Définition 10.

Soient E et F deux ensembles. On dit que <u>E est égal à F</u> lorsque E est inclus dans F et que F est inclus dans E.

$$E = F \Leftrightarrow (E \subset F) \text{ et } (F \subset E)$$

3 Sous-ensemble ou partie d'un ensemble

Définition 11.

Soit E un ensemble. On appelle <u>sous-ensemble ou partie de E</u> tout ensemble inclus dans E.
On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble contenant toutes les parties de E.

Exemple 12 : Faire la liste des parties de $E = \{0, 1\}$ puis de $F = \{0, 1, 2\}$.

$$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$$

$$\mathcal{P}(F) = \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, \{0,1,2\}\}$$

Remarque 13 : Une partie de E est *incluse* dans E mais elle *appartient* à l'ensemble des parties de E.

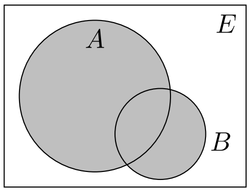
$$A \subset E \Leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$$

4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 14.

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
On appelle union de A et de B et on note $A \cup B$ l'ensemble défini par

$$A \cup B = \{x \in E \ / x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Théorème 15.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

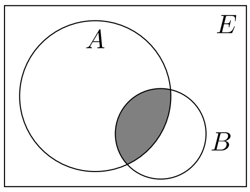
1. $A \cup \varnothing = A$. *existence d'un élément neutre.*
2. $A \cup E = E$.
3. $A \cup A = A$.
4. L'union est **commutative** : $A \cup B = B \cup A$.
5. L'union est **associative** : $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C$.

Remarque 16 : L'union de deux ensembles est l'équivalent de l'opérateur logique OU.

Définition 17.

Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
On appelle intersection de A et de B et on note $A \cap B$ l'ensemble défini par

$$A \cap B = \{x \in E \ / x \in A \text{ et } x \in B\}$$



Théorème 18.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E. Alors,

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$.
2. $A \cap E = A$.
3. $A \cap A = A$.
4. L'intersection est **commutative** : $A \cap B = B \cap A$.
5. L'intersection est **associative** : $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$.

Remarque 19 : L'intersection de deux ensembles est l'équivalent de l'opérateur logique ET.

Théorème 20.

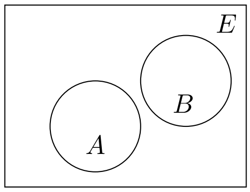
Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

1. L'intersection est **distributive** sur l'union : $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. L'union est **distributive** sur l'intersection : $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Définition 21.

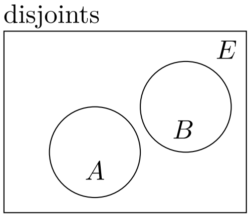
Soit E un ensemble. Soient A et B deux parties de E.
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont disjoints.

On dit alors que l'union $A \cup B$ est une union disjointe et on la note $A \amalg B$.

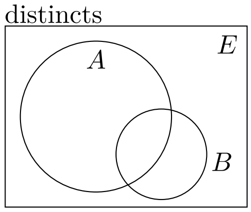


Remarque 22 : Il ne faut pas confondre *disjoint* et *distinct*.

disjoints



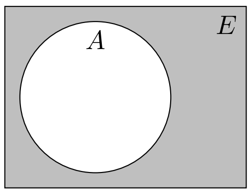
distincts



Définition 23.

Soit E un ensemble. Soit A une partie de E.
On appelle complémentaire de A dans E et on note $\overline{A}$ l'ensemble défini par

$$\overline{A} = \{x \in E \;/ x \notin A\}$$



Théorème 24.

Soit E un ensemble. Soient A, B et C trois parties de E.

1. $\overline{\varnothing} = E$ et $\overline{E} = \varnothing$.
2. $\overline{\overline{A}} = A$.
3. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
4. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
5. Si $A \subset B$ alors $\overline{B} \subset \overline{A}$.

5 Couples, $p-$uplets et produit cartésien

Définition 25.

Soient E et F deux ensembles.
On appelle produit cartésien de E et F l'ensemble défini par

$$E \times F = \{(x, y),\ \ x \in E,\ y \in F\}$$

Les éléments de $E \times F$ sont appelés des couples.

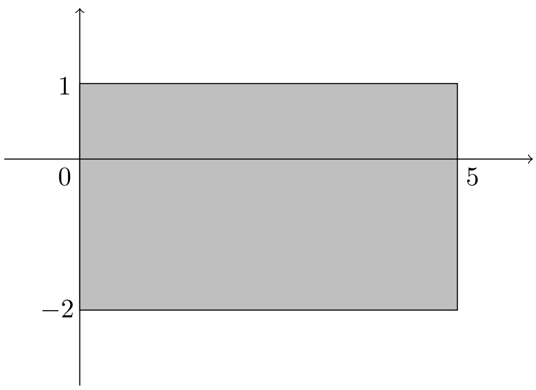
Lorsque $E = F$, on note E^2 plutôt que $E \times E$.

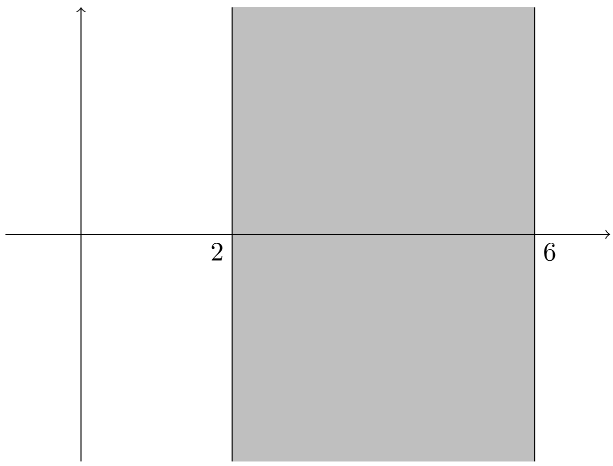
Exemple 26 : Pour $E = \{a, 5\}$ et $F = \{3, b\}$, $E \times F = \{(a, 3), (a, b), (5, 3), (5, b)\}$.

Exemple 27 : Proposer un élément de $\mathbb{N} \times [0; 1]$.

$(2, 0.5) \in \mathbb{N} \times [0; 1]$.

Exemple 28 : Représenter $[0; 5] \times [-2; 1]$ et $[2; 6] \times \mathbb{R}$.





Définition 29.

Soit E un ensemble. Soit $p \in \mathbb{N},\ p \geq 2$.
On appelle $p-$uplet de E ou $p-$liste de E la donnée de p éléments de E dans un ordre précis.

On note E^p l'ensemble des $p-$uplets de E.

$$E^p = \{(x_1, \ldots, x_p),\ \ \forall i \in [\![1, p]\!], x_i \in E\}$$

Exemple 30 : (2,2,3,5) est un $4-$uplet de l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Remarque 31 : On imagine quatre tirages successifs avec remise dans l'ensemble E.

Remarque 32 : L'ordre est très important. Si $a \neq b$ alors $(a, b) \neq (b, a)$ et $\{a, b\} = \{b, a\}$.