



Devoir Surveillé n°1

Samedi 23 septembre 2023

– Calculs sur les nombres réels, récurrences –

Exercice 1 - Calculs.

1. Simplifier : $\frac{1 + \sqrt{7}}{1 - \sqrt{7}}$
2. Simplifier : $\frac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$.
3. Simplifier : $\frac{(3^2 \times (-2)^4)^8}{((-3)^5 \times 2^3)^{-2}}$.
4. Résoudre $\sin(2x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
5. Résoudre $\cos(3x) = \frac{1}{2}$
6. Simplifier : $\frac{4002}{1000 \times 1002 - 999 \times 1001}$.
7. (a) Montrer que $3 - 2\sqrt{2} > 0$.
(b) Montrer que $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$.
(c) En déduire les solutions réelles de l'équation $\frac{1}{4}x^2 + 2x + 2\sqrt{2} + 1 = 0$.
On donnera les solutions sous la forme la plus simple possible.

Exercice 2 - Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci (mathématicien italien également connu sous le nom de Léonard de Pise, 1170-1250) est la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$$

1. Calculer les 9 premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite de Fibonacci est à valeurs entières strictement positives à l'exception du premier terme (on pourra raisonner par récurrence sur $\mathbb{N}^*$).
3. Soient r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de l'équation du second degré :

$$x^2 - x - 1 = 0,$$

r_1 étant la plus grande. Expliciter r_1 et r_2 .

4. Déterminer un encadrement de $\sqrt{5}$ entre deux entiers. En déduire que $-1 < r_2 < 0 < 1 < r_1$ puis que $\left| \frac{r_2}{r_1} \right| < 1$.
5. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} (r_1^n - r_2^n).$$

6. Soit $q \in \mathbb{R}$. La suite $(q^n)_{n \in \mathbb{N}}$ a-t-elle une limite et, si oui, quelle est-elle? Aucune démonstration n'est attendue. On distinguera plusieurs cas suivant que $q \leq -1$, $-1 < q < 1$, $q = 1$ et $q > 1$.
7. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers $+\infty$?
8. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Justifier que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bien définie.

9. Quelle est la limite de v_n ? (on pourra transformer l'expression de v_n en factorisant au numérateur par r_1^{n+1} et au dénominateur par r_1^n).
10. Ce nombre est le nombre d'or, en donner la valeur exacte. Montrer que c'est la proportion (rapport longueur sur largeur) des côtés d'un rectangle tel que si on appuie, en son intérieur, un carré de côté sa largeur, la partie intérieure restante est un rectangle de même proportion. On fera un dessin.

Exercice 3 - Une équation polynomiale

Soit la fonction polynomiale définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1$$

On considère l'équation (E) : $P(x) = 0$. Le but de cet exercice est de résoudre cette équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que 0 n'est pas solution de (E).
2. Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Montrer que si α est solution de (E), alors $\frac{1}{\alpha}$ est aussi solution de (E).
3. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Montrer que :

$$P(x) = 0 \iff x^2 + 2x - 1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \text{ (E')}$$

4. Déterminer trois réels a , b , et c tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, (E') \iff a \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 + b \left(x + \frac{1}{x} \right) + c = 0.$$

5. Résoudre $y^2 + 2y - 3 = 0$
6. Dédire des questions précédentes l'ensemble des solutions de (E') puis celui de (E).
7. Vérifier que le résultat obtenu est cohérent avec le résultat de la question 2